D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 16
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 8

Kurvenintegrale

Einsendeschluss: 29. April 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Die Arbeit A eines Vektorfeldes $\vec{F}$ längs des Geradenstücks von $(1, 0, 0)$ nach $(-1, -1, -1)$ sei 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit B von $\vec{F}$ längs des Geradenstücks von $(-1, -1, -1)$ nach $(1, 0, 0)$ berechnet?

(a) Die Arbeit B beträgt ebenfalls 5.

(b) Die Arbeit B beträgt 0.

√ (c) Die Arbeit B beträgt -5.

(d) Die Arbeit B lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.

Für die Gegenrichtung ist das Linienintegral gleich minus dem vorherigen Wert.

2. Was ist die Masse des geradlinigen Filaments von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 2, 3)$ und mit der Dichtefunktion $\delta(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{14}}(y + 1)$?

(a) 0.

(b) 1.

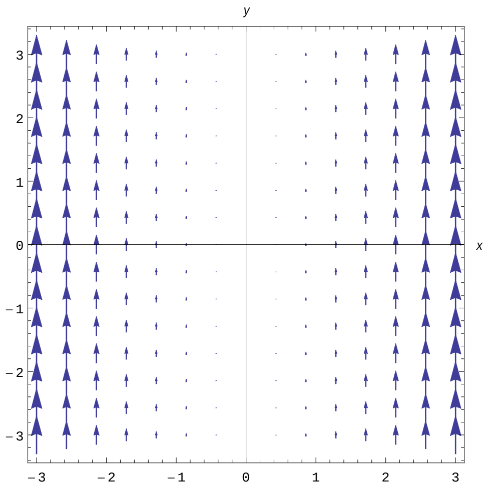
√ (c) 2.

(d) 3.

Man wählt für die Gerade die Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$ und somit ist $\left|\dot{\vec{r}}(t)\right| = \sqrt{1 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$. Dann ist die Masse des Filaments

$$\mathcal{M} = \int_0^1 \delta(\vec{r}(t)) \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| dt = \int_0^1 (2t + 1)dt = 2.$$

3. Welches Vektorfeld passt zu dieser Zeichnung?



√ (a) $\mathbf{F} = (0, x^2)$.

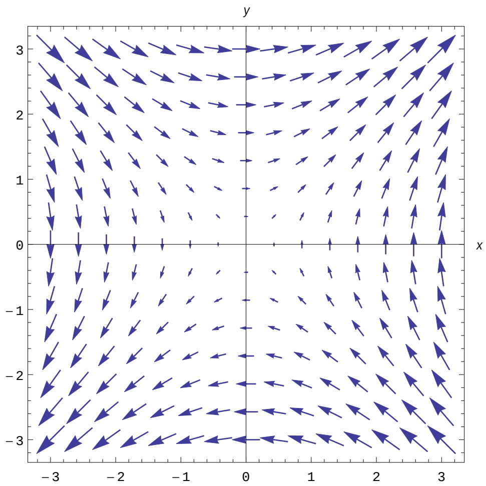
(b) $\mathbf{F} = (x - y, x)$.

(c) $\mathbf{F} = (2x, -y)$.

(d) $\mathbf{F} = (y, x)$.

Das Vektorfeld zeigt nur in y-Richtung. *Bemerkung:* Außerdem wirkt es so, als würde es nicht von y abhängen und die Stärke nimmt mit dem Betrag von x zu.

4. Welches Vektorfeld passt zu dieser Zeichnung?



(a) $\mathbf{F} = (0, x^2)$.

(b) $\mathbf{F} = (x - y, x)$.

(c) $\mathbf{F} = (2x, -y)$.

√ (d) $\mathbf{F} = (y, x)$.

Für $x = y$ zeigt das Vektorfeld entlang des Ortsvektors.

5. Das Vektorfeld $\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y,x)$ ...

(a) ... ist konstant in Länge und Richtung auf dem Einheitskreis.

$\surd$ (b) ... ist konstant in Länge aber nicht in Richtung auf dem Einheitskreis.

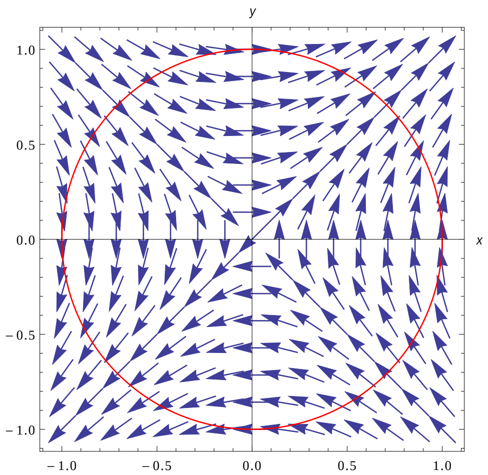
(c) ... ist konstant in Richtung aber nicht in Länge auf dem Einheitskreis.

(d) ... ist weder konstant in Länge noch in Richtung auf dem Einheitskreis.

Auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ ist der Betrag von $\vec{F}$

$$|\vec{F}| = \sqrt{y^2 + x^2} = 1$$

also konstant, aber die Richtung (y, x) ist vom Punkt abhängig.



6. Das Vektorfeld $\mathbf{F} = (y, x)$ hat ...

√ (a) ... keine Zirkulation entlang und Fluss Null durch den Einheitskreis.

(b) ... keine Zirkulation entlang aber Fluss $\neq 0$ durch den Einheitskreis.

