D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 16
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 10

Einsendeschluss: 13. Mai 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Der Flächeninhalt der parabolischen Schale

$$y = x^2 + z^2, \ y \le 1$$

ist

(a) $\frac{\pi}{6}\left(3\sqrt{3}-1\right)$.

√ (b) $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

(c) $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$.

(d) $\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)$.

Wir parametrisiern mittels Zylinderkoordinaten die Fläche wie folgt

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u^2 \\ u\sin(v) \end{pmatrix}, \ 0 \le u \le 1, \ 0 \le v < 2\pi.$$

Ein Normalenvektor zur Fläche ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| &= \left|\begin{pmatrix} \cos(v) \\ 2u \\ \sin(v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ 0 \\ u\cos(v) \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 2u^2\cos(v) \\ -u \\ 2u^2\sin(v) \end{pmatrix}\right| = u\sqrt{4u^2+1}. \end{aligned}$$

Dann ist der Flächeninhalt der Schale gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \iint_A \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{4u^2+1}\,du\,dv \\ &= \left[2\pi\left(4u^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right). \end{aligned}$$

2. Die Fläche

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

sei mit einer Masse der Dichte $\delta(x,y,z) = 2z$ belegt.

Die Gesamtmasse der Fläche beträgt

(a) 0.

(b) π.

√ (c) 2π.

(d) 4π.

Wir parametrisieren $\mathcal{F}$ durch

$$\vec{p}(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1-r^2}\right), \qquad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\vec{p}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}\,\vec{p}(r,\theta) = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\vec{p}(r,\theta) \times \frac{\partial}{\partial \theta}\,\vec{p}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} \\ \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}} \\ r \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial r}\,\vec{p}(r,\theta) \times \frac{\partial}{\partial \theta}\,\vec{p}(r,\theta)\right| &= \sqrt{\frac{r^4\cos^2\theta}{1-r^2} + \frac{r^4\sin^2\theta}{1-r^2} + r^2} \\ &= \sqrt{\frac{r^4}{1-r^2} + r^2} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}. \end{aligned}$$

und somit $\displaystyle\iint_{\mathcal{F}} \delta\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\sqrt{1-r^2}\,\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 2r\,dr = 2\pi.$

3. Die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2yz \\ x^2+z^2 \\ x^3y+xyz \end{pmatrix}$$

ist

(a) $\begin{pmatrix} 3x^2y-yz \\ -3x^2z \\ x^3-xz+2z \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2x \\ x^3-xz+2z \\ -yz \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} x^3+xz-2z \\ 3x^2y+yz \\ 2x \end{pmatrix}$.

√ (d) $\begin{pmatrix} x^3+xz-2z \\ -yz \\ 2x-3x^2z \end{pmatrix}$.

Man berechnet

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \nabla\times\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3+xz-2z \\ -yz \\ 2x-3x^2z \end{pmatrix}.$$

4. Betrachte die Vektorfelder

$$\begin{aligned}
\vec{D}(x,y,z) &= \frac{(x,y,z)^\top}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, && \text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0) \text{ und} \\
\vec{H}(x,y,z) &= \frac{(-y,x,0)^\top}{x^2+y^2}, && \text{für } (x,y,z) \text{ mit } (x,y) \neq (0,0).
\end{aligned}$$

Dann ist

(a) nur $\vec{D}$ wirbelfrei.

(b) nur $\vec{H}$ wirbelfrei.

√ (c) sowohl $\vec{D}$ als auch $\vec{H}$ wirbelfrei.

(d) weder $\vec{D}$ noch $\vec{H}$ wirbelfrei.

Hinweis: Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen sorgfältig!
Man überprüft, dass es sich bei $\vec{D}$ um ein Gradientenfeld handelt, woraus folgt, dass das Vektorfeld wirbelfrei ist. Nämlich ist

$$\vec{D}(x,y,z) = \nabla\left(-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Alternativ kann man auch direkt die Rotation berechnen.

