Musterlösung zur Prüfung Mathematik I HS 18

1. **a)** Wir bestimmen das charakteristische Polynom von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda - 3).$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Diese sind

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \text{ und } \lambda_3 = 3.$$

b) *Lösung 1:* Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante nicht Null ist. Die Determinante ist gleich dem Produkt der Eigenwerte. Wir haben also

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 \cdot (-1) \cdot 3 = -3 \neq 0.$$

Also ist A invertierbar.

Lösung 2: Wir können direkt das Inverse von A berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}-\text{II}]{\text{III}-2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}\text{III}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}+2\text{III}]{\text{II}-2\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Also ist

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

und A ist somit invertierbar.

c) Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$:

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -1$:

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 3$:

$$\ker(A - \lambda_3 I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

2. **a)** Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung

$$2y'' - 2y' + y = 0$$

ist gegeben durch

$$0 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Mit Hilfe der Mitternachtsformel können wir die Nullstellen dieses Polynoms bestimmen. Es gilt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}.$$

Wir haben zwei zueinander komplex konjugierte Nullstellen. Die allgemeine Lösung der DGL ist also gegeben durch

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x} \left(k_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + k_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

mit Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

b) Es gilt

$$y'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \left((k_1 + k_2) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + (k_2 - k_1) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right).$$

Die Konstanten k_1 und k_2 können wir nun mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen. Es gelten

$$y(0) = k_1 = 1 \text{ und } y'(0) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 \Rightarrow k_2 = 1.$$

Also erhalten wir als Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

3. Sei $A := \int_0^\pi \cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$. Um das Integral zu lösen, integrieren wir zwei Mal partiell:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{A}{16}. \end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch die Gleichung

$$A = -\frac{1}{8} + \frac{A}{16}$$

lösen. Es gilt $\frac{15}{16}A = -\frac{1}{8} \Rightarrow A = -\frac{2}{15}$.

4. *Lösung 1:* Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist das Differentialgleichungssystem (DGLs) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Um dieses DGLs zu lösen, berechnen wir zunächst die Eigenwerte von A. Die charakteristische Gleichung ist gegeben durch

$$0 = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda)+1 = \lambda^2-2\lambda+1 = (\lambda-1)^2.$$

Wir haben also den doppelten Eigenwert $\lambda = 1$. Bestimmen wir nun die dazugehörigen Eigenvektoren:

$$\ker(A - \lambda I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Sei $\vec{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Koeffizientenmatrix A ist nicht diagonalisierbar. Darum müssen wir nun einen Hauptvektor $\vec{w}$, d.h. einen Vektor mit der Eigenschaft

$$(A - \lambda I)\vec{w} = \vec{v}$$

bestimmen. Wir können zum Beispiel $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen. Die allgemeine Lösung ist also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_1 e^t \vec{v} + k_2 e^t (t\vec{v} + \vec{w}) = k_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 e^t \left(\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

mit Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Die Konstanten k_1 und k_2 bestimmen wir nun mit Hilfe der Anfangswerte. Es gilt

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also $k_1 + k_2 = 0$ und $1 = -k_1$. Wir erhalten also $k_1 = -1$ und $k_2 = 1$. Somit ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t(1-t) \end{pmatrix}.$$

Lösung 2: Leiten wir die zweite Gleichung $\dot{y} = -x$ einmal nach t ab, so erhalten wir

$$\ddot{y} = -\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = -\ddot{y}.$$

Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$-\ddot{y} = 2x + y \Rightarrow -\ddot{y} = -2\dot{y} + y \Rightarrow \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser DGL ist gegeben durch

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Es hat 1 als doppelte Nullstelle. Also ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Leiten wir einmal nach t ab, erhalten wir

$$\dot{y}(t) = C_1 e^t + C_2 e^t + C_2 t e^t.$$

Setzen wir dieses Resultat in die zweite Gleichung ein, erhalten wir

$$\dot{y} = -x \Rightarrow x(t) = -(C_1 + C_2 + C_2 t) e^t.$$

Nun können wir noch die Anfangswerte einsetzen. Es gilt

$$1 = y(0) = C_1 \text{ und } 0 = x(0) = -C_1 - C_2.$$

Also ist $C_1 = 1$ und $C_2 = -1$. Damit ist die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t e^t \\ e^t(1-t) \end{pmatrix}.$$

5. Richtig ist b). Es gilt $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1-x)$. Die kritischen Punkte in $[0,2]$ sind also $x = 0$ und $x = 1$. Ausserdem müssen wir noch überprüfen, ob der andere Randpunkt allenfalls das Maximum von f auf $[0,2]$ ist. Es gilt

$$\max f = \max\{f(0), f(1), f(2)\} = \max\{4, 5, 0\} = 5.$$

6. Richtig ist b). a) ist surjektiv aber nicht injektiv, denn jeder Wert in $[0,1]$ liegt im Wertebereich der Funktion, aber $\frac{1}{2}$ wird von der Funktion mehrmals angenommen. b) ist bijektiv, also invertierbar. c) ist weder surjektiv noch injektiv, denn 0 ist nicht im Wertebereich der Funktion und $\frac{1}{2}$ wird zwei Mal angenommen. d) ist weder surjektiv noch injektiv, denn 0 ist nicht im Wertebereich und $\frac{1}{2}$ wird von der Funktion mehrmals angenommen.

