D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 16
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 2

Kurven in der Ebene

Einsendeschluss: 11. März 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welche ist eine Parametrisierung der Ellipse

$$4x^2 + 9(y-1)^2 = 36 \quad ?$$

√ (a) $x = 3\cos t, \quad y = 1 + 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

(b) $x = 3\cos t, \quad y = 2 + 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

(c) $x = \frac{1}{2}\cos t, \quad y = 1 + \frac{1}{3}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

(d) $x = \frac{1}{2}\cos t, \quad y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Für eine Ellipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ist eine Parametrisierung (im Gegenuhrzeigersinn) gegeben durch

$$x = x_0 + a\cos(t) \quad \text{und} \quad y = y_0 + b\sin(t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Die Gleichung $4x^2+9(y-1)^2 = 36$ kann man auch umschreiben zu $\frac{x^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$ und somit ist eine Parametrisierung gegeben durch

$$x = 3\cos(t) \quad \text{und} \quad y = 1 + 2\sin(t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

2. Drei der folgenden Parametrisierungen stellen die gleiche Kurve dar. Welche Parametrisierung stellt eine *andere* Kurve dar?

(a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t^2 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 3].$

(b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 6].$

(c) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ (t+1)^2 \end{pmatrix}, \ t \in [-1, 5].$

√ (d) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2].$

Überprüfung der Anfangs- und Endpunkte der Kurven zeigt, dass die Kurven in (a), (b) und (c) von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bis $\begin{pmatrix} 6 \\ 36 \end{pmatrix}$ verlaufen, während die Kurve in (d) den Endpunkt $\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ hat.

(a),(b) und (c) parametrisieren den Teil der Parabel $y = x^2$ dar von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 6 \\ 36 \end{pmatrix}$. Hingegen parametrisiert (d) den Teil der Parabel $y = \frac{x^2}{3}$ von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

3. Welche der folgenden Gleichungen erfüllt die Kurve mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) - 1 \\ 3\sin(t) + 4 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi)?$$

(a) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}y + 4\right)^2 = 1.$

√ (b) $9\,(x+1)^2 + 4\,(y-4)^2 = 36.$

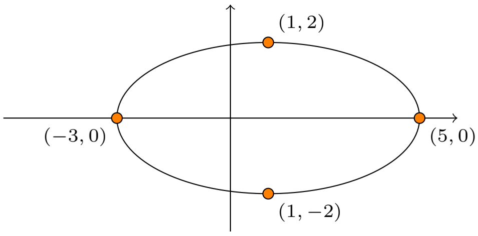
(c) $\frac{1}{2}\,(x+1)^2 + \frac{1}{3}\,(y-4)^2 = 1.$

(d) $(2x-1)^2 + (3y+4)^2 = 36.$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$9\left[(2\cos(t) - 1) + 1\right]^2 + 4\left[(3\sin(t) + 4) - 4\right]^2 = 36\left[\sin^2(t) + \cos^2(t)\right] = 36.$$

4. Welche ist eine Parametrisierung der folgenden Ellipse?



(a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi].$

(b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos t - 1}{4} \\ \frac{\sin t}{2} \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi].$

√ (c) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi].$

(d) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \cos t \\ \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi].$

Man entnimmt der Abbildung, dass die abgebildete Ellipse Mittelpunkt $(1, 0)$ sowie Halbradien 4 (in x-Richtung) und 2 (in y-Richtung) hat. Eine Ellipse mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Halbradien a (in x-Richtung) und b (in y-Richtung) ist stets parametrisiert durch

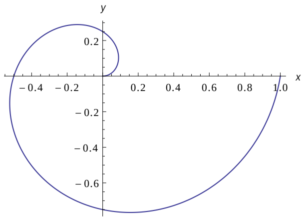
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a\cos(t) \\ y_0 + b\sin(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Die Antworten (a), (b) und (d) kommen nicht in Frage, weil die Wertebereiche der x-Koordinaten stets viel kleiner als $[-3, 5]$ sind.

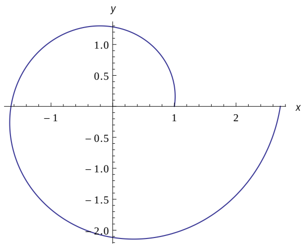
5. Welches ist das Bild der Kurve mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(2\pi t) \\ t\sin(2\pi t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 1]?$$

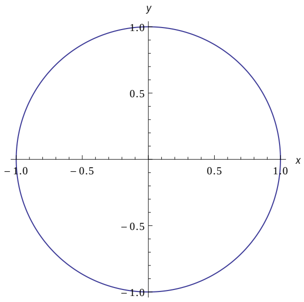
√ (a)



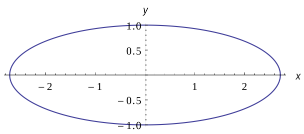
(b)



(c)



(d)



Die durch die Parametrisierung gegebene Kurve startet bei $t = 0$ im Punkt $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies ist nur für die Kurve im Bild in (a) erfüllt.

