D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 16
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 7

Mehrfachintegrale und ihre Hauptsubstitutionen

Einsendeschluss: 22. April 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Den Wert des Doppelintegrals

$$\int\int_R e^{2x^2+y^2}\,dA,$$

wobei $R = [0,1] \times [0,2]$, können wir nicht genau analytisch bestimmen. Dieser Wert liegt aber im Intervall

(a) $[-e, 0]$.

(b) $[0, 2]$.

√ (c) $[2, 2e^6]$.

(d) $[2e^6, \infty]$.

Man schätze die Funktion $e^{2x^2+y^2}$ auf dem Gebiet R wie folgt ab:

$$1 = e^0 \leq e^{2+2^2} = e^6,$$

wobei wir verwenden, dass die Exponentialfunktion strikt monoton wachsend ist und auf R wegen $x \in [0,1]$ und $y \in [0,2]$ der Ausdruck $2x^2 + y^2$ in $[0,6]$ liegt. Außerdem ist der Flächeninhalt $\int\int_R dA = 1 \cdot 2 = 2$ und daher gilt

$$2 = \int\int_R dA \leq \int\int_R e^{2x^2+y^2}\,dA \leq \int\int_R e^6\,dA = 2 \cdot e^6.$$

2. Der Schwerpunkt $S = (x, y)$ der zwischen der Parabel $y = -x^2 - 2x$ und der x-Achse gelegenen homogenen Fläche (endlichen Inhalts) ist

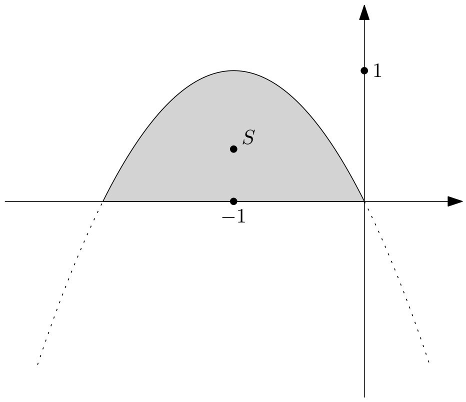
(a) $S = \left(\frac{2}{5}, -1\right)$.

√ (b) $S = \left(-1, \frac{2}{5}\right)$.

(c) $S = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

(d) Der Ursprung.

Der Schwerpunkt $S = (x, y)$ liegt auf der Symmetrieachse der Parabel,



es gilt also $x = -1$. Der Inhalt der begrenzten Fläche ist

$$A = \int_{-2}^{0} \int_{0}^{-x^2-2x} dy\, dx = \int_{-2}^{0} \left(-x^2 - 2x\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

und die Ordinate des Schwerpunktes somit

$$\begin{aligned}\frac{1}{A} \int_{-2}^{0} \int_{0}^{-x^2-2x} y\, dy\, dx &= \frac{3}{4} \int_{-2}^{0} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{0}^{-x^2-2x} dx = \frac{3}{8} \int_{-2}^{0} \left(-x^2 - 2x\right)^2 dx \\ &= \frac{3}{8} \int_{-2}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 4x^2\right) dx = \frac{3}{8} \left(\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{0} \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\right) = \frac{3}{8} \frac{16}{15} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

3. Betrachten Sie den Ringteil D im ersten Quadranten der xy-Ebene, welcher durch die Achsen $x = 0,\ y = 0$ und die Kreise $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9$ bergrenzt wird. Welche der folgenden Parametrisierungen beschreibt das Gebiet in Polarkoordinaten?

(a) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq r \leq 3.$

√ (b) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 1 \leq r \leq 3.$

(c) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq r \leq 9$

(d) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 1 \leq r \leq 9.$

Es ist

$$D = \left\{(x,y)|\ x, y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

Transformation in Polarkoordinaten mit $x = r\cos(\theta)$ und $y = r\sin(\theta)$ liefert

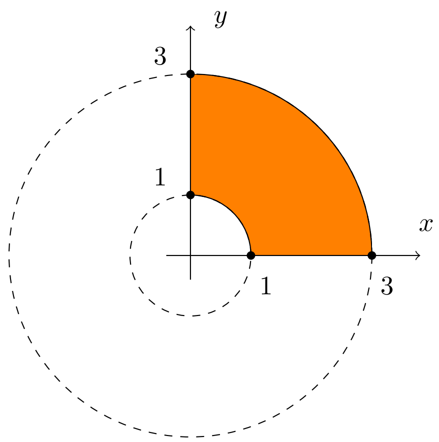
$$r\cos(\theta), r\sin(\theta) \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \cos(\theta), \sin(\theta) \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (zumindest für } \theta \in [0, 2\pi))$$

und

$$1 \leq r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) \leq 9 \ \Leftrightarrow\ 1 \leq r^2 \leq 9.$$

