D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 16
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 3

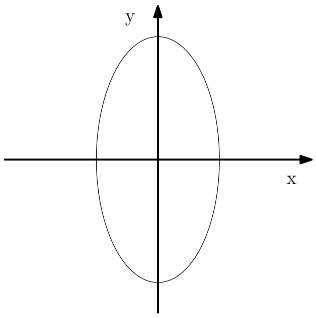
Kurven in der Ebene

Einsendeschluss: 18. März 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Eine der folgenden Gleichungen stellt die skizzierte Kurve dar. Welche ist sie?



(a) $x^2 + 4y^2 = 4.$

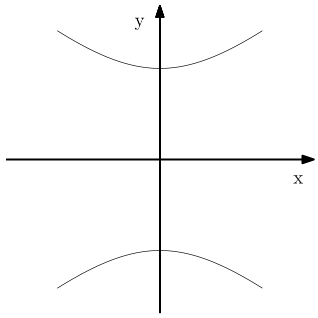
√ (b) $4x^2 + y^2 = 4.$

(c) $x^2 - y^2 = 4.$

(d) $y^2 - x^2 = 4.$

Die Gleichung $4x^2 + y^2 = 4$ ist äquivalent zu $x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$ und stellt somit eine Ellipse um $(0,0)$ mit x-Halbachse 1 und y-Halbachse 2 dar. Insbesondere ist die y-Halbachse grösser. Dagegen beschreiben (c) und (d) Hyperbeln und (a) eine Ellipse, deren x-Halbachse länger ist.

2. Eine der folgenden Gleichungen stellt die skizzierte Kurve dar. Welche ist sie?



(a) $x^2 + 4y^2 = 4.$

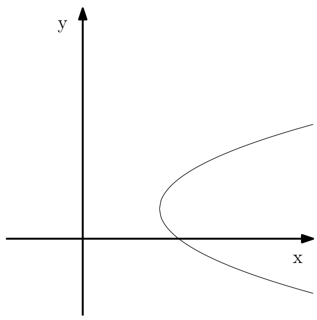
(b) $4x^2 + y^2 = 4.$

(c) $x^2 - y^2 = 4.$

$\surd$ (d) $y^2 - x^2 = 4.$

Offenbar handelt es sich hier um eine Hyperbel, also muss eine der beiden letzten Gleichungen korrekt sein. Die Gleichung $x^2 - y^2 = 4$ erlaubt Werte auf der x-Achse ($y = 0$, $x = \pm 2$) und keine Punkte auf der y-Achse (aus $x = 0$ folgt $-y^2 = 4$ was nicht möglich ist) im Widerspruch zur hier gezeigten Kurve. Daher ist die letzte Gleichung korrekt. Löst man die letzte Gleichung nach y auf so erhält man $y = \pm\sqrt{x^2 + 4}$.

3. Eine der folgenden Gleichungen stellt die skizzierte Kurve dar. Welche ist sie?



$\surd$ (a) $x = 2 + (y - 1)^2.$

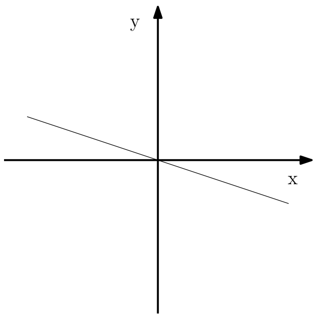
(b) $x = (y + 1)^2 - 2.$

(c) $y = 2 + (x - 1)^2.$

(d) $y = (x + 1)^2 - 2.$

Offenbar handelt es sich hier um eine nach rechts geöffnete Parabel, somit kommen nur die ersten beiden Antworten in Frage. Da die Parabel ihren Scheitelpunkt im 1. Quadranten hat, kommt nur die 1. Gleichung in Frage.

4. Eine der folgenden Gleichungen stellt die skizzierte Gerade in Polarkoordinaten dar. Welche ist sie?



(a) $\theta = \frac{\pi}{3}$.

