MC-Serie 5

Partielle Ableitungen

Einsendeschluss: 8. April 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Sei $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = 2u$ und $y = 3u$. Dann ist $\frac{dz}{du}$ gleich

(a) $\frac{1}{u}$.

√ (b) $\frac{2}{u}$.

(c) $\frac{3}{u}$.

(d) $\frac{4}{u}$.

Mit $x = 2u$ und $y = 3u$ folgt

$$z = \ln(4u^2 + 9u^2) = \ln(13u^2)$$

und somit

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{13u^2} \cdot 26u = \frac{2}{u}.$$

Alternative: Man kann auch die Kettenregel auf die Verknüpfung der Funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ und $g(u) = (2u, 3u)$ anwenden und erhält dann

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{du} &= \frac{d}{du}\left(f(g(u))\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du} \\
&= \left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_{(2u,3u)} \cdot 2 + \left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_{(2u,3u)} \cdot 3 \\
&= \frac{8u + 18u}{13u^2} = \frac{2}{u}.
\end{aligned}$$

2. Welche Rechenregel für Gradienten von Funktionen von n Variablen ist **falsch**?

(a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

√ (b) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot \nabla g$.

(c) $\nabla(f^2) = 2f\nabla f$.

(d) $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\nabla f}{f^2}$ (füf $f \neq 0$).

Der Gradient erfüllt die Produktregel

$$\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + \nabla f \cdot g$$

und somit ist die zweite Aussage falsch. Die anderen Formeln folgen aus den Rechenregeln auf der Seite 289 im Buch "Analysis 2" von G. B. Thomas, M. D. Weir und J. Hass.

3. In welcher Richtung steigt die Funktion $f(x,y,z) = xe^{yz}$ an der Stelle $(1,0,2)$ am schnellsten?

√ (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$.

(c) $\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$.

(d) $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$.

Da der Gradient immer in die Richtung des grössten Zuwachses zeigt, müssen wir nur den Gradienten von f an der Stelle $(1,0,2)$ ermitteln. Es ist

$$\nabla f(x,y,z) = (e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz})$$

und somit

$$\nabla f(1,0,2) = (1,2,0).$$

Dieser Vektor hat Länge $\sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$. Dann geben wir die Richtung normiert an als

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}.$$

4. Die Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-y}$ im Punkt $(1,0,1)$

(a) ist durch die Gleichung $x = 2y - z - 1$ gegeben.

(b) ist durch die Gleichung $y = 2z - x - 1$ gegeben.

√ (c) ist durch die Gleichung $z = 2x - y - 1$ gegeben.

(d) gibt es nicht, da der Punkt nicht auf der Fläche liegt.

Für $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-y}$ gelten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xe^{-y}, \\ f_y(x,y) &= 2ye^{-y} - (x^2+y^2)e^{-y}, \end{aligned}$$

also insbesondere $f_x(1,0) = 2$ und $f_y(1,0) = -1$. Damit gilt

$$\begin{aligned} z &= f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) \\ &= 1 + 2(x-1) - y = 2x - y - 1 \end{aligned}$$

für die Tangentialebene im Punkt $(1,0,f(x,y)) = (1,0,1)$.

5. Die Linearisierung der Funktion $f(r,\theta) = r^2 e^{2\theta}$ um den Punkt $(1,\pi)$ ist

√ (a) $e^{2\pi}(-1 + 2r + 2\theta - 2\pi)$.

(b) $e^{2\pi}(1 + 2r + 2\theta)$.

(c) $e^{2\pi}(1 - 2r - 2\theta)$.

(d) $e^{2\pi}(-1 + 2\pi + 2r + 2\theta)$.

