ETH Zürich
Dr. Ana Cannas

Sommer 2016

Musterlösung zur Basisprüfung Mathematik II

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

1. **a)** Es ergibt sich für die partiellen Ableitungen nach x und y:

$$f_x(x, y) = 2y - 2 \text{ und } f_y(x, y) = 2x + 2y.$$

Der Gradient von f lautet somit

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y - 2 \\ 2x + 2y \end{pmatrix}.$$

b) Die kritischen Punkte von f sind diejenigen Punkte (x, y), für die $\nabla f(x, y) = 0$ ist, also die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} 2y - 2 &= 0, \\ 2x + 2y &= 0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $y = 1$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, ergibt sich $x = -1$. Eine Probe zeigt, dass $(-1, 1)$ eine Lösung des obigen Gleichungssystems ist.

Zur Klassifizierung des einzigen kritischen Punktes $(-1, 1)$ ziehen wir die Hesse-Matrix Hess_f von f heran. Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f gilt:

$$f_{xx}(x, y) = 0, \; f_{xy}(x, y) = 2 = f_{yx}(x, y), \; f_{yy}(x, y) = 2.$$

Damit lautet die Hesse-Matrix von f an jedem Punkt (x, y) und insbesondere auch in $(-1, 1)$:

$$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante der Hesse-Matrix im kritischen Punkt $(-1, 1)$ den Wert -4 hat und damit negativ ist, ist $(-1, 1)$ ein Sattelpunkt.

c) Da das gegebene Dreieck D kompakt und f stetig ist, gibt es (mindestens) eine Maximumstelle. Falls sich diese im Inneren des Dreiecks befindet, ist sie ein kritischer Punkt. Der einzige kritische Punkt von f ist nach der vorigen Teilaufgabe jedoch $(-1, 1)$ und der liegt nicht im betrachteten Dreieck. Daher muss das Maximum von f auf dem Dreieck in einem Randpunkt angenommen werden. Im Folgenden untersuchen wir das Verhalten von f auf den drei Liniensegmenten, die den Rand des Dreiecks D bilden:

- Auf dem (vertikalen) Segment von $(0, 0)$ nach $(0, 1)$ hat f den Verlauf

  $$f(0, y) = y^2,$$

  was für $0 \leq y \leq 1$ maximal ist bei $y = 1$ (was dem Punkt $(0, 1)$ entspricht, $f(0, 1) = 1$).

- Auf dem (horizontalen) Segment von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ lautet f

  $$f(x, 0) = -2x,$$

  was für $0 \leq x \leq 1$ für $x = 0$ maximal ist (entspricht $(0, 0)$, $f(0, 0) = 0$).

- Auf dem (schrägen) Segment von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$ hat f die Werte

  $$f(x, 1 - x) = 2x(1 - x) + (1 - x)^2 - 2x = 1 - 2x - x^2,$$

  wobei $0 \leq x \leq 1$. Dies wird in diesem Parameterbereich maximal für $x = 0$, was man an der Monotonie von $x^2 + 2x$ für positives x oder auch an der Darstellung

  $$1 - 2x - x^2 = -(x + 1)^2 + 2$$

  sehen kann. ($x = 0$ entspricht dem Punkt $(0, 1)$ mit $f(0, 1) = 1$.)

Ein Vergleich der Maxima auf den Kanten des Dreiecks zeigt, dass der maximale Wert von f auf dem Dreieck D 1 beträgt (und dieser Wert einzig und allein im Punkt $(0, 1)$ angenommen wird).

d) Die Parametrisierung des Dreiecks als

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

führt auf den Integralausdruck

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy + y^2 - 2x) \, dy \, dx.$$

<u>Alternativ</u> liefert die Parametrisierung

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; 0 \leq y \leq 1, \; 0 \leq x \leq 1 - y\}$$

dagegen den Ausdruck

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} (2xy + y^2 - 2x)\, dx\, dy.$$

2. **a)** Mit der Beziehung $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ zwischen kartesischen und Polarkoordinaten erhält man die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) \\ e^{-t}\sin(t) \end{pmatrix},\ 0 \le t \le \pi$$

für die Trajektorie des Teilchens.

b) Die Geschwindigkeit des Teilchens ergibt sich als Ableitung der Bahnkurve nach der Zeit:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \\ -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Die Tangente an die Bahnkurve ist genau dann horizontal, wenn die y-Komponente des Geschwindigkeitsvektors verschwindet, d.h. wenn

$$0 = -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) = e^{-t}\big(\cos(t) - \sin(t)\big).$$

Da $e^{-t} > 0$ für jedes t, ist dies äquivalent zu $\cos(t) = \sin(t)$, was für $t \in [0, \pi]$ genau bei $t = \frac{\pi}{4}$ eintritt. Der Zeit $t = \frac{\pi}{4}$ entspricht der Punkt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

auf der Bahnkurve.

