Lösung zu BASISPRÜFUNG MATHEMATIK I UND II

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

1. **a)** Damit $f(x)$ wohldefiniert muss das Argument im ln positiv sein und einen Nenner haben, der nicht Null ist. Also

$$x > 0, \text{ und } \ln(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1,$$

und somit ist der (maximale) Definitionsbereich $]0,1[\cup]1,+\infty[$. 2 Punkte

b) f ist streng monoton wachsend, falls die Ableitung von f positiv ist,

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0.$$

Um das Vorzeichen von $f'(x)$ zu studieren, studieren wir das Vorzeichen des Zählers.

$$\ln x - 1 > 0 \iff x > e, \quad \ln x - 1 = 0 \iff x = e, \quad \ln x - 1 < 0 \iff x < e,$$

Also haben wir $f'(x) > 0$ auf $]e,\infty[$. 2 Punkte

c) Wir wissen bereits, dass $f'(x) = 0 \iff x = e$. Des Weiteren wissen wir, dass $f'(x) < 0$ auf $]1,e[$ und $f'(x) > 0$ auf $]e,\infty[$. Damit ist $x = e$ ein lokales Minimum von f mit Wert $f(e) = e$. 2 Punkte

d) Wir berechnen die Limites an den Rändern.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x}{\ln x} = \pm\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

wobei (H) für die Anwendung von der Regel von Hôpital steht, und die anwendbar war, weil $\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Also haben wir zusammen mit *b*) und *c*), dass der Wertebereich gleich $]-\infty,0[\cup[e,\infty[$. 3 Punkte

2. **a)** Dies ist eine separierbare Differentialgleichung. Daher haben wir

$$\begin{aligned} & y'(x) = e^{y(x)} \\ \Rightarrow & \int e^{-y(x)} y'(x)\, dx = x - k \\ \Rightarrow & - e^{-y(x)} = x - k \\ \Rightarrow & y(x) = \ln \frac{1}{k - x} \end{aligned}$$

wobei k eine beliebige Konstante ist. 4 Punkte

b) Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung. Wir schauen uns also die Nullstellen des charakteristische Polynom an.

$$y^2 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow y = 3 (\text{2-fache Nullstelle}).$$

Also haben wir nach Formelsammlung die allgemeine Lösung

$$y_h(x) = e^{3x}(k_1 + k_2 x)$$

für k_1, k_2 beliebige Konstanten. 4 Punkte

3. a) Wir benutzen das Gaussverfahren mit $k = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & 0 & 7 \end{array}\right) \overset{\substack{II-2I \\ III-4I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{III-II \\ I-II/5 \\ II/5}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{array}\right)$$

Also ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3 Punkte

b) Wir benutzen das Gaussverfahren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 7 \\ 4 & 9 & k^2 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-2I \\ III-4I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & k^2-4 \end{pmatrix} \overset{\substack{III-II \\ I-II/5 \\ II/5}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-9 \end{pmatrix}$$

Da wir bereits zwei umkreiste Einsen haben, ist der Rang 2, nur falls $k^2 - 9 = 0$ ist. Dies ist genau der Fall wenn $k = \pm 3$. 2 Punkte

c) Wir benutzen erneut das Gaussverfahren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & k^2 & k+7 \end{array}\right) \overset{\substack{II-2I \\ III-4I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & k^2-4 & k+3 \end{array}\right) \overset{\substack{III-II \\ I-II/5 \\ II/5}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-9 & k+3 \end{array}\right)$$

Damit das System nicht lösbar ist, muss man $k^2 - 9 = 0$ haben und gleichzeitig $k + 3 \neq 0$, deshalb ist der gesuchte Parameter genau $k = 3$. 2 Punkte

d) Von c) kennen wir bereits das Gaussverfahren. Damit es unendlich viele Lösungen gibt, muss es eine Nullzeile in der Stufenform-Matrix geben, also muss es $k^2 - 9 = 0$ und gleichzeitig $k + 3 = 0$ sein, deshalb ist der gesuchte Parameter genau $k = -3$. 2 Punkte

