MC-Serie 6

Partielle Ableitungen

Einsendeschluss: 15. April 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = x^3 y - 12xy + 4y^2$$

sind

(a) $(-2,2), (0,0), (2,-2), (0,\sqrt{12}), (0,-\sqrt{12})$.

√ (b) $(-2,-2), (0,0), (2,2), (\sqrt{12},0), (-\sqrt{12},0)$.

(c) $(-2,-2), (0,0), (2,2), (0,\sqrt{12}), (0,-\sqrt{12})$.

(d) $(-2,2), (0,0), (2,-2), (\sqrt{12},0), (-\sqrt{12},0)$.

Man berechnet

$$f_x(x,y) = 3x^2y - 12y = 3y(x^2-4) = 3y(x-2)(x+2) \overset{!}{=} 0$$

und

$$f_y(x,y) = x^3 - 12x + 8y \overset{!}{=} 0.$$

Aus $f_y(x,y) = 0$ folgt

$$y = \frac{1}{8}x(\sqrt{12}-x)(\sqrt{12}+x)$$

und eingesetzt in $f_x(x,y) = 0$

$$0 \overset{!}{=} \frac{3}{8}x(\sqrt{12}-x)(\sqrt{12}+x)(x-2)(x+2).$$

Daher sind die kritischen Punkte bei $x \in \{0, \pm 2, \pm\sqrt{12}\}$. Einsetzen in die durch $f_y(x,y) = 0$ gegebene Gleichung ergibt die entsprechenden y-Werte.

2. Sei $f(x, y)$ eine Funktion mit

$$f_x(x, y) = 9x^2 - 9 \quad \text{und} \quad f_y = 4 - y^2.$$

Welche Aussage ist **falsch**?

(a) f hat in $(1, 2)$ einen Sattelpunkt.

(b) f hat in $(1, -2)$ ein lokales Minimum.

√ (c) f hat in $(-1, 2)$ ein lokales Minimum.

(d) f hat in $(-1, -2)$ einen Sattelpunkt.

Die kritischen Punkte sind die Nullstellen der ersten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 9x^2 - 9 = 9(x^2 - 1) = 9(x-1)(x+1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \\ f_y(x, y) &= 4 - y^2 = (2-y)(2+y) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und somit sind $(1, 2),\ (1, -2),\ (-1, 2)$ und $(-1, -2)$ kritische Punkte. Um diese zu charakterisieren brauchen wir die Determinante der Hessematrix

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = -36xy.$$

wobei $f_{xx}(x, y) = 18x,\ f_{yy}(x, y) = -2y$ und $f_{xy}(x, y) = 0$. Dann sind

$$\begin{aligned} \Delta(1, 2) &= -36 \cdot 1 \cdot 2 = -72 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt} \\ \Delta(1, -2) &= -36 \cdot 1 \cdot (-2) = 72 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(1, -2) = 18 > 0 \\ &\Rightarrow \quad \text{lokales Minimum} \\ \Delta(-1, 2) &= -36 \cdot (-1) \cdot 2 = 72 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(-1, 2) = -18 < 0 \\ &\Rightarrow \quad \text{lokales Maximum} \\ \Delta(-1, -2) &= -36 \cdot (-1) \cdot (-2) = -72 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt.} \end{aligned}$$

3. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 + 6\,x\,y.$$

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) Die Funktion f hat ihren einzigen kritischen Punkt im Ursprung.

Es gilt

$$\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x + 6\,y \\ 2\,y + 6\,x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

und da $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt.

(b) Es gelten $f_{xx}(0,0) > 0$ und $f_{yy}(0,0) > 0$. Die Einschränkungen von f auf die x- und y-Achse nehmen im Ursprung also ein lokales Minimum an.

Es gilt $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 2 > 0$.

√ (c) Die Funktion f nimmt im Ursprung ein lokales Minimum an.

Auf den winkelhalbierenden Geraden $y = x$ bzw. $y = -x$ etwa gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + x^2 + 6\,x^2 = 8\,x^2 > 0 \qquad \text{bzw.} \\ f(x,y) &= x^2 + x^2 - 6\,x^2 = -4\,x^2 < 0, \end{aligned}$$

für alle $x \neq 0$. Die Funktion f nimmt also in jeder (noch so kleinen) Umgebung des Ursprungs sowohl positive als auch negative Werte an.

