Dr. Ana Cannas

MC-Serie 5

Partielle Ableitungen

Einsendeschluss: 8. April 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Sei $z = \ln(x^2 + y^2),\ x = 2u$ und $y = 3u$. Dann ist $\dfrac{dz}{du}$ gleich

(a) $\dfrac{1}{u}$.

(b) $\dfrac{2}{u}$.

(c) $\dfrac{3}{u}$.

(d) $\dfrac{4}{u}$.

2. Welche Rechenregel für Gradienten von Funktionen von n Variablen ist **falsch**?

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

(b) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot \nabla g$.

(c) $\nabla(f^2) = 2f\nabla f$.

(d) $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\nabla f}{f^2}$ (füf $f \neq 0$).

3. In welcher Richtung steigt die Funktion $f(x,y,z) = xe^{yz}$ an der Stelle $(1,0,2)$ am schnellsten?

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{j}$.

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{k}$.

(c) $\frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{k}$.

(d) $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{k}$.

4. Die Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-y}$ im Punkt $(1,0,1)$

(a) ist durch die Gleichung $x = 2y - z - 1$ gegeben.

(b) ist durch die Gleichung $y = 2z - x - 1$ gegeben.

(c) ist durch die Gleichung $z = 2x - y - 1$ gegeben.

(d) gibt es nicht, da der Punkt nicht auf der Fläche liegt.

5. Die Linearisierung der Funktion $f(r,\theta) = r^2 e^{2\theta}$ um den Punkt $(1,\pi)$ ist

(a) $e^{2\pi}\,(-1 + 2r + 2\theta - 2\pi)$.

(b) $e^{2\pi}\,(1 + 2r + 2\theta)$.

(c) $e^{2\pi}\,(1 - 2r - 2\theta)$.

(d) $e^{2\pi}\,(-1 + 2\pi + 2r + 2\theta)$.

6. Die Tangente an die Ellipse

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

im Punkt $\left(2, \frac{\sqrt{20}}{3}\right)$ ist

(a) $4x + 9y = 0$.

(b) $4x + 9y = 8 + 6\sqrt{5}$.

(c) $4x + 3\sqrt{5}y = 2$.

(d) $4x + 3\sqrt{5}y = 18$.

7. Die Tangentialebene an die Niveaufläche von

$$f(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + z + 7$$

durch den Punkt $(-1, 1, 3)$ ist

(a) $2x + 8y - z = 0$.

(b) $2x + 8y - z = 3$.

(c) $2x - 8y + z = -3$.

(d) $2x - 8y + z = -7$.

8. Welcher Punkt $P = (x, y)$ auf dem Hyperbelast $x^2 - y^2 = 12$, $x > 0$, hat vom Punkt $(0, 4)$ auf der y-Achse den kleinsten Abstand?

Hinweis: Minimieren Sie die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + (y - 4)^2 = (\text{Abstand zwischen } (x, y) \text{ und } (0, 4))^2$$

auf dem Hyperbelast mit der Parametrisierung $x = \sqrt{12 + y^2}$.

(a) Der Punkt $P = (4, 2)$.

(b) Der Punkt $P = (2\sqrt{7}, 4)$.

(c) Der Punkt $P = (2\sqrt{3}, 0)$.

(d) Einen solchen Punkt gibt es nicht.

9. Die sogenannte *Lemniskate* $x^2(1 - x^2) = y^2$ lässt sich

(a) in der Nähe des Punktes $(0, 0)$ als Graph einer Funktion von x darstellen.

(b) in der Nähe des Punktes $(0, 0)$ als Graph einer Funktion von y darstellen.

(c) in der Nähe des Punktes $(1, 0)$ als Graph einer Funktion von x darstellen.

(d) in der Nähe des Punktes $(1, 0)$ als Graph einer Funktion von y darstellen.

10. Seien $f(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) Dann ist die Ableitung der in einer Umgebung von x_0 durch $f(x, \phi(x)) = 0$ definierten Funktion ϕ gegeben durch

$$\phi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

(b) Ohne eine Funktion ϕ explizit zu kennen, ist es unmöglich, deren Ableitung zu berechnen.

(c) Nach der Kettenregel ist

$$\frac{d}{dx} f(x, \phi(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \cdot \phi'(x).$$

(d) Falls $f_x(x_0, y_0) \neq 0$, dann ist auch in einer Umgebung von x_0 eine Funktion durch $f(\psi(y), y) = 0$ definiert.