4. a) Wir rechnen

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v}.$$

Also ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A (mit Eigenwert 0). 2 Punkte

b) Die Matrix $A + I$ ist invertierbar, falls $\det(A + I) \neq 0$. Daher rechnen wir

$$\det(A+I) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -3+8 = 5 \neq 0.$$

2 Punkte

c) Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -2-\lambda & -4 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 4) = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda = 0,\ 2i,\ -2i \text{ (jeweils mit Multiplizität 1).}$$

2 Punkte

d) Sei $\vec{u} + i\vec{s}$ ein Eigenvektor von $2i$ und sei $\vec{v}$ wie in a). Dann ist die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems nach Formelsammlung

$$x(t) = k_1\vec{v} + k_2(\cos(2t)\vec{u} - \sin(2t)\vec{s}) + k_3(\sin(2t)\vec{u} + \cos(2t)\vec{s})$$

wobei k_1, k_2, k_3 beliebige Konstanten sind. Also sind alle Lösungen beschränkt.

Alternativ, reicht es auch zu begründen, dass alle Eigenwerte λ einfach sind und $\operatorname{Re}\lambda = 0$ haben, und daher alle Lösungen beschränkt sind. 2 Punkte

5. **a)** Der Gradient von f im Punkt $(0,1)$ ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3ye^x(1+x) \\ 3xe^x + 3y^2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{grad} f(0,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten des Gradienten sind die Koeffizienten von x und y in der Gleichung der Tangentialebene. Die Tangentialebene an den Funktionsgraphen im Punkt $(x, y, f(x,y)) = (0,1,1)$ besitzt dann die Gleichung

$$z \;=\; f(0,1) + 3(x-0) + 3(y-1) \quad \Longleftrightarrow \quad z = 3x + 3y - 2\ .$$

3 Punkte

b) Der Ursprung ist ein kritischer Punkt, da $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$.

Um diesen kritischen Punkt zu klassifizieren, müssen wir uns die Hessische Matrix anschauen.

$$\operatorname{Hess} f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 3ye^x(2+x) & 3e^x(1+x) \\ 3e^x(1+x) & 6y \end{pmatrix}.$$

Bei $(0,0)$ haben wir

$$H = \operatorname{Hess} f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

und rechnen $\det H = -9 < 0$, also ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt. 3 Punkte

c) Wir lösen die Gleichung $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$, also haben wir von a)

$$\begin{cases} 3ye^x(1+x) = 0, \\ 3xe^x + 3y^2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ oder } x = -1, \\ xe^x + y^2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0,\ x = 0, \\ x = -1,\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}. \end{cases}$$

Also sind die kritischen Punkte $(0,0)$, $(-1, \frac{1}{\sqrt{e}})$ und $(-1, -\frac{1}{\sqrt{e}})$. 3 Punkte

6. **a)** Der erste Quadrant ist einfach zusammenhängend, also haben wir das Kriterium, nach dem $\vec{M}$ im ersten Quadranten ein Gradientenfeld ist, falls $\frac{\partial}{\partial y}M_1 = \frac{\partial}{\partial x}M_2$ in jedem Punkt des ersten Quadrants. Also rechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial y}M_1 = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}M_2 = \frac{-2(x^2+y^2)+4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

und schlussfolgern dass $\vec{M}$ im ersten Quadranten ein Gradientenfeld ist.

3 Punkte

b) Wir parametrisieren den Einheitskreis durch

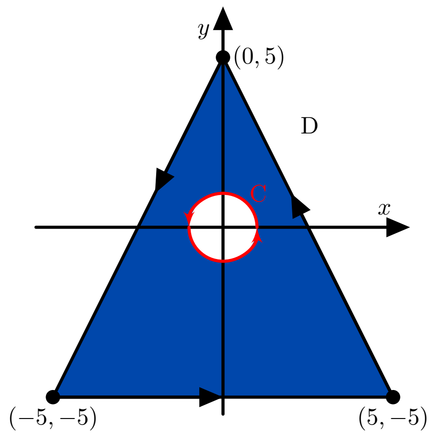
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}, \qquad \text{für } t \in [0, 2\pi].$$

Also berechnen wir das Kurvenintegral als

$$\oint_C \vec{M}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}2\sin t\\ -2\cos t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} dt = -4\pi.$$

3 Punkte

c) Man könnte versuchen die Kurve D zu parametrisieren und dann das Kurvenintegral auf der Hand rechnen. Ein einfacherer Weg ist es zu sehen, dass C in D liegt.



