# MC-Serie 4

## Partielle Ableitungen

**Einsendeschluss: 24. März 2016, 16 Uhr (MEZ)**

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

**1.** Welche der folgenden Funktionen ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert?

(a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{x + y}$.

√ (b) $g(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$.

(c) $\varphi(x, y) = \sqrt{x + \ln y^2}$.

(d) $\psi(x, y) = \tan(x + y)$.

Die Funktion $f$ ist nur für $x \neq -y$, die Funktion $\varphi$ nur für $y \neq 0$ und $x \geq \ln y^{-2}$ und die Funktion $\psi$ nur für $x + y \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ erklärt. $g$ dagegen ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert.

**2.** Die Niveaukurven der Funktion $f(x, y) = x^2 + 9y^2$ sind

(a) Geraden.

√ (b) Ellipsen.

(c) Parabeln.

(d) Hyperbeln.

Die Niveaukurve zum Niveau $c$ erfüllt die Gleichung

$$x^2 + 9y^2 = c \text{ also } \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{\frac{c}{9}} = 1.$$

Somit handelt es sich um eine Ellipse um den Ursprung mit Halbachsen $a = \sqrt{c}$ und $b = \dfrac{\sqrt{c}}{3}$.

**3.** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion.

Welche der folgenden Aussagen über die Niveaulinien von $f$ ist korrekt?

(a) Eine Niveaulinie kann sich nie selbst schneiden.

$\surd$ (b) Jeder Punkt liegt auf genau einer Niveaulinie.

(c) Jede Niveaulinie geht durch genau einen Punkt.

(d) Keine der obigen Aussagen.

Die Niveaulinie der Funktion $f$ zum Niveau $c$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $f(x, y) = c$. Ein beliebiger Punkt $(x_0, y_0)$, der diese Gleichung erfüllt, liegt daher auf der Niveaulinie zum Niveau $c = f(x_0, y_0)$ und auf keiner anderen. Also ist (b) richtig und (d) falsch. Auch (a) ist falsch; zum Beispiel hat die Kurve $xy = 0$ jeweils einen Selbstschnittpunkt. Antwort (c) schliesslich ist schon deshalb falsch, weil die Niveaulinien im allgemeinen wirklich Linien sind und aus mehreren Punkten bestehen.

**4.** Die Schnittkurven der Form $x =$ const. der Funktion $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ sind

(a) Geraden.

(b) Ellipsen.

$\surd$ (c) Parabeln.

(d) Hyperbeln.

Für $x =$ const. $= c$ gilt offenbar

$$f(c, y) = 2c^2 + 3y^2 = z,$$

was der Gleichung einer um die $z$-Achse positiv geöffneten Parabel entspricht.

**5.** Die Niveauflächen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z,$$

sind

(a) Ebenen.

√ (b) Paraboloide.

(c) Kegel.

(d) Sphären.

Die Niveaufläche von $f$ zum Niveau $c \in \mathbb{R}$ ist durch

$$c = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2z \qquad \text{bzw.} \qquad z = \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{c}{2}$$

gegeben und ist somit ein Paraboloid.

**6.** Sei $f(x, y) = x \sin(xy)$. Die partielle Ableitung von $f$ nach $x$ ist

(a) $\cos(xy) - xy \sin(xy)$.

(b) $y \cos(xy)$.

(c) $-x \cos(xy)$.

√ (d) $xy \cos(xy) + \sin(xy)$.

Man verwendet die Produktregel und für den Sinus die Kettenregel und erhält

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x) \sin(xy) + x \frac{\partial}{\partial x}(\sin(xy)) = \sin(xy) + x \cos(xy) \cdot y.$$

**7.** Welche der folgenden Funktionen ist **keine** Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ?$$

(a) $w = \sin(x + ct)$.

Als partielle Ableitungen ergeben sich

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) = -c^2 \sin(x + ct),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) = -\sin(x + ct).$$

Somit löst $w$ die Wellengleichung.

(b) $w = \cos(2x + 2ct)$.

Als partielle Ableitungen ergeben sich

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) = -(2c)^2 \cos(2x + 2ct),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) = -4\cos(2x + 2ct).$$

Somit löst $w$ die Wellengleichung.

√ (c) $w = \sin(x + 2ct)$.

Als partielle Ableitungen ergeben sich

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) = -(2c)^2 \sin(x + 2ct),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) = -\sin(x + ct).$$

Damit erfüllt $w$ die Beziehung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 4c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Da $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ nicht identisch gleich Null ist, kann $w$ nicht gleichzeitig die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

lösen.

(d) $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$.

Da es sich bei der Wellengleichung um eine lineare Differentialgleichung handelt und die beiden Funktionen $\sin(x+ct)$ und $\cos(2x+2ct)$ Lösungen der Wellengleichung sind (siehe Feedback in (a) und (b)) ist auch die Summe der beiden Funktionen eine Lösung der Wellengleichung. Alternativ kann man die Funktion auch einfach einsetzen.

**8.** Sei $f(x,y) = (\cos(x))^y$. Dann gilt für die partiellen Ableitungen von $f$

(a) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y\tan(x)(\cos(x))^y \sin(x)$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (-\sin(x))^y$.

√ (b) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y\tan(x)(\cos(x))^y$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \ln(\cos(x))(\cos(x))^y$.

Richtig. Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{\ln(\cos(x))y}) = e^{\ln(\cos(x))y}\frac{\partial}{\partial x}(\ln(\cos(x))y \\ &= (\cos(x))^y \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} y = -y\tan(x)(\cos(x))^y\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\ln(\cos(x))y}\right) = e^{\ln(\cos(x))y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(\cos(x))y\right) \\ &= (\cos(x))^y \ln(\cos(x)).\end{aligned}$$

(c) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln(\cos(x))(\cos(x))^y$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -y(\cos(x))^{y-1}\sin(x)$.

(d) Keine der obigen Gleichungen.

**9.** Sei $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Dann ist $f_{yy}$ gleich

(a) $\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(b) $\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$.

√ (c) $\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(d) $\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Man berechnet mit der Kettenregel

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}y$$

und unter Anwendung der Produktregel

$$\begin{aligned}f_{yy}(x,y) &= (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2y \cdot y + (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-y^2+(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

**10.** Sei $f(x,y)$ dreimal stetig differenzierbar. Betrachten Sie die partiellen Ableitungen dritter Ordnung. Diese sind höchstens

√ (a) 4 verschiedene Funktionen.

(b) 6 verschiedene Funktionen.

(c) 8 verschiedene Funktionen.

(d) 9 verschiedene Funktionen.

Der Satz von Schwarz sagt uns, dass für eine dreimal stetig differenzierbare Funktion die Reihenfolge der Differenzierung bis zur dritten Ableitung keine Rolle spielt. Deswegen können höchstens die Ableitungen

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y), \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y), \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) \text{ und } \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y)$$

verschieden sein.