7. Richtig ist c). *Lösung 1:* Mit Hilfe der Regel von Bernoulli de l'Hôpital bestimmen wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)}{2\cos^2(x)-2\sin^2(x)} = 1.$$

Lösung 2: Es gilt $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Also erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)} \geq \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^6}{6}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1-\frac{x^4}{6}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1-\frac{x^4}{6} = 1.$$

Ausserdem gilt

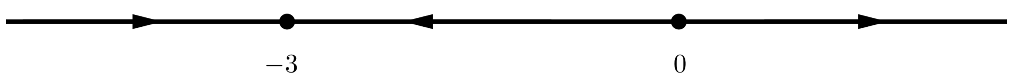
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)} &\leq \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2-\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{36}} = \frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{36}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{36}} = 1.\end{aligned}$$

Mit der Sandwich-Regel gilt also $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)} = 1$.

8. Richtig ist a). Es gilt

$$\frac{-1+3i}{i+1} = \frac{(-1+3i)(-i+1)}{(i+1)(-i+1)} = \frac{-1-3i^2+4i}{1-i^2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i.$$

9. Richtig ist d). *Lösung 1:* Für $y < -3$ ist $y' > 0$, für $-3 < y < 0$ ist $y' < 0$ und für $0 \leq y$ ist $y' > 0$. Also sieht die Phasenlinie wie folgt aus:



Wir sehen, dass 0 ein instabiler Gleichgewichtspunkt ist. Ist also $0 < y(1)$, so gilt $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$. In a), b) und c) ist jeweils $0 < y(1)$. Allerdings gelten in a)

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{e^{-3x}+1} = 3 \neq \infty,$$

in b)

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{e^{3x}-1} = 0 \neq \infty,$$

und in c)

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{e^{3x}+1} = 0 \neq \infty.$$

Also können wir die Antworten a), b) und c) ausschliessen und somit ist d) richtig.

Lösung 2: Wir leiten ab und verifizieren so, dass d) tatsächlich die richtige Lösung ist. Es gelten

$$\frac{d}{dx}\frac{3}{e^{-3x}-1} = \frac{9e^{-3x}}{(e^{-3x}-1)^2}$$

und

$$y(y+3) = \frac{3}{e^{-3x}-1}\left(\frac{3}{e^{-3x}-1}+3\right) = \frac{3}{e^{-3x}-1}\left(\frac{3e^{-3x}}{e^{-3x}-1}\right) = \frac{9e^{-3x}}{(e^{-3x}-1)^2}.$$

10. Richtig ist b). Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus bringen wir die Matrix A auf Stufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II-I, III-2I}]{\text{IV-3I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV-2II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{IV vertauschen mit III}]{-\frac{1}{2}\text{IV}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der führenden Einsen in der Stufenform ist 3. Also ist der Rang 3.

11. Richtig ist c). Damit die Vektoren linear unabhängig sind, muss jeweils die Determinante der Matrix mit den zwei Vektoren als Spalten ungleich 0 sein. In a) haben wir

$$\det\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0.$$

In b) haben wir

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix} = 1 + \cos^2(\theta) > 0.$$

In d) haben wir

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \sin(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix} = 1 - \sin(\theta)\cos(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) > 0.$$

Und in c) haben wir

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 1 \end{pmatrix} = 1 - \sin^2(\theta) = 0 \text{ für } \theta = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Tatsächlich sind die Vektoren in c) linear abhängig, wenn $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. Richtig ist a). *Lösung 1:* Zum Beispiel im Punkt $(x, y) = (3, 3)$ haben wir

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 12 \\ \dot{y}(t) &= -6. \end{aligned}$$

Diesen Vektor haben wir aber nur im Bild a). In allen anderen Bildern geht der Vektor in eine falsche Richtung.

Lösung 2: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen wir nun die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - 3 = \lambda^2 + 2\lambda - 6.$$

Mit Hilfe der Mitternachtsformel erhalten wir die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2} = -1 \pm \sqrt{7}.$$

Bestimmen wir nun die zugehörigen Eigenvektoren. Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1 + \sqrt{7}$:

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 2-\sqrt{7} & 3 \\ 1 & -2-\sqrt{7} \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2-\sqrt{7} & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2+\sqrt{7} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -1 - \sqrt{7}$:

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{pmatrix} 2+\sqrt{7} & 3 \\ 1 & -2+\sqrt{7} \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2+\sqrt{7} & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2-\sqrt{7} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Mit Hilfe von S. 251 im Mathe I-Skript sehen wir, dass a) die richtige Lösung ist.