Die Linearisierung von f um den Punkt $(1,\pi)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L_f(r,\theta) &= f(1,\pi) + f_r(1,\pi)(r-1) + f_\theta(1,\pi)(\theta-\pi) \\ &= e^{2\pi} + \left[2re^{2\theta}\right]_{(1,\pi)}(r-1) + \left[2r^2e^{2\theta}\right]_{(1,\pi)}(\theta-\pi) \\ &= e^{2\pi} + 2e^{2\pi}(r-1) + 2e^{2\pi}(\theta-\pi) \\ &= e^{2\pi}(1 + 2r - 2 + 2\theta - 2\pi) \\ &= e^{2\pi}(-1 + 2r + 2\theta - 2\pi). \end{aligned}$$

6. Die Tangente an die Ellipse
$$4x^2 + 9y^2 = 36$$
im Punkt $\left(2, \frac{\sqrt{20}}{3}\right)$ ist

(a) $4x + 9y = 0.$

(b) $4x + 9y = 8 + 6\sqrt{5}.$

(c) $4x + 3\sqrt{5}y = 2.$

√ (d) $4x + 3\sqrt{5}y = 18.$

Dazu berechnen wir den Gradienten der Funktion $4x^2 + 9y^2 - 36$ zum Niveau $c = 0$ im Punkt $\left(2, \frac{\sqrt{20}}{3}\right)$, der senkrecht auf die gesuchte Tangente steht
$$\nabla(4x^2 + 9y^2 - 36) = (8x, 18y)$$
und somit
$$(8x, 18y)\big|_{(x,y)=\left(2, \frac{\sqrt{20}}{3}\right)} = (16, 6\sqrt{20}).$$
Dann ist die gesuchte Tangente gegeben durch die Gleichung
$$\begin{pmatrix} 16 \\ 6\sqrt{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6\sqrt{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\sqrt{20}}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 16x + 6\sqrt{20}y = 32 + 6\frac{20}{3},$$
was schliesslich zu
$$4x + 3\sqrt{5}y = 18$$
führt.

7. Die Tangentialebene an die Niveaufläche von

$$f(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + z + 7$$

durch den Punkt $(-1,1,3)$ ist

(a) $2x + 8y - z = 0.$

√ (b) $2x + 8y - z = 3.$

(c) $2x - 8y + z = -3.$

(d) $2x - 8y + z = -7.$

Zum Niveau $c = 7$ ist der Gradient von f

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, -8y, 1),$$

also ist der Gradient im Punkt $(-1,1,3)$ gleich

$$\nabla f(-1,1,3) = (-2,-8,1).$$

Dann ist die gesuchte Tangentialebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -2x - 8y + z = 2 - 8 + 3 = -3$$

und somit

$$2x + 8y - z = 3.$$

8. Welcher Punkt $P = (x, y)$ auf dem Hyperbelast $x^2 - y^2 = 12$, $x > 0$, hat vom Punkt $(0, 4)$ auf der y-Achse den kleinsten Abstand?
Hinweis: Minimieren Sie die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + (y - 4)^2 = (\text{Abstand zwischen } (x, y) \text{ und } (0, 4))^2$$

auf dem Hyperbelast mit der Parametrisierung $x = \sqrt{12 + y^2}$.

√ (a) Der Punkt $P = (4, 2)$.

(b) Der Punkt $P = (2\sqrt{7}, 4)$.

(c) Der Punkt $P = (2\sqrt{3}, 0)$.

(d) Einen solchen Punkt gibt es nicht.

Das Quadrat des Abstandes des Punktes $P = (x, y)$ vom Punkt $(0, 4)$ ist durch

$$f(x, y) = x^2 + (y - 4)^2$$

gegeben. Da der Punkt zudem auf der Hyperbel liegt, verwenden wir die Parametrisierung

$$x = \sqrt{12 + y^2}.$$

Einsetzen der Parametrisierung in die Funktion f liefert

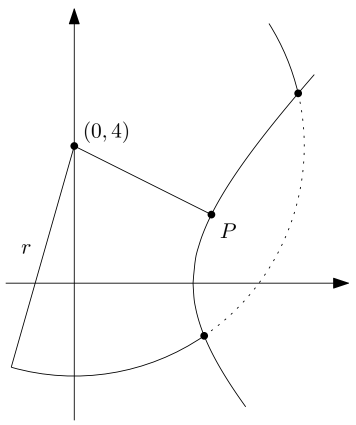
$$f(\sqrt{12 + y^2}, y) = (\sqrt{12 + y^2})^2 + (y-4)^2 = 12 + y^2 + y^2 - 8y + 16 = 2(y^2 - 4y + 14).$$