c) Für eine Potentialfunktion f zu $\vec{F}$ muss gelten:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2+y^2} + 1. \end{cases}$$

Integration der ersten Gleichung (nach x bei beliebigem, aber fixem y) liefert, dass

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + g_1(y),$$

wobei $g_1(y)$ eine höchstens von y abhängige Funktion ist. Integration der zweiten Gleichung (nach y bei beliebigem, aber fixem x) ergibt

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + y + g_2(x).$$

Somit ist $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + y + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. *Jede Wahl von $c \in \mathbb{R}$ ist als vollständige Antwort gültig.*

d) Da $\vec{F}$ ein Gradientenfeld mit Potentialfunktion $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + y$ ist, ist die von $\vec{F}$ entlang eines Weges verrichtete Arbeit lediglich von den Endpunkten des Weges abhängig ist, ergibt sich:

$$W = f(-e^{-\pi}, 0) - f(1, 0) = \ln(e^{-2\pi}) - \ln(1) = -2\pi.$$

3. a) In Zylinderkoordinaten lautet die Parametrisierung

$$\vec{q}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ r^2 - 1 \end{pmatrix}, \ 0 \leq r \leq 1, \ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

b) Zur Berechnung des Flächeninhalts benötigen wir das Volumenelement. Dies ergibt sich aus

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\theta) \\ -2r^2\sin(\theta) \\ r \end{pmatrix}$$

und

$$\left| \frac{\partial \vec{q}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial \theta} \right| = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

Somit ist der Inhalt A der Paraboloidstücks S gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1}\, d\theta\, dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\, dr \\ &= 2\pi \Big[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{6}\Big(5\sqrt{5} - 1\Big). \end{aligned}$$

c) Gemäß dem Satz von Stokes ist der Wirbelfluss eines Vektorfeldes $\vec{F}$ von unten nach oben durch S, also

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA,$$

wobei $\vec{n}$ den nach oben zeigenden Einheitsnormalenvektor von S bezeichne, gleich der Zirkulation von $\vec{F}$ entlang der (bzgl. $\vec{n}$ positiv orientierten) Randkurve C von S, welche in diesem Fall durch

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ 0 \leq t < 2\pi$$

parametrisiert werden kann. Diese Zirkulation berechnen wir nun:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}\sin(t)-0\\ e^0-\cos(t)\\ \cos(t)-e^{\sin(t)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 0\end{pmatrix} dt\\ &= \int_0^{2\pi}\big(-\sin^2(t)+\cos(t)-\cos^2(t)\big)\,dt = \int_0^{2\pi}\big(\cos(t)-1\big)\,dt\\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

4. **a)** Eine stationäre Lösung der Wellengleichung auf dem Intervall $[0,1]$ mit den gegebenen inhomogenen Dirichletrandbedingungen ist eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} u''(x) &= 0, \quad x\in(0,1),\\ u(0) &= 0,\\ u(1) &= 1, \quad . \end{cases}$$

Eine Lösung von $u''=0$ hat die Form

$$u(x) = Ax+B$$

mit reellen Konstanten $A, B\in\mathbb{R}$. $u(0)=0$ und $u(1)=1$ gelten zusätzlich genau dann, wenn $A=1$ und $B=0$. Somit ist die eindeutige Lösung $u^*(x)$ des obigen Randwertproblems gegeben durch $u^*(x)=x$.

b) Für $v(x,t)=u(x,t)-u^*(x)$ gilt:

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) &= u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) = v_{xx}(x,t) + \underbrace{u^*_{xx}(x)}_{=0}, & 0\le x\le 1,\\ v(0,t) &= u(0,t)-u^*(0) = 0-0 = 0, & t\ge 0,\\ v(1,t) &= u(1,t)-u^*(1) = 1-1 = 0, & t\ge 0,\\ v(x,0) &= u(x,0)-u^*(x) = f(x)-u^*(x) = f(x)-x, & 0\le x\le 1,\\ v_t(x,0) &= u_t(x,0)-0 = g(x), & 0\le x\le 1. \end{cases}$$

Es löst u auch genau dann das Problem aus der Aufgabenstellung, wenn v dieses Problem löst.

c) Gemäß dem vorigen Aufgabenteil ist die Lösung gegeben durch $v(x,t)+x$, wobei v das Problem

$$\begin{cases} v_{tt} &= v_{xx}, & 0\le x\le 1,\\ v(0,t) &= 0, & t\ge 0,\\ v(1,t) &= 0, & t\ge 0,\\ v(x,0) &= -\sin(3\pi x), & 0\le x\le 1,\\ v_t(x,0) &= 0, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

löst. Die Basislösungen für die Wellengleichung auf $(0,1)$ mit Dirichletrandbedingungen lauten

$$\sin(n\pi x)\cos(n\pi t),\ n = 1,2,\dots,$$
$$\sin(n\pi x)\sin(n\pi t),\ n = 1,2,\dots.$$