Da im Bereich zwischen den beiden Kurven (blauer Bereich auf dem Bild) $\frac{\partial}{\partial y}M_1 - \frac{\partial}{\partial x}M_2 = 0$, haben wir nach Green und c)

$$\oint_D \vec{M}\, d\vec{r} = \oint_C \vec{M}\, d\vec{r} = -4\pi.$$

3 Punkte

7. **a)** Mit sphärischen Koordinaten $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$ mit $r > 0$, $0 \le \varphi \le \pi$ und $0 \le \theta \le 2\pi$, schreibt sich die Gleichung von S als $r^2 = 2$ und $r\cos\varphi \ge 1$. Also ist $r = \sqrt{2}$ und $\cos\varphi \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Damit ist eine Parametrisierung gegeben durch

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta \\ \sqrt{2}\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{mit } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \text{ und } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

3 Punkte

b) Die Randkurve ist gegeben durch Punkte welche $\theta = \frac{\pi}{4}$ haben in der Parametrisierung von a). Also haben wir

$$\vec{q}(t) = \vec{r}\left(\frac{\pi}{4}, t\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin t\cos\frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2}\sin t\sin\frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 Punkte

c) Wir sehen mit der Parametrisierung $\vec{q}$ in b), dass die Randkurve in die richtige Richtung parametrisiert ist, um Stokes (S) anwenden auf S. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Wirbelfluss} &= \iint_S (\operatorname{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA \overset{(S)}{=} \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

3 Punkte

8. **a)** Die Gleichung identifizieren wir als Wellengleichung mit Länge $L = 1$ und Konstante $c = 1$. Die Randbedingungen sind homogene Dirichlet BC. Aus der Formelsammlung entnehmen wir, dass die Basislösungen

$$u_n(x,t) = \sin(n\pi x)\sin(n\pi t), \quad v_n(x,t) = \sin(n\pi x)\cos(n\pi t),$$

für $n = 1, 2, 3, \dots,$ mit $0 \le x \le 1, t \ge 0$.

Wegen $u(x,0) = 0$ haben wir, dass die Koeffizienten vor v_n in jeder Lösung null sein müssen. Damit haben wir $(u_n)_t(x,0) = n\pi\sin(n\pi x)$, und so sehen wir, dass

$$u(x,t) = 5u_1(x,t) - 2u_3(x,t) = 5\sin(\pi x)\sin(\pi t) - 2\sin(3\pi x)\sin(3\pi t).$$

3 Punkte

b) Die allgemeine Lösung schreibt sich nach Superpositionsprinzip als

$$\widetilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t).$$

Damit haben wir $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n\pi \sin(n\pi x) = \widetilde{u}_t(x,0) = f(x)$ und durch Fourierreihen erhalten wir die $n\pi c_n$ als Koeffizienten der Sinusreihe von f, welche die Formel

$$n\pi c_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx, \ \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots,$$

erfüllen.

Also rechnen wir für $n = 1, 2, 3, \dots$

$$n\pi c_n = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx = \frac{2}{n\pi}\Big[-\cos(n\pi x)\Big]_0^1 = \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 2k, \\ \frac{4}{(2k+1)\pi}, & \text{falls } n = 2k+1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_{2k} = 0, \quad c_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots.$$

Mit allem zusammen erhalten wir also die Lösung

$$\widetilde{u}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)$$

5 Punkte

9. Welche der folgenden Gleichungen erfüllt die Kurve mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 1 + 2\sin t \end{pmatrix}, \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi \text{ ?}$$

(a) $4x^2 + 9(y-1)^2 = 1.$

√ (b) $4x^2 + 9(y-1)^2 = 36.$

(c) $9x^2 + 4(y-1)^2 = 1.$

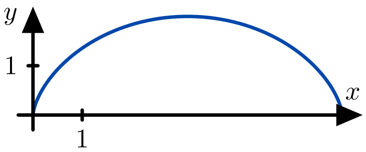
(d) $9x^2 + 4(y-1)^2 = 36.$

Lösung: Wir haben $4x^2 = 36\cos^2 t$ und $9(y-1)^2 = 36\sin^2 t$. Also ist (b) die richtige Antwort.

