D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 16
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 9

Der Satz von Green und Parametrisierungen von Flächen im Raum

Einsendeschluss: 6. Mai 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welcher der folgenden Buchstaben ist einfachzusammenhängend?

(a) A.

(b) B.

(c) C.

(d) D.

2. Welches der folgenden Gebiete ist **nicht** einfachzusammenhängend?

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = x^2\}$.

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } y \geq 0\}$.

(c) $C = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 \leq r \leq 2, \text{ und } 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x + 1)^2 + (y - 3)^2 \geq 4\}$.

3. Welche der folgenden Mengen in $\mathbb{R}^3$ ist **nicht** einfachzusammenhängend?

(a) Die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(b) Der Körper definiert durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \geq 1$.

(c) Der Körper zwischen zwei Sphären $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

(d) Der ganze Raum ohne den Ursprung $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

4. Welches der folgenden Vektorfelder $\vec{F}$ besitzt ein Potential auf $\mathbb{R}^2$?

(a) $\vec{F}(x,y) = (x-y,\, x-y)^T$.

(b) $\vec{F}(x,y) = (x^2-y,\, x^3+2xy)^T$.

(c) $\vec{F}(x,y) = (x^3+2xy,\, x^2-y)^T$.

(d) $\vec{F}(x,y) = (x^3-xy^2,\, x^2y-y^5)^T$.

5. Betrachte das Vektorfeld

$$\vec{H}(x,y) = \frac{(-y,x)^T}{x^2+y^2}.$$

In welchem Gebiet ist $\vec{H}$ **kein** Gradientenfeld?

(a) $A = \{(x,y):\ 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$ (ein Quadrat).

(b) $B = \big\{(x,y):\ 1 \le x^2+y^2 \le 2\big\}$ (ein Kreisring).

(c) $C = \{(x,y):\ x > 0\}$ (die rechte Halbebene).

(d) $D = \{(x,y):\ y > 0\}$ (die obere Halbebene).

6. Was ist die von dem Feld

$$\vec{F}(x,y) = 2xy^3\,\vec{\imath} + 4x^2y^2\,\vec{\jmath}$$

bei der Bewegung eines Teilchens entlang des Randes des "dreieckigen" Gebietes zwischen der x-Achse, der Gerade $x=1$ und der Kurve $y=x^3$ im ersten Quadranten verrichtete Arbeit ?

Hinweis: Satz von Green

(a) $\dfrac{2}{33}$.

(b) $\dfrac{2}{15}$.

(c) $\dfrac{14}{33}$.

(d) $\dfrac{14}{15}$.

7. Es sei C die positiv orientierte Randkurve eines ebenen Gebiets G.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ mit $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.

(b) Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ mit $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ mit $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

(d) Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ mit $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - 4y + 2 \\ 2xy - 3x + 1 \end{pmatrix}$.

8. Drei der folgenden Parametrisierungen stellen die gleiche Fläche dar. Welche Parametrisierung stellt eine **andere** Fläche dar?

(a) $\vec{r}(u, v) = \left(u\cos(v), \sqrt{1-u^2}, u\sin(v)\right)^\top, \ 0 \leq u < 1, \ 0 \leq v < 2\pi.$

(b) $\vec{r}(u, v) = \left(u\sin(v), \sqrt{1-u^2}, u\cos(v)\right)^\top, \ 0 \leq u < 1, \ 0 \leq v < 2\pi.$

(c) $\vec{r}(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)^\top, \ 0 \leq x^2 + y^2 < 1.$

(d) $\vec{r}(x, y) = \left(x, \sqrt{1-x^2-y^2}, y\right)^\top, \ 0 \leq x^2 + y^2 < 1.$

9. Betrachte eine Parametrisierung einer Sphäre vom Radius R durch Kugelkoordinaten

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ R\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ R\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Welcher (φ, θ)-Bereich stellt **keine** Halbsphäre dar?

(a) $0 \leq \varphi \leq \pi, \ 0 \leq \theta \leq \pi.$

(b) $0 \leq \varphi \leq \pi, \ \pi \leq \theta \leq 2\pi.$

(c) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq \theta \leq \pi.$

(d) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

10. Sei A eine Fläche im Raum, die einerseits durch eine Parametrisierung $\vec{r}(u,v)$ und andererseits als Niveaufläche einer Funktion $f(x,y,z)$ gegeben ist. Wir betrachten einen festen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf der Fläche A, der den Ortsvektor $\vec{r}(u_0, v_0)$ für geeignete u_0 und v_0 besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist dann **falsch**? Die Vektoren

$$\nabla f\big|_{P_0} \text{ und } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\bigg|_{(u_0,v_0)} \ldots$$

(a) ... sind parallel.

(b) ... stehen senkrecht aufeinander.

(c) ... stehen beide senkrecht zur Fläche A.

(d) ... können unterschiedlicher Länge sein.