Für das Vektorfeld $\vec{H}$ berechnet man die Rotation und erhält

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] - \left[\frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \end{pmatrix} = 0.$$

5. Betrachte nochmals die Vektorfelder

$$\begin{aligned}\vec{D}(x,y,z) &= \frac{(x,y,z)^\top}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, && \text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0) \text{ und}\\ \vec{H}(x,y,z) &= \frac{(-y,x,0)^\top}{x^2+y^2}, && \text{für } (x,y,z) \text{ mit } (x,y) \neq (0,0).\end{aligned}$$

Dann ist

(a) nur $\vec{D}$ quellenfrei.

(b) nur $\vec{H}$ quellenfrei.

√ (c) sowohl $\vec{D}$ als auch $\vec{H}$ quellenfrei.

(d) weder $\vec{D}$ noch $\vec{H}$ quellenfrei.

Berechnung der Divergenz liefert

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{D} = \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z} &= \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\\ &+ \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\left(-\frac{3}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\\ &= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{div}\vec{H} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} + 0 = 0.$$

6. Es sei f eine skalare Funktion, $\vec{F}$ ein Vektorfeld, beide dreimal stetig differenzierbar.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

√ (a) $\nabla\left(\operatorname{div}\vec{F}\right) = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right)^T$.

(b) $\operatorname{div}\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

(c) $\operatorname{div}\left(f\vec{F}\right) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div}\vec{F}$.

(d) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\left(\nabla f \times \vec{F}\right) = 0$.

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}$ ist das Skalarfeld

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Dann ist $\nabla\left(\operatorname{div}\vec{F}\right)$ das Vektorfeld

$$\nabla\left(\operatorname{div}\vec{F}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{div}\vec{F}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{div}\vec{F}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\operatorname{div}\vec{F}\right) \end{pmatrix},$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{div}\vec{F}\right) = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}$$

und analog für die anderen beiden Terme. Deshalb ist die erste Aussage falsch. Falls $\vec{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)^\top$ ist

$$\operatorname{div}\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Die dritte Aussage folgt aus der Produktregel für Ableitungen. Es ist stets $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{G} = 0$ für ein (zweimal stetig differnzierbares) Vektorfeld $\vec{G}$.

7. Betrachte das Vektorfeld

$$\vec{G}(x,y) = \frac{(-y+2, x-1)^T}{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

im Definitionsbereich $(x, y) \neq (1, 2)$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

√ (a) $\operatorname{rot} \vec{G} = \vec{0}$ aber $\vec{G}$ ist kein Gradientenfeld.

(b) $\operatorname{rot} \vec{G} = \vec{0}$ und $\vec{G}$ ist ein Gradientenfeld.

(c) $\operatorname{rot} \vec{G} \neq \vec{0}$ und $\vec{G}$ ist ein Gradientenfeld.

(d) $\operatorname{rot} \vec{G} \neq \vec{0}$ aber $\vec{G}$ ist kein Gradientenfeld.

Man berechnet

$$\operatorname{rot} \vec{G}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-(x-1)^2+(y-2)^2}{((x-1)^2+(y-2)^2)^2} - \frac{-(x-1)^2+(y-2)^2}{((x-1)^2+(y-2)^2)^2} \end{pmatrix} = 0.$$

Da das Gebiet, wo $\vec{G}$ definiert ist, nicht einfachzusammenhängend ist, ist die Bedingung $\operatorname{rot} \vec{G} = 0$ jedoch nicht ausreichend um ein Gradientenfeld zu garantieren. Man berechnet das Linienintegral entlang des Kreises um $(1, 2)$ mit Radius 1,

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) \\ 2 + \sin(t) \end{pmatrix}, \ 0 \leq t < 2\pi$$

und erhält

$$\int_0^{2\pi} \vec{G}(1 + \cos(t), 2 + \sin(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = 2\pi \neq 0.$$

Somit handelt es sich nicht um ein Gradientenfeld.

8. Drei der folgenden Parametrisierungen des Einheitskreises stellen die gleiche Richtung dar. Welche Parametrisierung stellt die Gegenrichtung dar?

(a) $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$, $t \in [0, 2\pi)$.

√ (b) $\vec{r}(t) = (\sin(t), \cos(t))^T$, $t \in [0, 2\pi)$.