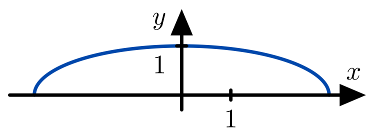
10. Welches ist das Bild der Kurve mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi] \text{ ?}$$

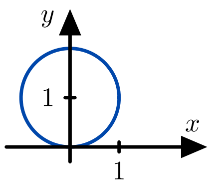
√ (a)



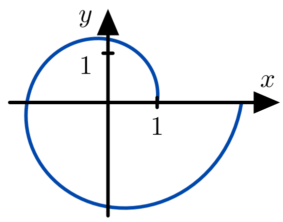
(c)



(b)



(d)



Lösung: Wir erkennen, dass $\vec{r}(0) = \vec{0}$ und $\vec{r}(2\pi) \neq \vec{r}(0)$, also fängt diese Kurve im Ursprung an und ist keine geschlossene Kurve, daher muss es (a) sein. Alternativ sehen wir, dass dies die Parametrisierung eines Teils der Zykloide ist, also muss es (a) sein.

11. Welchen Wert besitzt die Lösung des folgenden Anfangswertproblems zur Zeit $t = 1$?

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}$

(c) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ e \end{pmatrix}$

√ (b) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ e-1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ e-1 \end{pmatrix}$

Lösung: Nach Integration erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 + k_1 \\ e^t + k_2 \end{pmatrix},$$

für beliebige Konstanten k_1, k_2. Die Anfangsbedingungen ergeben

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} k_1 \\ 1 + k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir

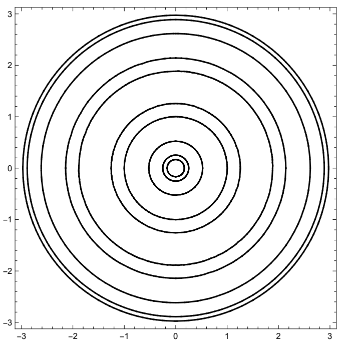
$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ e-1 \end{pmatrix}.$$

12. Welches Bild stellt Niveaulinien der Funktion

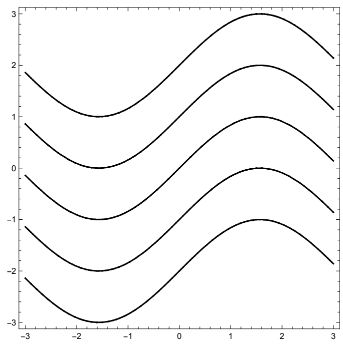
$$f(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$$

dar?

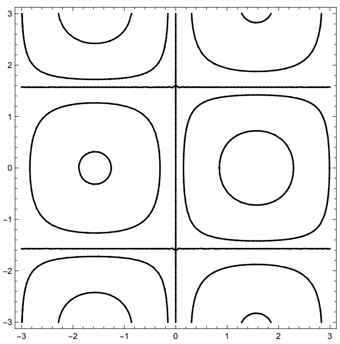
$\checkmark$ (a)



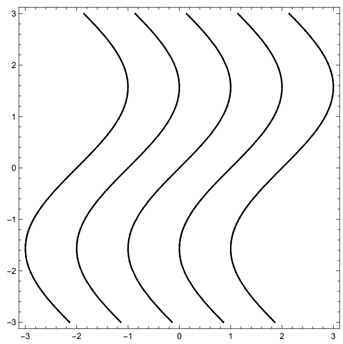
(c)



(b)



(d)



Lösung: Wir sind interessiert an Mengen der Form

$$\begin{aligned} \sin\sqrt{x^2+y^2} = \sin a &\iff \sqrt{x^2+y^2} = a + 2k\pi \text{ oder } \sqrt{x^2+y^2} = \pi - a + 2k\pi \\ &\iff r = a + 2k\pi \text{ oder } r = \pi - a + 2k\pi \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ und r der Radius der Polarkoordinaten. Also sind die Niveaulinien Kreise und damit ist es (a).