(d) Die Funktion f nimmt kein lokales Minimum an.

Da f auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist, wäre jede Minimalstelle auch ein kritischer Punkt. Der einzige solche Punkt liegt aber im Ursprung und ist keine Minimalstelle von f.

Es ist $\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. Die Determinante beträgt -32 und ist negativ. Folglich ist der Ursprung ein Sattelpunkt von f.

4. Wir betrachten die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 y(4 - x - y),$$

auf dem durch die Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $x + y = 6$ begrenzten Dreieck D. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) Die Funktion f nimmt ihren kleinsten Wert auf dem Rand von D an.

√ (b) Die Funktion f nimmt ihren grössten Wert auf dem Rand von D an.

(c) Die Funktion f ist auf dem Definitionsbereich D überall $< \sqrt{17}$.

(d) Das Verhältnis von grösstem und kleinstem Funktionswert der Funktion f auf dem gesamten Definitionsbereich D ist $< -\frac{1}{17}$.

Es gilt

$$\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy(4-x-y) - x^2y \\ x^2(4-x-y) - x^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy(8-3x-2y) \\ x^2(4-x-2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in den kritischen Punkten $(0, C)$, $C \in \mathbb{R}$, $(4, 0)$ und $(2, 1)$ mit den Funktionswerten

$$f(0, C) = f(4, 0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f(2, 1) = 4.$$

Allgemein ist offensichtlich $f(x, y) = 0$ für $x = 0$ oder $y = 0$, f verschwindet also auf zwei der drei Seiten des Dreiecks D. Auf der verbleibenden Seite von D gilt

$$0 \geq f(x, y) = x^2(6 - x)(4 - (x + y)) = 2x^2(x - 6) =: \varphi(x),$$

mit

$$\varphi'(x) = 6x^2 - 24x \qquad \text{und} \qquad \varphi''(x) = 12x - 24.$$

f nimmt also auf dieser Seite in $(4, 2)$ das Minimum $f(4, 2) = \varphi(4) = -64$ an.

Somit ist $4 = \sqrt{16} < \sqrt{17}$ der grösste, -64 der kleinste Wert und $\frac{4}{-64} = -\frac{1}{16} < -\frac{1}{17}$.

5. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2 - (3x+2)y^2, \qquad \mathbb{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) Die Funktion f hat ihren einzigen kritischen Punkt im Ursprung.

In einem kritischen Puntk gilt

$$f_x(x,y) = x(3x+4) - 3y^2 = 0$$
$$f_y(x,y) = -2y(3x+2) = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass entweder

- $3x = -2$, was $0 \leq 3y^2 = 2x$ widerspricht, oder
- $y = 0$, was $x = 0$ oder $3x = -4$ nach sich zieht.

Der Punkt $(-4/3, 0)$ liegt aber wegen $16/9 > 1$ nicht in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$, so dass nur der Ursprung als kritischer Punkt übrig bleibt.

(b) Die Funktion f besitzt im Ursprung einen Sattelpunkt.

Es gelten

$$f_{xx}(x,y) = -f_{yy}(x,y) = 6x + 4 \qquad \text{und} \qquad f_{xy}(x,y) = -6y.$$

Der Ursprung ist somit wegen

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

ein Sattelpunkt.

√ (c) Die Funktion f nimmt im Ursprung ein lokales Extremum an.

(d) Die Funktion f nimmt ein globales Extremum an.

Da die Funktion f stetig und die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt f auf $\mathbb{D}$ sowohl ein Minimum als auch ein Maximum annehmen. Da es im Inneren keine Extremstellen gibt, müssen diese auf dem Rand liegen.

6. Sei $f(x,y) : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ der Definitionsbereich von f ist. Sei (x_0, y_0) ein kritischer Punkt von f, d.h. es gilt $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) < 0$ und $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$
$\Rightarrow f$ hat einen Sattelpunkt in (x_0, y_0).