Somit ist

$$D = \left\{(r,\theta) \,\middle|\, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ und } 1 \leq r \leq 3\right\}.$$



4. Unter Verwendung von Polarkoordinaten ist das Integral

$$\int\int_D (x + 4y^2) dA,$$

wobei D die obere Hälfte des Kreises mit Radius 2 um den Ursprung ist, äquivalent zu

(a) $\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \left(\cos(\theta) + 4r\sin^2(\theta)\right) dr\, d\theta.$

√ (b) $\int_0^{\pi} \int_0^2 r^2 \left(\cos(\theta) + 4r\sin^2(\theta)\right) dr\, d\theta.$

(c) $\int_0^{2\pi} \int_0^2 r \left(\cos(\theta) + 4r\sin^2(\theta)\right) dr\, d\theta.$

(d) $\int_0^{\pi} \int_0^2 r \left(\cos(\theta) + 4r\sin^2(\theta)\right) dr\, d\theta.$

Die Transformation in Polarkoordinaten liefert

$$D = \{(r, \theta) |\ 0 \leq r \leq 2, \theta \in [0, \pi]\}$$

mit $x = r\cos(\theta)$ und $y = r\sin(\theta)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int\int_D \left(x + 4y^2\right) dA &= \int_0^{\pi} \int_0^2 \left(r\cos(\theta) + 4r^2\sin^2(\theta)\right) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^2 r^2 \left(\cos(\theta) + 4r\sin^2(\theta)\right) dr\, d\theta.\end{aligned}$$

5. Das Integral der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ über die Menge

$$B = \{(x,y) \mid x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

ist

(a) $\int \int_B f(x,y)\, dx\, dy = \frac{2\pi}{3}$.

√ (b) $\int \int_B f(x,y)\, dx\, dy = \frac{4\pi}{3}$.

(c) $\int \int_B f(x,y)\, dx\, dy = \frac{16\pi}{3}$.

(d) $\int \int_B f(x,y)\, dx\, dy = \frac{32\pi}{3}$.

Man führ einen Wechsel in Polarkoordinaten durch

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \\ dx\, dy &= r\, dr\, d\theta \end{aligned}$$

wobei

$$f(r,\theta) = \sqrt{4 - r^2} \text{ mit } 0 \leq r^2 = x^2 + y^2 \leq 4.$$

Daher ist $r \in [0,2]$ und aus $x, y \geq 0$ folgt $\cos(\theta), \sin(\theta) \geq 0$, also

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int \int_B f(x,y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \sqrt{4 - r^2}\, r\, dr\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\left(4 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-3} \right]_0^2 = \frac{\pi}{2} \left[0 - \frac{4^{\frac{3}{2}}}{-3} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{8}{3} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Alternative: Die Funktion f ist ≥ 0 auf B, und die Menge der Punkte zwischen ihrem Graphen und der xy-Ebene ist ein Viertel der Halbkugel H mit Zentrum O und Radius 2. Das Integral berechnet daher das Volumen eines Achtels der Vollkugel mit Radius r; dieses beträgt $\frac{4}{3}\pi r^3$; also gilt

$$\int_B f(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi 2^3 = \frac{4}{3}\pi.$$

6. Gegeben ist das Integral $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, wo D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ bezeichnet. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integrationen lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

√ (a) $I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx.$

(b) $I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx.$

(c) $I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta.$

(d) $I = \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

Der Integrationsbereich des ersten Integrals ist das Einheitsquadrat im ersten Quadranten mit Ecke im Ursprung. Im zweiten und vierten Integral wird über D in kartesischen, im dritten in Polarkoordinaten integriert.