13. Die partielle Ableitung in Richtung x von

$$f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{x}$$

ist

(a) $\sin(xy) + \frac{1}{x^2}\cos(xy)$.

(b) $-\sin(xy) - \frac{1}{x^2}\cos(xy)$.

(c) $\frac{y}{x}\sin(xy) + \frac{1}{x^2}\cos(xy)$.

√ (d) $-\frac{y}{x}\sin(xy) - \frac{1}{x^2}\cos(xy)$.

Lösung: Wir rechnen

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(\cos(xy)) + \cos(xy)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{y}{x}\sin(xy) - \frac{1}{x^2}\cos(xy).$$

14. Sei $f(x,y)$ eine Funktion mit

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = e^{y^2} \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = (1+2xy)e^{y^2}.$$

Was ist die Ableitung der Verkettung

$$g(t) = f\Big(x(t), y(t)\Big),$$

wobei $x(t)$ und $y(t)$ differenzierbare Funktionen sind?

√ (a) $g'(t) = e^{(y(t))^2}\,(\dot{x}(t) + \dot{y}(t) + 2x(t)y(t)\dot{y}(t))$.

(b) $g'(t) = e^{(y(t))^2}\,(x(t) + y(t) + 2x(t)y(t)\dot{y}(t))$.

(c) $g'(t) = e^{(\dot{y}(t))^2}\,(2 + 2x(t)\dot{y}(t))$.

(d) $g'(t) = e^{(\dot{y}(t))^2}\,(\dot{x}(t) + \dot{y}(t) + 2)$.

Lösung: Nach Kettenregel haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f\Big(x(t), y(t)\Big) &= \dot{x}(t)\,\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\bigg|_{(x(t),y(t))} + \dot{y}(t)\,\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\bigg|_{(x(t),y(t))} \\ &= e^{(y(t))^2}\left(\dot{x}(t) + \dot{y}(t) + 2x(t)y(t)\dot{y}(t)\right). \end{aligned}$$

15. Der Definitionsbereich der Funktion,

$$f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2),$$

ist

√ (a) beschränkt und offen.

(b) beschränkt und nicht offen.

(c) unbeschränkt und offen.

(d) unbeschränkt und nicht offen.

Lösung: Der Ausdruck macht Sinn falls $1-x^2-y^2 > 0$ weil das Argument von ln positiv sein muss. Also ist der Definitionsbereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ und dies ist ein offenes, beschränkte Gebiet.

16. Was ist die Masse des parabelförmigen Drahtes

$$x = y^2, \quad 0 \le y \le 1,$$

mit der Dichtefunktion

$$f(x,y) = \sqrt{1+4x}\ ?$$

(a) 1.

(b) $\frac{4}{3}$.

√ (c) $\frac{7}{3}$.

(d) 5.

Lösung: Eine Parametrisierung ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 1, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix},\ |\dot{r}(t)| = \sqrt{1+4t^2}$$

und so erhalten wir

$$\int_0^1 f(\vec{r}(t))\, |\dot{r}(t)|\, dt = \int_0^1 (1+4t^2)\, dt = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}.$$

17. Welches ist die Polargleichung der Kurve

$$x = y^2,\ y > 0\,?$$

(a) $r = \cos\theta - \sin^2\theta,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}.$ ✓

(b) $r = \sin^2\theta - \cos\theta,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}.$

(c) $r = \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta},\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}.$

(d) $r = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta},\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}.$

Lösung: In Polarkoordinaten $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ erhalten wir

$$\sin\theta > 0, \cos\theta > 0, r\cos\theta = r^2\sin^2\theta.$$

Die ersten beiden Ungleichungen ergeben $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Die letzte Gleichung ergibt

$$r = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

18. Was ist die Steigung der Kurve

$$x^3y + xy^2 + y^5 = 3$$

im Punkt $(x, y) = (1, 1)$?