(c) $\vec{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))^T$, $t \in [0, \pi)$.

(d) $\vec{r}(t) = (\sin(2\pi - t), \cos(2\pi - t))^T$, $t \in [0, 2\pi)$.

Die erste Parametrisierung stellt den positiv orientierten Einheitskreis dar. Ebenso die dritte Parametrisierung, wobei die Umlaufgeschwindigkeit verdoppelt ist.
Eine Parametrisierung des negativ orientierten Einheitskreises ist

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), -\sin(t))^T , \ t \in [0, 2\pi).$$

Wir verwenden die trigonometrischen Eigenschaften

$$\begin{aligned}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(t), \ \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t)\\ \sin(2\pi - t) &= -\sin(t), \quad \cos(2\pi - t) = \cos(t)\end{aligned}$$

Dann sehen wir, dass es sich bei der zweiten Parametrisierung um eine um $-\frac{\pi}{2}$ phasenverschobene Parametrisierung des negativ orientierten Einheitskreises handelt. Ausserdem sieht man, dass es sich bei der letzten Parametrisierung ebenfalls um den um $+\frac{\pi}{2}$ phasenverschobenen positiv orientierten Einheitskreis handelt.
Alternativ: Man könnte auch die Arbeit des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y) = \frac{(-y, x)^T}{x^2 + y^2}$$

entlang der Kurven berechnen. Diejenigen, eine positive Arbeit liefern, sind im positiven Sinne orientiert, die anderen im negativen. Z.B. erhält man für b):

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}}_{=\gamma'(t)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}_{=\vec{F}(\gamma(t))} dt = \int_0^{2\pi} (-1)\, dt = -2\pi < 0$$

9. Sei A die untere Halbsphäre

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \; z \leq 0$$

nach außen orientiert (d.h. $\vec{n}(0,0,-2) = (0,0,-1)$).
Welche ist ihre Randkurve mit der induzierten Orientierung?

(a) Ein Kreis vom Radius 2 in der xy-Ebene im positiven (oder Gegenuhrzeiger-) Sinn bei Blick von oben.

(b) Ein Kreis vom Radius 2 in der xy-Ebene im negativen (oder Uhrzeiger-) Sinn bei Blick von oben.

(c) Ein Kreis vom Radius $\sqrt{2}$ in der xy-Ebene im positiven (oder Gegenuhrzeiger-) Sinn bei Blick von oben.

√ (d) Ein Kreis vom Radius $\sqrt{2}$ in der xy-Ebene im negativen (oder Uhrzeiger-) Sinn bei Blick von oben.

Mit der Gleichung für eine Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ergibt sich, dass es sich um eine Südhalbsphäre vom Radius $r = \sqrt{2}$ handelt und die Randkurve

$$x^2 + y^2 = 2, \; z = 0$$

ein Kreis vom Radius $\sqrt{2}$ ist. Bei Blick auf den Kreis der Randkurve von oben müsste der Normalenvektor für die Gegenuhrzeiger-Richtung nach oben zeigen, da aber $\vec{\mathcal{N}}(0,0,-2) = (0,0,-1)$, handelt es sich um den Uhrzeigersinn.

10. Die Arbeit, des Vektorfelds

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 + z^2, 4y - z, 2xz + 2y\right)^T$$

entlang des positiv orientierten Einheitskreises in der (y,z)-Ebene ist

(a) π.

√ (b) 3π.

(c) $-\pi$.

(d) -3π.

Hinweis: Satz von Stokes.
Sei E die Einheitskreisscheibe in der (y,z)–Ebene mit Rand $\Gamma = \partial E$. Wir berechnen

$$\operatorname{rot} \vec{F}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 2z - 2z \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ auf E, mit dem Γ eine Rechtsschraube bildet, ist $(1,0,0)$.
Nach dem Satz von Stokes ist die gesuchte Arbeit A gegeben durch

$$A = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_E \left(\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\right) dA = \iint_E \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dA = 3 \underbrace{\iint_E dA}_{=\text{Fläche von } E = \pi} = 3\pi.$$

Damit ist b) die richtige Antwort.