(c) ... keinen Fluss durch aber Zirkulation $\neq 0$ entlang des Einheitskreises.

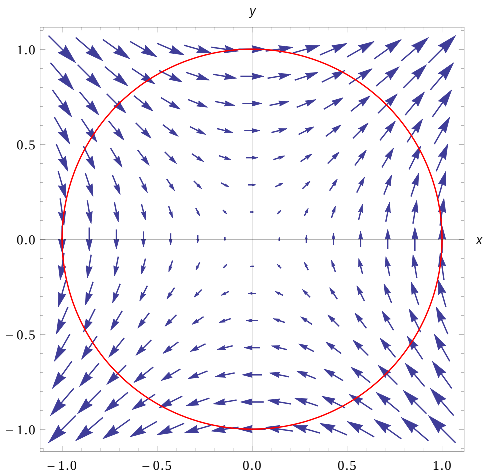
(d) ... sowohl Zirkulation $\neq 0$ entlang als auch Fluss $\neq 0$ durch den Einheitskreis.

Der Einheitskreis C ist parametrisiert durch $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Damit hat der Einheitskreis Tangentialvektor $\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, der nach außen orientierte Normalenvektor ist damit $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.
Die Zirkulation berechnet sich durch

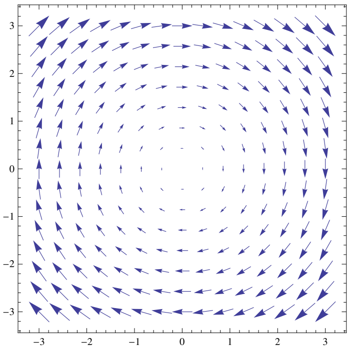
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{t})) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 0, \end{aligned}$$

da $\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$.
Der Fluss von innen nach außen beträgt

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{n} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt = \sin^2 t \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$



7. Es sei $\vec{F}$ das in folgender Abbildung dargestellte Vektorfeld:



Ferner seien

- C_1 die gerade Verbindungsstrecke von $(-3,-3)$ nach $(-3,3)$ und
- C_2 der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis vom Radius 2 um den Koordinatenursprung.

Dann gilt:

(a) Beide Integrale $\int\limits_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\int\limits_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ sind positiv.

(b) Beide Integrale $\int\limits_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\int\limits_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ sind negativ.

√ (c) Das Integral $\int\limits_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ist positiv, das Integral $\int\limits_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ist negativ.

(d) Das Integral $\int\limits_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ist negativ, das Integral $\int\limits_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ist positiv.

Das Integral $\int_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $i=1,2$, ist definiert als $\int_a^b \vec{F}(\gamma_i(t))\cdot\dot{\vec{\gamma}}_i(t)\,dt$, wobei

$$\vec{\gamma}_i : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad i = 1,2,$$

eine Parametrisierung von C_i ist. Für die Integranden gilt

$$\vec{F}(\gamma_i(t))\cdot\dot{\vec{\gamma}}_i(t) = \left|\vec{F}(\gamma_i(t))\right|\left|\dot{\vec{\gamma}}_i(t)\right|\cos\varphi_i,$$

wobei φ_i den Winkel zwischen $\vec{F}(\gamma_i(t))$ und $\dot{\vec{\gamma}}_i(t)$ bezeichnet. Dieser ist

- entlang der Kurve C_1 stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$, so dass $\cos\varphi_1 > 0$, während
- entlang der Kurve C_2 das Vektorfeld und der Tangentialvektor stets in die entgegengestzte Richtung weisen, so dass $\varphi_2 = \pi$ und $\cos\varphi_2 = -1 < 0$.

8. Wie lautet der Gradient der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto xy$?

(a) $\nabla f(x, y) = x + y$

(b) $\nabla f(x, y) = y - x$

(c) $\nabla f(x, y) = (x, y)^T$

√ (d) $\nabla f(x, y) = (y, x)^T$

Der Gradient von f ist $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

9. Betrachte das Vektorfeld $\vec{F}(x, y) = (3x^2, 1)^\top$ und die Skalarfelder

$$\phi_1(x, y) = x^3 + y \quad \text{und} \quad \phi_2(x, y) = y + x^3 + 100.$$

Dann gilt

√ (a) ϕ_1 und ϕ_2 sind beide Skalarpotentiale für $\vec{F}$.

(b) ϕ_1 ist ein Skalarpotential für $\vec{F}$ aber ϕ_2 ist keines.

(c) ϕ_2 ist ein Skalarpotential für $\vec{F}$ aber ϕ_1 ist keines.

(d) weder ϕ_1 noch ϕ_2 sind Skalarpotentiale für $\vec{F}$.

Man sieht leicht, dass

$$\nabla \phi_{1,2}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10. Sei $\vec{F} = \nabla f$, wobei $f(x, y, z) = e^{y^2+z} \cos(xz)$. Was ist die verrichtete Arbeit von $\vec{F}$ bei der Bewegung eines Teilchens entlang der Schraubenlinie

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ?$$

(a) $e^{2\pi} + 1$.

√ (b) $e^{2\pi} - 1$.

(c) $-e^{2\pi} + 1$.

(d) $-e^{2\pi} - 1$.

Der Hauptsatz für Kurvenintegrale liefert für ein Gradientenfeld

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt = f(\vec{r}(2\pi)) - f(\vec{r}(0)) \\ &= f(1, 0, 2\pi) - f(1, 0, 0) = e^{2\pi} \cos(2\pi) - e^0 \cos(0) = e^{2\pi} - 1. \end{aligned}$$