7. Das Volumen des Körpers E berandet durch $z = 3 + x^2 + y^2$ und $z = 6$ ist

(a) $-\frac{27\pi}{2}.$

(b) $9\pi.$

√ (c) $\frac{9\pi}{2}.$

(d) $\frac{3\pi}{2}.$

Es ist $E = \{(x,y,z) |\ z \leq 6,\ 3 + x^2 + y^2 \leq z\}$. Mit Hilfe von Zylinderkoordinaten erhalten wir

$$z = 3 + x^2 + y^2 = 3 + r^2$$

und mit $z = 6$ folgt $r = \sqrt{3}$. Also ist

$$\begin{aligned} Vol(E) &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_{3+r^2}^{6} r\,dz\,d\theta\,dr = \int_0^{\sqrt{3}} 2\pi \left(3 - r^2\right) r\,dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{4}(3-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \left(0 + \frac{9}{4}\right) = \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

8. Gegeben sei der Punkt $(\rho, \varphi, \theta) = \left(2, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ in Kugelkoordinaten (für die Definition siehe Vorlesungsnotizen). Welchem Punkt entspricht er in kartesischen Koordinaten (x, y, z)?

(a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}\right)$.

(b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

√ (c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$.

(d) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \quad \text{und} \\ z &= \rho \cos(\varphi), \end{aligned}$$

wobei $\varphi \in [0, \pi]$ und $\theta \in [0, 2\pi)$.

9. Der Kugeloktant

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x, y, z \geq 0\}, \qquad R > 0,$$

sei mit der Masse der konstanten Dichte 1 belegt.

Der Schwerpunkt $S = (x, y, z)$ von K ist

(a) $S = \left(\frac{1}{8}\,R, \frac{1}{8}\,R, \frac{1}{8}\,R\right).$

√ (b) $S = \left(\frac{3}{8}\,R, \frac{3}{8}\,R, \frac{3}{8}\,R\right).$

(c) $S = \left(\frac{5}{8}\,R, \frac{5}{8}\,R, \frac{5}{8}\,R\right).$

(d) Der Ursprung.

Die Masse bzw. das Volumen von K ist $V = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^3}{6}$.
Für seine Schwerpunktkoordinaten gilt

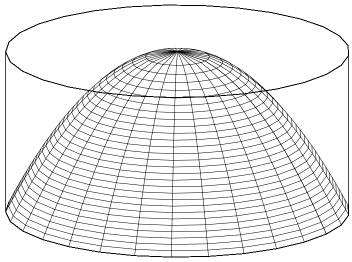
$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\iiint_K x\,dx\,dy\,dz &= \frac{1}{V}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R \rho\sin\varphi\cos\theta\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \rho^3\,d\rho\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi, \\
\frac{1}{V}\iiint_K y\,dx\,dy\,dz &= \frac{1}{V}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R \rho\sin\varphi\sin\theta\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \rho^3\,d\rho\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi, \\
\frac{1}{V}\iiint_K z\,dx\,dy\,dz &= \frac{1}{V}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R \rho\cos\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \rho^3\,d\rho\int_0^{\pi/2}1\,d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi.
\end{aligned}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}
\int_0^R \rho^3\,d\rho = \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R &= \frac{R^4}{4}, \\
\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = \sin\theta\big|_0^{\pi/2} &= 1, \\
\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi &= \frac{\pi}{4}, \\
\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = -\left.\frac{\cos^2\varphi}{2}\right|_0^{\pi/2} &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Alle Komponenten der Schwerpunktes sind also $\frac{1}{V}\frac{R^4}{4}\frac{\pi}{4} = \frac{6}{\pi R^3}\frac{\pi R^4}{16} = \frac{3}{8}\,R.$

10. Es sei V_Z das Volumen eines gegebenen Kreiszylinders, V_P das Volumen desjenigen Rotationsparaboloids, das mit diesem Zylinder Grundfläche und Höhe gemeinsam hat. Dann gilt



(a) $V_P = \frac{1}{3} V_Z$.

√ (b) $V_P = \frac{1}{2} V_Z$.

(c) $V_P = \frac{2}{3} V_Z$.

(d) keine der obigen Aussagen.

Die Gleichung der rotierten Parabel sei $z = ax^2$, $a > 0$, der Zylinder habe den Grundkreisradius $r = \sqrt{\frac{h}{a}}$ und die Höhe h. Dann ist $V_Z = \pi r^2 h = \frac{\pi h^2}{a}$ und

$$\begin{aligned} V_P &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z/a}} r\,dr\,d\theta\,dz = 2\pi \int_0^h \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{\sqrt{z/a}} dz \\ &= \frac{\pi}{a} \int_0^h z\,dz = \frac{\pi}{a} \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^h = \frac{1}{2} \frac{\pi h^2}{a} = \frac{1}{2} V_Z. \end{aligned}$$

Das Resultat geht auf Archimedes zurück.