Bemerkung: An der Parametrisierung kann man sehen, dass die Länge $|\vec{r}(t)| = t$ ist und somit linear in t wächst. Damit sind die geschlossenen Kurven (c) und (d) ausgeschlossen. Außer dem Startpunkt $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ spricht auch für (a), dass $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt. Dies ist übrigens für (b) auf dem Bild auch sicherlich nicht erfüllt.

6. Welche Gleichung stellt den Kreis mit Mittelpunkt $(2,3)$ und Radius 5 dar?

(a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y - 5 = 0.$

(b) $x^2 - 2x + y^2 - 3y - 25 = 0.$

(c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 8 = 0.$

√ (d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0.$

Dieser Kreis ist gegeben durch $(x-2)^2+(y-3)^2 = 5^2$. Ausmultiplizieren liefert $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 25$ und schliesslich

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0.$$

7. Welche ist die Gleichung der Tangente an die Kurve

$$x = 3\sin t, \quad y = -\cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

in dem Punkt, der dem Parameterwert $t = \frac{\pi}{4}$ entspricht?

√ (a) $y = \dfrac{1}{3}x - \sqrt{2}.$

(b) $y = \dfrac{1}{3}x + \sqrt{2}.$

(c) $y = -3x - 4\sqrt{2}.$

(d) $y = -3x + 4\sqrt{2}.$

Der Punkt ist gegeben durch

$$\left(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}}\right) = \left(3\sin\frac{\pi}{4}, -\cos\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Die Steigung der Tangente an diese Kurve im obigen Punkt ist gegeben durch

$$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{\sin t}{3\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Somit ist die Tangente gegeben durch

$$\left(y - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(x - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

und Umformen liefert $y = \frac{1}{3}x - \sqrt{2}$.

8. Die Bahn eines bewegten Massenpunktes sei durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

beschrieben, wobei die Zeit t als Parameter gewählt wurde. Dann ist der Geschwindigkeitsvektor dieses Massenpunktes zur Zeit $t = 2$ gleich

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\surd$ (b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Der Geschwindigkeitsvektor einer Kurve wird durch die erste Ableitung beschrieben. In diesem Fall ist der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ist zur Zeit $t = 2$ gleich $\dot{\vec{r}}(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9. Was ist die Bogenlänge der Kurve

$$x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad ?$$

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

$\surd$ (d) 4.

Die Länge der Kurve ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2 + (1 + \cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos t}\, dt = \sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos t}\, dt. \end{aligned}$$

Wir verwenden die Substitution $u := \cos t$ respektive $\arccos u = t$ mit $\dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = dt$. Dann ist

$$L = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}}\, du = -2\sqrt{2} \left[\sqrt{1-u}\right]_{-1}^1 = 4.$$

Für eine ausführlichere Berechnung des Integrals, vgl. Aufgabe 5 von Serie 2.

10. Welche der folgenden Kurven ist die längste?

√ (a) Der Graph der Funktion $g_1 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 6x$.

(b) Der Graph der Funktion $g_2 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2$.

(c) Der Graph der Funktion $g_3 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3$.

(d) Der Graph der Funktion $g_4 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4$.

Wir parametrisieren die Graphen g_i, $i = 1, \ldots, 4$, durch

$$\vec{r}_i(x) = (x, g_i(x))^T, \qquad x \in [0,1].$$

Die Kurvenlänge L_i des Graphen g_i, $i = 1, \ldots, 4$, ist somit

$$L_i = \int_0^1 |\vec{r}'(x)|\ dx \int_0^1 \sqrt{1 + |g_i'(x)|^2}\, dx$$

Wir berechnen: $g_1'(x) = 6$, $g_2'(x) = 6x$, $g_3'(x) = 6x^2$ und $g_4'(x) = 4x^3$.

Für $x \in [0,1]$ gilt aber $1 \geq x \geq x^2 \geq x^3 \geq 0$ und somit

$$|g_1'(x)| = 6 \geq 6x = |g_2'(x)| \geq |g_3'(x)| = 6x^2 \geq 4x^2 \geq 4x^3 = |g_4'(x)|.$$

Also ist das Integral für $i = 1$ am grössten.