MC-Serie 10

Einsendeschluss: 13. Mai 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Der Flächeninhalt der parabolischen Schale

$$y = x^2 + z^2, \ y \leq 1$$

ist

(a) $\frac{\pi}{6}\left(3\sqrt{3}-1\right)$.

(b) $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

(c) $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$.

(d) $\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)$.

2. Die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 = 1, \, z \geq 0\right\}$$

sei mit einer Masse der Dichte $\delta(x,y,z) = 2z$ belegt.

Die Gesamtmasse der Fläche beträgt

(a) 0.

(b) π.

(c) 2π.

(d) 4π.

3. Die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2yz \\ x^2+z^2 \\ x^3y+xyz \end{pmatrix}$$

ist

(a) $\begin{pmatrix} 3x^2y - yz \\ -3x^2z \\ x^3 - xz + 2z \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2x \\ x^3 - xz + 2z \\ -yz \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} x^3 + xz - 2z \\ 3x^2y + yz \\ 2x \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} x^3 + xz - 2z \\ -yz \\ 2x - 3x^2z \end{pmatrix}$.

4. Betrachte die Vektorfelder

$$\begin{aligned} \vec{D}(x,y,z) &= \tfrac{(x,y,z)^\top}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad && \text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0) \text{ und} \\ \vec{H}(x,y,z) &= \tfrac{(-y,x,0)^\top}{x^2+y^2}, \quad && \text{für } (x,y,z) \text{ mit } (x,y) \neq (0,0). \end{aligned}$$

Dann ist

(a) nur $\vec{D}$ wirbelfrei.

(b) nur $\vec{H}$ wirbelfrei.

(c) sowohl $\vec{D}$ als auch $\vec{H}$ wirbelfrei.

(d) weder $\vec{D}$ noch $\vec{H}$ wirbelfrei.

Hinweis: Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen sorgfältig!

5. Betrachte nochmals die Vektorfelder

$$\begin{aligned}\vec{D}(x,y,z) &= \tfrac{(x,y,z)^\top}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, &&\text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0) \text{ und}\\ \vec{H}(x,y,z) &= \tfrac{(-y,x,0)^\top}{x^2+y^2}, &&\text{für } (x,y,z) \text{ mit } (x,y) \neq (0,0).\end{aligned}$$

Dann ist

(a) nur $\vec{D}$ quellenfrei.

(b) nur $\vec{H}$ quellenfrei.

(c) sowohl $\vec{D}$ als auch $\vec{H}$ quellenfrei.

(d) weder $\vec{D}$ noch $\vec{H}$ quellenfrei.

6. Es sei f eine skalare Funktion, $\vec{F}$ ein Vektorfeld, beide dreimal stetig differenzierbar.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $\nabla\left(\operatorname{div}\vec{F}\right) = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right)^T$.

(b) $\operatorname{div}\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

(c) $\operatorname{div}\left(f\vec{F}\right) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div}\vec{F}$.

(d) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\left(\nabla f \times \vec{F}\right) = 0$.

7. Betrachte das Vektorfeld

$$\vec{G}(x,y) = \frac{(-y+2, x-1)^T}{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

im Definitionsbereich $(x,y) \neq (1,2)$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $\operatorname{rot}\vec{G} = \vec{0}$ aber $\vec{G}$ ist kein Gradientenfeld.

(b) $\operatorname{rot}\vec{G} = \vec{0}$ und $\vec{G}$ ist ein Gradientenfeld.

(c) $\operatorname{rot}\vec{G} \neq \vec{0}$ und $\vec{G}$ ist ein Gradientenfeld.

(d) $\operatorname{rot}\vec{G} \neq \vec{0}$ aber $\vec{G}$ ist kein Gradientenfeld.

8. Drei der folgenden Parametrisierungen des Einheitskreises stellen die gleiche Richtung dar. Welche Parametrisierung stellt die Gegenrichtung dar?

(a) $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$, $t \in [0, 2\pi)$.

(b) $\vec{r}(t) = (\sin(t), \cos(t))^T$, $t \in [0, 2\pi)$.

(c) $\vec{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))^T$, $t \in [0, \pi)$.

(d) $\vec{r}(t) = (\sin(2\pi - t), \cos(2\pi - t))^T$, $t \in [0, 2\pi)$.

9. Sei A die untere Halbsphäre

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \ z \leq 0$$

nach außen orientiert (d.h. $\vec{n}(0, 0, -2) = (0, 0, -1)$).
Welche ist ihre Randkurve mit der induzierten Orientierung?

(a) Ein Kreis vom Radius 2 in der xy-Ebene im positiven (oder Gegenuhrzeiger-) Sinn bei Blick von oben.

(b) Ein Kreis vom Radius 2 in der xy-Ebene im negativen (oder Uhrzeiger-) Sinn bei Blick von oben.

(c) Ein Kreis vom Radius $\sqrt{2}$ in der xy-Ebene im positiven (oder Gegenuhrzeiger-) Sinn bei Blick von oben.

(d) Ein Kreis vom Radius $\sqrt{2}$ in der xy-Ebene im negativen (oder Uhrzeiger-) Sinn bei Blick von oben.

10. Die Arbeit, des Vektorfelds

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(x^2 + z^2, 4y - z, 2xz + 2y\right)^T$$

entlang des positiv orientierten Einheitskreises in der (y, z)-Ebene ist

(a) π.

(b) 3π.

(c) $-\pi$.

(d) -3π.

Hinweis: Satz von Stokes.