(a) $-2.$

✓ (b) $-\dfrac{1}{2}.$

(c) $\dfrac{1}{2}.$

(d) $2.$

Lösung: Für $F(x, y) = x^5 + xy^3 + x^2y$ wissen wir mit dem Satz der impliziten Funktion, dass die Steigung der Kurve $F(x, y) = 3$ an einem Punkt (x, y) gegeben ist durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = -\frac{3x^2y + y^2}{x^3 + 2xy + 5y^4}.$$

Für $(x, y) = (1, 1)$ haben wir dann

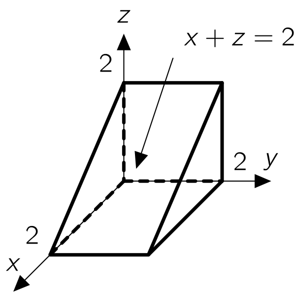
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3+1}{2+1+5} = -\frac{1}{2}.$$

19. Wir betrachten ein Integral der Form

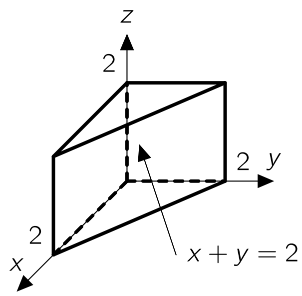
$$\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^2 f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Welches ist das entsprechende Integrationsgebiet?

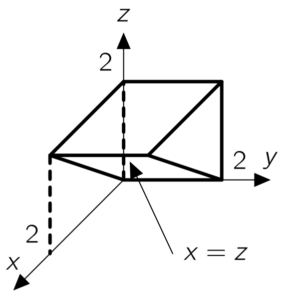
(a)



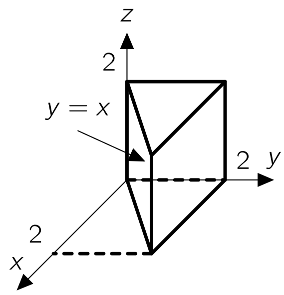
√ (c)



(b)



(d)



Lösung: Die Ausdrücke für die Bilder sind:

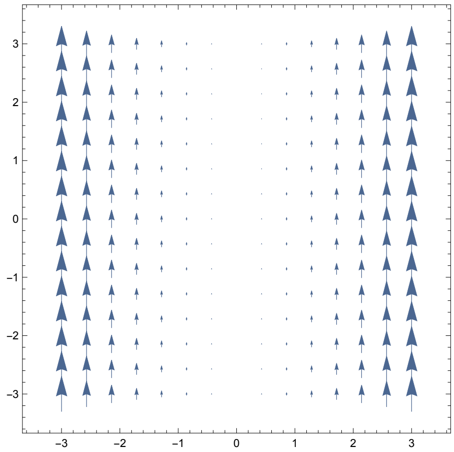
$$(a) \qquad \int_0^2 \int_0^2 \int_0^{2-x} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

$$(b) \qquad \int_0^2 \int_0^2 \int_x^2 f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

$$(c) \qquad \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^2 f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

$$(d) \qquad \int_0^2 \int_x^2 \int_0^2 f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

20. Welches Vektorfeld passt zu dieser Zeichnung?



√ (a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$. (b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$. (c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. (d) $\vec{F} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.

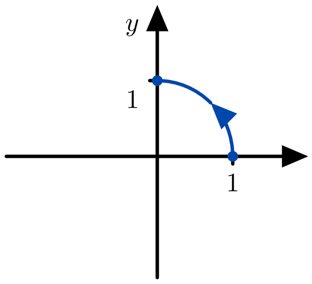
Lösung: Das Vektorfeld ist vertikal ($F_1 = 0$), also muss es (a) sein.

21. Wir betrachten das Vektorfeld der Aufgabe 6,

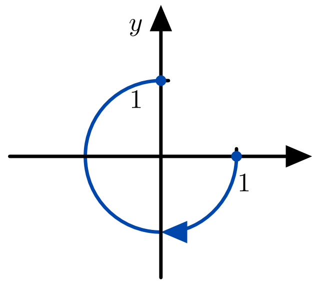
$$\vec{M}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{-2x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Die Kurvenintegrale von $\vec{M}$ entlang drei der folgenden vier abgebildeten Kurven vom Punkt $(1,0)$ nach $(0,1)$ sind gleich. Für welche Kurve ist das Kurvenintegral nicht gleich dem der anderen Kurven?