Die allgemeine Lösung hat demgemäß die Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\big(A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)\big)$$

Beim Anpassen dieser allgemeinen Lösung an die Anfangsbedingungen ergibt sich aus der Bedingung $v_t(x,0) = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) B_n n = 0,$$

d.h. die B_n verschwinden. Die Lösung $v(x,t)$ des Problems ist also von der Form

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi t).$$

Die Anfangsbedingung $v(x,0) = -\sin(3\pi x)$ liefert

$$-\sin(3\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$A_n = \begin{cases} -1, & n = 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich ist

$$v(x,t) = -\sin(3\pi x)\cos(3\pi t)$$

und die gesuchte Lösung lautet

$$u(x,t) = x - \sin(3\pi x)\cos(3\pi t).$$

5. 5.1 Die korrekte Antwort ist (d).

Der Graph von $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 1$ kann als Kurve mit der Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

aufgefasst werden. Der Geschwindigkeitsvektor ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix},$$

woraus sich als Bogenlänge der Ausdruck

$$\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

ergibt.

5.2 Die korrekte Antwort is (D).
Das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{4})$ ist gegeben durch

$$f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)(y-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2+f_{xy}(0,0)x(y-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}f_{yy}(0,0)(y-\frac{\pi}{4})^2,$$

wobei

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \tan(y), \quad & f_{xx}(x,y) &= 0, \\ f_y(x,y) &= \frac{x}{\cos^2(y)}, \quad & f_{yy}(x,y) &= \frac{2x\sin(y)}{\cos^2(y)}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{1}{\cos^2(y)}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f_x(0,\frac{\pi}{4}) &= 1, \quad & f_{xx}(0,\frac{\pi}{4}) &= 0 \\ f_y(0,\frac{\pi}{4}) &= 0, \quad & f_{yy}(0,\frac{\pi}{4}) &= 0 \\ f_{xy}(0,\frac{\pi}{4}) &= 2. \end{aligned}$$

Somit ist das gesuchte Taylorpolynom gegeben durch

$$x + 2x(y-\frac{\pi}{4}) = x - \frac{\pi}{2}x + 2xy.$$

5.3 Die korrekte Antwort ist (a).
Die implizite Differentiation besagt, dass in einem Punkt (x_0, y_0)

$$x'(y_0) = -\frac{f_y(x_0,y_0)}{f_x(x_0,y_0)}.$$

Für $f(x,y) := \ln(x+y) + x^2y + x + y$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1}{x+y} + 2xy + 1 \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{x+y} + x^2 + 1. \end{aligned}$$

Bei $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ist also

$$f_x(1,0) = 2 \text{ und } f_y(1,0) = 3$$

und somit nach dem oben erwähnten Resultat über implizite Differentiation

$$x'(0) = -\frac{3}{2}.$$

5.4 Die korrekte Antwort ist (b).

Da $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$, ist die erste Bedingung äquivalent zu $1 \leq \varrho \leq \sqrt{3}$. Da $z = \varrho\cos(\varphi)$ und $\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho\sin(\varphi)$, ist die zweite Bedingung äquivalent zu $\cos(\varphi) < -\sin(\varphi)$ ($\varphi \in [0, \pi]$). Das heißt, $\varphi \in (\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

5.5 Die korrekte Antwort ist (c).

Auf den Gebieten A, B und D ist die Funktion

$$\frac{y^3}{3} - \arctan\left(\frac{x}{z}\right)$$

ein Potential für $\vec{F}$.

Auf C kann $\vec{F}$ hingegen kein Gradientenfeld sein, weil es geschlossene Wege gibt, entlang welcher $\vec{F}$ ein nicht verschwindendes Wegintegral hat. Betrachte z.B. die Kurve, gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(t) \\ 0 \\ \sqrt{3}\sin(t) \end{pmatrix}, \; 0 \leq t < 2\pi.$$

Man rechnet nach, dass sie in C enthalten ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}\sin(t)}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}\cos(t)}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\sin(t) \\ 0 \\ \sqrt{3}\cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

5.6 Die korrekte Antwort ist (b).

Die π-periodische Fourierreihe stellt die π-periodische Fortsetzung der Funktion dar und konvergiert punktweise gegen ebendiese in mindestens all den Punkten, an denen sie stetig differenzierbar ist. Damit konvergiert die π-periodische Fourierreihe von $f(x) = x^2 - \pi x$ an der Stelle $\frac{3\pi}{2}$ gegen den Wert der π-periodischen Fortsetzung von f an der Stelle $\frac{3\pi}{2}$. Dies ist aber wegen der Periodizität nichts anderes als

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}.$$