D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 16
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 7

Mehrfachintegrale und ihre Hauptsubstitutionen
Einsendeschluss: 22. April 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Den Wert des Doppelintegrals

$$\int\int_R e^{2x^2+y^2}\,dA,$$

wobei $R = [0,1] \times [0,2]$, können wir nicht genau analytisch bestimmen. Dieser Wert liegt aber im Intervall

(a) $[-e, 0]$.

(b) $[0, 2]$.

(c) $\left[2, 2e^6\right]$.

(d) $\left[2e^6, \infty\right]$.

2. Der Schwerpunkt $S = (x, y)$ der zwischen der Parabel $y = -x^2 - 2x$ und der x-Achse gelegenen homogenen Fläche (endlichen Inhalts) ist

(a) $S = \left(\frac{2}{5}, -1\right)$.

(b) $S = \left(-1, \frac{2}{5}\right)$.

(c) $S = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

(d) Der Ursprung.

3. Betrachten Sie den Ringteil D im ersten Quadranten der xy-Ebene, welcher durch die Achsen $x = 0,\ y = 0$ und die Kreise $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9$ bergrenzt wird. Welche der folgenden Parametrisierungen beschreibt das Gebiet in Polarkoordinaten?

(a) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq r \leq 3.$

(b) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 1 \leq r \leq 3.$

(c) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq r \leq 9$

(d) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 1 \leq r \leq 9.$

4. Unter Verwendung von Polarkoordinaten ist das Integral

$$\int\int_D (x + 4y^2) dA,$$

wobei D die obere Hälfte des Kreises mit Radius 2 um den Ursprung ist, äquivalent zu

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \left(\cos(\theta) + 4r\sin^2(\theta)\right) dr\, d\theta.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^2 r^2 \left(\cos(\theta) + 4r\sin^2(\theta)\right) dr\, d\theta.$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^2 r \left(\cos(\theta) + 4r\sin^2(\theta)\right) dr\, d\theta.$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^2 r \left(\cos(\theta) + 4r\sin^2(\theta)\right) dr\, d\theta.$

5. Das Integral der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ über die Menge

$$B = \left\{(x,y) \,|\, x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

ist

(a) $\displaystyle \int\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \frac{2\pi}{3}.$

(b) $\displaystyle \int\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \frac{4\pi}{3}.$

(c) $\displaystyle \int\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \frac{16\pi}{3}.$

(d) $\displaystyle \int\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \frac{32\pi}{3}.$

6. Gegeben ist das Integral $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, wo D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ bezeichnet. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integrationen lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx.$

(b) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx.$

(c) $\displaystyle I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta.$

(d) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy.$

7. Das Volumen des Körpers E berandet durch $z = 3 + x^2 + y^2$ und $z = 6$ ist

(a) $-\dfrac{27\pi}{2}.$

(b) $9\pi.$

(c) $\dfrac{9\pi}{2}.$

(d) $\dfrac{3\pi}{2}.$

8. Gegeben sei der Punkt $(\rho, \varphi, \theta) = \left(2, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ in Kugelkoordinaten (für die Definition siehe Vorlesungsnotizen). Welchem Punkt entspricht er in kartesischen Koordinaten (x, y, z)?

(a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}\right)$.

(b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

(c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$.

(d) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

9. Der Kugeloktant

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x, y, z \geq 0\}, \qquad R > 0,$$

sei mit der Masse der konstanten Dichte 1 belegt.

Der Schwerpunkt $S = (x, y, z)$ von K ist

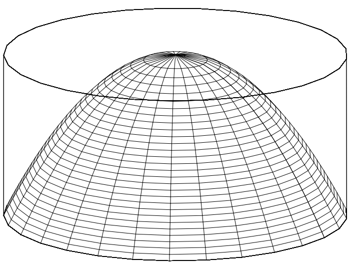
(a) $S = \left(\dfrac{1}{8}\,R, \dfrac{1}{8}\,R, \dfrac{1}{8}\,R\right)$.

(b) $S = \left(\dfrac{3}{8}\,R, \dfrac{3}{8}\,R, \dfrac{3}{8}\,R\right)$.

(c) $S = \left(\dfrac{5}{8}\,R, \dfrac{5}{8}\,R, \dfrac{5}{8}\,R\right)$.

(d) Der Ursprung.

10. Es sei V_Z das Volumen eines gegebenen Kreiszylinders, V_P das Volumen desjenigen Rotationsparaboloids, das mit diesem Zylinder Grundfläche und Höhe gemeinsam hat. Dann gilt



(a) $V_P = \dfrac{1}{3}\,V_Z$.

(b) $V_P = \dfrac{1}{2}\,V_Z$.

(c) $V_P = \dfrac{2}{3}\,V_Z$.

(d) keine der obigen Aussagen.