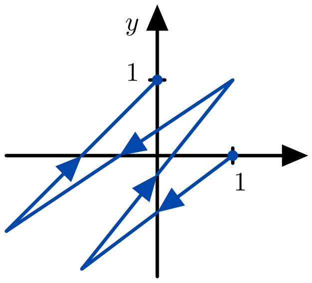
(a)



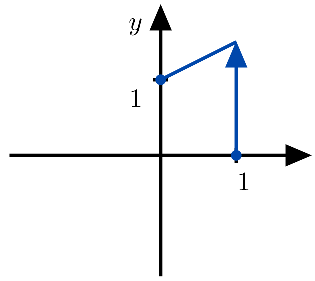
√ (c)



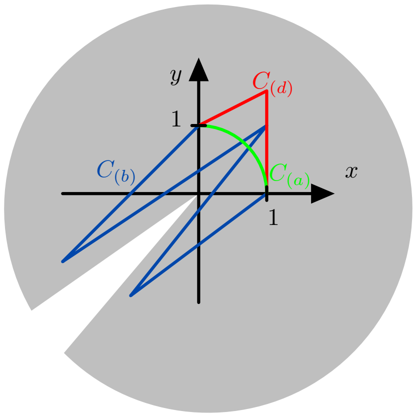
(b)



(d)



Lösung: Wir nennen die Kurven in (a), (b), (c) und (d), $C_{(a)}$, $C_{(b)}$, $C_{(c)}$ und $C_{(d)}$. Nach Aufgabe 6 c) haben wir $\int_{C_{(a)}} \vec{M}\, d\vec{r} - \int_{C_{(c)}} \vec{M}\, d\vec{r} = -4\pi \neq 0$. Des Weiteren sehen wir dass $C_{(a)}$, $C_{(b)}$ und $C_{(d)}$ in einem einfachzusammenhängenden Gebiet $\left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 3, -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{6}\right\}$ (grau auf dem Bild) liegen. Also sind die Kurvenintegrale über $C_{(a)}$, $C_{(b)}$ und $C_{(d)}$ gleich nach Hauptsatz des Kurvenintegrals und Aufgabe 6 a).



y
$C_{(d)}$
1
$C_{(b)}$
$C_{(a)}$
x
1

22. Was ist der Wert der ungeraden 4−periodischen Fortsetzung von

$$f(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

and der Stelle $x = 3$?

(a) -9. ✓ (b) -1. (c) 1. (d) 9.

Lösung: Wir haben $f(3) = f(-1) = -f(1) = -1$ wegen erstens Periodizität und zweitens der ungeraden Fortsetzung für $-2 \leq x \leq 2$.

23. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = u.$$

Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)Y(y)$ zerfällt diese PDE in ein System von ODE's für $X(x)$ und $Y(y)$ in Abhängigkeit von einem Parameter $k \in \mathbb{R}$. Welches System?

(a) $X'' - kX = 0$ und $Y'' - kY = 0$.

(b) $X'' - kX = 0$ und $Y'' + kY = 0$.

(c) $X'' - kX = 0$ und $Y'' + (1-k)Y = 0$.

✓ (d) $X'' - kX = 0$ und $Y'' + (k-1)Y = 0$.

Lösung: Einsetzen des Ansatzes $u(x,t) = X(x)Y(y)$ führt zu $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = X(x)Y(y)$. Diese PDE lässt sich separieren zu

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = 1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = k$$

für eine reelle Konstante k, da die eine Seite der Gleichung nur von x abhängt und die andere nur von y. Dies führt dann zu den ODE's

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad \text{und} \quad Y''(y) + (k-1)Y(y) = 0.$$

24. Sei $\mathcal{F}(x)$ das Fourier-Integral von

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{falls } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welches ist der Wert von $\mathcal{F}(x)$ im Ursprung?

(a) 0.

√ (b) $\frac{1}{2}$.

(c) 1.

(d) $\mathcal{F}(0)$ ist nicht definiert.

Lösung: Es gilt, dass in den Sprungstellen von f, das Fourier-Integral gleich dem arithmetischen Mittel der beiden einseitigen Grenzwerte ist. Also ist

$$\mathcal{F}(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$