In einer relativen Minimalstelle von f gilt also

$$\frac{d}{dy} f(\sqrt{12 + y^2}, y) = 2(2y - 4) \stackrel{!}{=} 0$$

und somit $y = 2$. Dann ist $x = 4$ und deshalb ist der gesuchte Punkt $(4, 2)$.

Es ist geometrisch leicht ersichtlich, dass es sich bei P tatsächlich um ein Minimum von d handeln muss: Punkte ausserhalb einer abgeschlossenen Kreisscheibe um $(0, 4)$ mit hinreichend grossem Radius r kommen nämlich nicht in Frage und der verbleibende Hyperbelabschnitt ist beschränkt und abgeschlossen. Der Abstand d nimmt dort also sowohl ein Maximum als auch ein Minimum an, wobei er ersteres offensichtlich in den Randpunkten annimmt.



9. Die sogenannte *Lemniskate* $x^2(1-x^2) = y^2$ lässt sich

(a) in der Nähe des Punktes $(0,0)$ als Graph einer Funktion von x darstellen.

(b) in der Nähe des Punktes $(0,0)$ als Graph einer Funktion von y darstellen.

(c) in der Nähe des Punktes $(1,0)$ als Graph einer Funktion von x darstellen.

√ (d) in der Nähe des Punktes $(1,0)$ als Graph einer Funktion von y darstellen.

Die Kurve ist durch $f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2 = 0$ gegeben mit

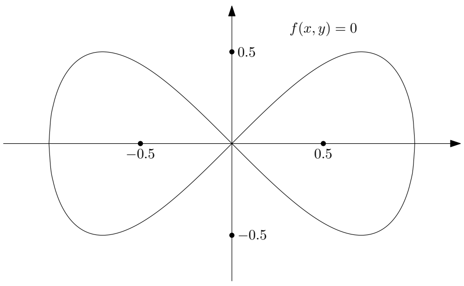
$$f_x(x,y) = 2x(1-2x^2) \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = -2y.$$

In jeder Umgebung des Ursprungs gibt es zu jedem x bzw. y offensichtlich stets zwei y- bzw. x-Werte, so dass $f(x,y) = 0$. Im Punkt $(1,0)$ gelten

$$f_x(1,0) = 2(1-2) = -2 \qquad \text{und} \qquad f_y(1,0) = 0,$$

daher lässt sich die Kurve um diesen Punkt zwar nicht als Graph einer Funktion von x aber als Graph einer Funktion von y darstellen.

Das Bild der Lemniskate bestätigt diesen Schluss.



10. Seien $f(x_0,y_0) = 0$ und $f_y(x_0,y_0) \neq 0$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) Dann ist die Ableitung der in einer Umgebung von x_0 durch $f(x,\phi(x)) = 0$ definierten Funktion ϕ gegeben durch

$$\phi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}.$$

√ (b) Ohne eine Funktion ϕ explizit zu kennen, ist es unmöglich, deren Ableitung zu berechnen.

(c) Nach der Kettenregel ist

$$\frac{d}{dx}f(x,\phi(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x)) \cdot \phi'(x).$$

(d) Falls $f_x(x_0,y_0) \neq 0$, dann ist auch in einer Umgebung von x_0 eine Funktion durch $f(\psi(y),y) = 0$ definiert.

Dies folgt alles direkt aus dem Satz über Implizite Funktionen.