D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 16
Dr. Ana Cannas

# MC-Serie 1

## Wiederholung von Vektoren und Koordinatengleichungen

**Einsendeschluss: 4. März 2016, 16 Uhr (MEZ)**

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

**1.** Welche Gleichung stellt die Gerade in der Ebene durch den Punkt $(3,-1)$ und senkrecht zur Geraden $y = 2x$ dar?

(a) $2x - y = 1.$

$\surd$ (b) $x + 2y = 1.$

(c) $x - 2y = 5.$

(d) $2x + y = 5.$

Da die gesuchte Gerade senkrecht zu $y = 2x$ ist, muss die Steigung $-\frac{1}{2}$ sein. Desweiteren muss die Gerade durch den Punkt $(3,-1)$ verlaufen und ist somit gegeben durch

$$(y - (-1)) = -\frac{1}{2}(x - 3).$$

Umformen dieser Gleichung liefert $x + 2y = 1$.

**2.** Das Kreuzprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ der Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ist

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\surd$ (d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Man berechnet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

**3.** Was ist der Winkel zwischen folgenden Vektoren?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Hinweis:* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos(\theta)$.

(a) $\frac{\pi}{3}$.

(b) $\frac{\pi}{2}$.

(c) $\arccos\left(\frac{1}{36}\right)$

√ (d) $\arccos\left(\frac{1}{6}\right)$.

Dazu verwenden wir die Eigenschaft des Skalarproduktes

$$u \cdot v = |u|\,|v| \cdot \cos\varphi,$$

wobei $\varphi$ den Winkel zwichen $u$ und $v$ bezeichnet (mit genau dieser Reihenfolge). Wir berechnen

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 1 = 1 \\ |u| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \\ |v| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

und somit ist

$$u \cdot v = 1 = 6 \cdot \cos\varphi, \quad \text{also} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{1}{6}\right).$$

**4.** Welche Gleichung stellt eine Ebene senkrecht zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und durch $(1, 1, 1)$ dar?

(a) $x + y + z = 3$.

√ (b) $x + 2y + 3z = 6$.

(c) $x + y - z = 1$.

(d) $2x - y = 1$.

Punkte, die in dieser Ebene liegen, müssen folgende Gleichung erfüllen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit ist diese Ebene gegeben durch $x + 2y + 3z = 1 + 2 + 3 = 6$.

**5.** Welcher ist ein Vektor, der parallel zur Schnittgeraden der beiden Ebenen

$$x + 2y - 4z = 7 \quad \text{und} \quad 2x - 3y + 4z = 1$$

ist?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

√ (b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Eine Ebene $ax + by + cz = d$ beschreibt alle Punkte, die senkrecht zu $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sind und durch einen bestimmten Aufhängepunkt verlaufen. Also suchen wir einen Vektor, der sowohl senkrecht zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht. Ein solcher Vektor wird genau durch das Vektorprodukt der beiden Vektoren beschrieben, das heisst

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - (-4) \cdot (-3) \\ (-4) \cdot 2 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 12 \\ -8 - 4 \\ -3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere erfüllt auch der Vektor $-\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$ diese Bedingung.

**6.** Welche Eigenschaft erfüllt das Kreuzprodukt **nicht**?

√ (a) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$

(b) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

(c) $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$

(d) $(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$, wobei $k$ eine reelle Zahl ist.

Es gilt $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

**7.** Seien

$$P = (1,1,1),\ Q = (1,3,4),\ \text{und } R = (2,1,2).$$

Wie lautet der Vektor $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$?

√ (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es gilt

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für das Kreuzprodukt:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**8.** Was ist der Flächeninhalt des Dreiecks mit den drei Punkten $P$,$Q$ und $R$ aus der vorigen Aufgabe als Ecken?
*Zur Erinnerung:* $|\vec{u} \times \vec{v}|$ entspricht der Fläche des Parallelogramms, das von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird.

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

√ (d) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

Das Dreick mit den Eckpunkten $P$, $Q$ und $R$ hat genau einen halb so großen Flächeninhalt wie das von den Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ aufgespannte Parallelogramm. Somit ergibt sich als Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{4+9+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

**9.** Welcher der folgenden Vektoren steht senkrecht auf der von den Punkten $P$, $Q$ und $R$ aus der Aufgabe 7 aufgespannten Ebene?

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

√ (d) $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Menge der Vektoren, die senkrecht auf der von $P$, $Q$ und $R$ aufgespannten Ebene steht, ist gerade die Menge der Vektoren, die reelle skalare Vielfache des Kreuzprodukts von $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ sind. Man bemerke nun, dass

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und dass keiner der anderen drei Vektoren ein skalares Vielfaches von $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ sein kann, denn dann müssten die $x$- und die $y$-Komponente dasselbe Vorzeichen haben.

**10.** Was ist das Volumen des Spats (Parallelepipeds), der von den drei Vektoren

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird?

*Hinweis:* Determinante (siehe Aufgabe 7 von Serie 10 aus dem HS 15).

(a) 0

√ (b) 1

(c) 4

(d) 7

Das Volumen des von $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ aufgespannten Spats ergibt sich aus

$$\left| \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = |0 + 6 + 0 - 0 - 4 - 3| = 1.$$