√ (b) $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$
$\Rightarrow f$ hat einen Sattelpunkt in (x_0, y_0).

(c) $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$ und $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$
$\Rightarrow f$ hat ein lokales Minimum in (x_0, y_0).

(d) $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$ und $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$
$\Rightarrow f$ hat ein lokales Maximum in (x_0, y_0).

Dies folgt direkt aus den Kriterien aus der Vorlesung, wobei

$$\Delta = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0).$$

7. Der Wert des Doppelintegrals

$$\int_0^{\frac{4}{\pi}} \int_0^{\pi} 5\,(xy + \pi\sin(x))\,dx\,dy$$

ist

(a) -60.

(b) -15.

(c) 15.

√ (d) 60.

Man berechnet

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{4}{\pi}} \int_0^{\pi} 5\,(xy + \pi\sin(x))\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{4}{\pi}} 5\left[y\frac{x^2}{2} + \pi\,(-\cos(x))\right]_0^{\pi} dy \\
&= \int_0^{\frac{4}{\pi}} \left[5\left(\frac{\pi^2}{2}y + \pi\right) - 5\,(-\pi)\right] dy \\
&= \int_0^{\frac{4}{\pi}} 5\left(\frac{\pi^2}{2}y + 2\pi\right) dy = \left[5\left(\frac{\pi^2}{2}\frac{y^2}{2} + 2\pi y\right)\right]_0^{\frac{4}{\pi}} \\
&= 5\left(\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + 2\pi\frac{4}{\pi}\right) = 5(4+8) = 60.
\end{aligned}$$

8. Welches der folgenden Integrale ist **nicht** gleich den anderen?

(a) $\int_0^1 \int_0^x x\, dy\, dx.$

√ (b) $\int_0^1 \int_0^y x\, dx\, dy.$

(c) $\int_0^1 \int_0^y y\, dx\, dy.$

(d) $\int_0^1 \int_y^1 x\, dx\, dy.$

In (a) und (d) ist der Integrationsbereich durch dieselbe Bedingung $0 \leq y \leq x \leq 1$ gegeben. Da auch der Integrand gleich ist, stimmen diese beiden Integrale überein. Dasselbe gilt für das Integral (c), welches aus (a) durch Vertauschung der Variablen x und y entsteht. Als einzig mögliche korrekte Antwort verbleibt daher (b).

Wegen

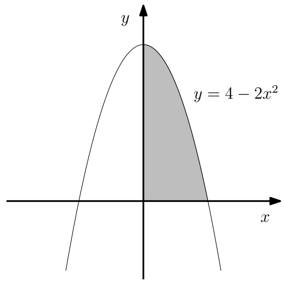
$$\int_0^1 \int_0^y x\, dx\, dy = \int_0^1 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\, dy = \left. \frac{y^3}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{6}$$

und

$$\int_0^1 \int_0^y y\, dx\, dy = \int_0^1 y\ \ x|_0^y\ dy = \int_0^1 y^2\, dy = \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ist (b) tatsächlich von den anderen verschieden.

9. Was ist der Flächeninhalt des Gebietes unter der Kurve $y = 4 - 2x^2$ im 1. Quadranten?



✓ (a) $\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

(b) $4\sqrt{2}$.

(c) $\frac{16}{3}\sqrt{2}$.

(d) $8\sqrt{2}$.

Es gilt $4 - 2x^2 = 2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)$ somit integrieren wir x von 0 bis $\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned}\int\int_A dA &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(4 - 2x^2\right) dx \\ &= \left[4x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \frac{2}{3}2\sqrt{2} = \frac{8}{3}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

10. Was ist der Flächeninhalt des von den Geraden $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ und $y = 3 - x$ begrenzten Gebietes?

(a) 1.

√ (b) $\frac{3}{2}$.

(c) 2.

(d) $\frac{5}{2}$.

Man berechnet

$$\int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{2x} 1\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} 1\,dy\,dx = \frac{3}{2}, \quad \text{bzw.}$$

$$\int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^{2y} 1\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} 1\,dx\,dy = \frac{3}{2}.$$