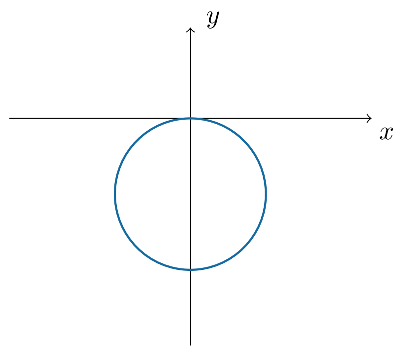
(b) $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(c) $r \cos\theta = 2$.

√ (d) $r(\cos\theta + 3\sin\theta) = 0$.

Bei der ersten Gleichung handelt es sich um eine Gerade mit positiver Steigung. Die zweite Gleichung $\theta = \frac{\pi}{2}$ beschreibt genau die positive y-Achse. Die dritte Gleichung beschreibt die Gerade $x = 2$ (in kartesischen Koordinaten ist $x = r\cos\theta$). Also ist die letzte Gleichung korrekt. Aus $r\cos\theta + 3r\sin\theta = 0$ folgt mittels kartesischen Koordinaten, dass $x + 3y = 0$, also die Gerade $y = -\frac{1}{3}x$.

5. Eine der folgenden Gleichungen stellt den skizzierten Kreis in Polarkoordinaten dar. Welche ist es?



(a) $r = \theta$

√ (b) $r = -\sin(\theta)$

(c) $r = \sin(2\theta)$

(d) $r^2 = \cos(2\theta)$

(a) kann es nicht sein, denn (a) beschreibt eine Spirale, bei der der Abstand zum Nullpunkt linear mit dem Winkel wächst. Man vgl. auch Aufgabe 5 von MC-Serie 2.
(b) kann nach Multiplikation mit r in kartesischen Koordinaten als $x^2+y^2 = -y$ geschrieben werden. Dies ist äquivalent zu

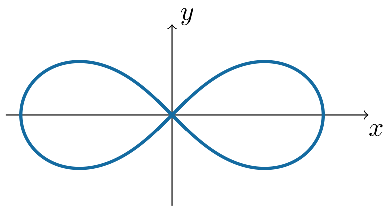
$$x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4},$$

also der Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $(0, -\frac{1}{2})$ und Radius $\frac{1}{2}$. Dies passt auf die Skizze.
(c) kann nicht zutreffen, denn für $\theta = -\frac{\pi}{2}$ müsste ansonsten $r = 0$ sein.
(d) kann nach Multiplikation mit r^2 in kartesischen Koordinaten als

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

geschrieben werden. Dies impliziert $|x| \geq |y|$, d.h. das beschriebene geometrische Objekt kann rechts der y-Achse nur unterhalb von $y = x$ und oberhalb von $y = -x$ liegen und links der y-Achse nur unterhalb von $y = -x$ und oberhalb von $y = x$ verlaufen. Dies widerspricht der Skizze.

6. Einer der folgenden Gleichungen stellt die skizzierte *Lemniskate* in Polarkoordinaten dar. Welche ist es?



(a) $r = \theta$

(b) $r = -\sin(\theta)$

(c) $r = \sin(2\theta)$

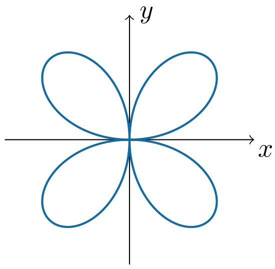
√ (d) $r^2 = \cos(2\theta)$

Wie in Aufgabe 5 kann (d) in kartesischen Koordinaten als $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ geschrieben werden. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{4} = \left[(x - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + y^2\right]\left[(x + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + y^2\right].$$

Demnach wird hier eine Kurve beschrieben mit der Eigenschaft, dass das Produkt der Entfernungen zu den Punkten $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ und $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ konstant ist. Dies entspricht der Definition einer Lemniskate.

7. Eine der folgenden Gleichungen stellt die skizzierte vierblättrige Rosette in Polarkoordinaten dar. Welche ist es?



(a) $r = \theta$

(b) $r = -\sin(\theta)$

$\surd$ (c) $r = \sin(2\theta)$

(d) $r^2 = \cos(2\theta)$

Mit dem Ausschlußverfahren bleibt nach Beantwortung der vorangegangenen Fragen nur noch (c) als mögliche Lösung übrig. Man kann sich aber zumindest überlegen, dass die in (c) parametrisierte Kurve qualitativ wie die Rosette verläuft: Die Kurve starte in $(0, 0)$ und bewegt sich solange bis $\frac{\pi}{4}$ (solange $\sin(\theta) \leq \cos(\theta)$ ist) unterhalb der Diagonalen $y = x$ im ersten Quadranten. Von $\frac{\pi}{4}$ bis $\frac{\pi}{2}$ bewegt sich die Kurve oberhalb der Diagonalen im ersten Quadranten zum Nullpunkt zurück. Von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3}{4}\pi$ ist $\sin(\theta) \leq -\cos(\theta)$, aber auch $\sin(2\theta)$ negativ, sodass also die Kurve unterhalb der Diagonalen $y = -x$ im vierten Quadranten verläuft, bis sie die Diagonale bei $\theta = \frac{3}{4}\pi$ schneidet und während des Intervalls $[\frac{3}{4}\pi, \pi]$ oberhalb der Diagonalen im vierten Quadranten zum Nullpunkt zurückläuft. Danach bewegt sich die Kurve im dritten Quadranten von π bis $\frac{5}{4}\pi$ oberhalb der Diagonalen $y = x$ und kehrt von $\frac{5}{4}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$ unterhalb von $y = x$ wieder zum Ursprung zurück. Zuletzt verläuft die Kurve im zweiten Quadranten oberhalb der Diagonalen $y = -x$ (von $\frac{3}{2}\pi$ bis $\frac{7}{4}\pi$) und kehrt dann unterhalb der Diagonalen von $\frac{7}{4}\pi$ bis 2π zurück.

8. Betrachten Sie das Gebiet D im ersten Quadranten der xy-Ebene, das durch $x = 0$, $y = 0$ und $z = -8x + 16$ begrenzt wird. Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt das Gebiet in Polarkoordinaten?

(a) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq \frac{16}{\sin(\theta)+8\cos(\theta)}$

√ (b) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq \frac{16}{\sin(\theta)+8\cos(\theta)}$

(c) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq \frac{8}{\sin(\theta)+16\cos(\theta)}$

(d) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq \frac{8}{\sin(\theta)+16\cos(\theta)}$

Das Gebiet liegt im ersten Quadranten. Deshalb muss für den Winkel $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ gelten. Die begrenzende Gerade $y = 16 - 8x$ ist in Polarkoordinaten durch $r\sin(\theta) = 16 - 8r\cos(\theta)$ gegeben, was zu

$$r = \frac{16}{\sin(\theta) + 8\cos(\theta)}$$

äquivalent ist. Da ein Punkt P im ersten Quadranten genau dann in D liegt, wenn er einen höchstens so großen Abstand zum Ursprung hat wie der Punkt auf der Geraden $y = 16 - 8x$, der auf dem Halbstrahl durch den Punkt P liegt, muss also

$$0 \leq r \leq \frac{16}{\sin(\theta) + 8\cos(\theta)}$$

gelten.

9. Was ist die Länge der folgenden Spirale

$$r = \theta^2, \quad 0 \leq \theta \leq \sqrt{5} \quad ?$$

(a) $\sqrt{5}$.

√ (b) $\frac{19}{3}$.

(c) $\frac{38}{3}$.

(d) 9.

Die Länge berechnet sich wie folgt

$$L = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Somit ist

$$L = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{\theta^4 + (2\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}\, d\theta = \int_0^{\sqrt{5}} \theta\sqrt{\theta^2 + 4}\, d\theta$$
$$= \left[\frac{2}{3} \cdot (\theta^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right]_0^{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

10. Was ist die Länge der folgenden Kardioide

$$r = 1 + \cos\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad ?$$

(a) $\sqrt{2}$.

(b) $\sqrt{2}2$.

√ (c) 8.

(d) 16.

Es ist

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8, \end{aligned}$$

wobei sich das Integral analog wie in Serie 2, Aufgabe 5d berechnet.