D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 16
Dr. Ana Cannas

MC-Serie 11

Einsendeschluss: 20. Mai 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Was ist der Fluss des Radiusvektors

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

von innen nach außen durch die Kugeloberfläche vom Radius R um den Ursprung, beschrieben durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ ?$$

(a) Null.

(b) $3R^2$.

(c) Dreimal der Flächeninhalt der Kugeloberfläche.

√ (d) Dreimal das Volumen der Kugel.

Da die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ berandet, gilt mit dem Satz von Gauß:

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2=R^2\}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \int_{\{x^2+y^2+z^2\leq R^2\}} \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV = \int_{\{x^2+y^2+z^2\leq R^2\}} 3 \, dV$$
$$= 3 \times \text{Volumen der Kugel.}$$

2. Welche ist die Fundamentalperiode der Funktion

$$f(x) = \cos(2x)\ ?$$

(a) 0.

√ (b) π.

(c) 2π.

(d) 4π.

Da die Cosinus-Funktion 2π-periodisch ist, gilt

$$f(x+\pi) = \cos\big(2(x+\pi)\big) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x) = f(x),$$

d.h. f ist π-periodisch. Somit ist die Fundamentalperiode von f höchstens π. Ist andererseits p eine Periode von f, so gilt:

$$\cos(x+2p) = f(\frac{x}{2}+p) = f(\frac{x}{2}) = \cos(x),$$

d.h. $2p$ ist eine Periode des Cosinus. Da die Fundamentalperiode des Cosinus 2π ist, kann die Fundamentalperiode von f nicht kleiner als $\frac{2\pi}{2} = \pi$ sein. Somit ist die Fundamentalperiode von f gleich π.

3. Welche ist die Fundamentalperiode der Funktion

$$f(x) = \cos(\frac{2\pi x}{k})\ ?$$

(a) $\frac{1}{k}$.

√ (b) k.

(c) $\frac{2\pi}{k}$.

(d) $\frac{k}{2\pi}$.

Wie in der vorigen Aufgabe kann man argumentieren, dass die Fundamentalperiode von gerade $\frac{k}{2\pi}$ mal die Fundamentalperiode des Cosinus ist. Somit ist die Fundamentalperiode von f gleich $2\pi \cdot \frac{k}{2\pi} = k$.

4. Welche ist die Fundamentalperiode der Funktion

$$f(x) = \big(\sin(x)\big)^2 \text{ ?}$$

(a) $\frac{\pi}{2}$.

√ (b) π.

(c) 2π.

(d) 4π.

Da Sinus 2π-periodisch ist, ist auch f 2π-periodisch:

$$f(x+2\pi) = \big(\sin(x+2\pi)\big)^2 = \big(\sin(x)\big)^2 = f(x).$$

Damit ist die Fundamentalperiode p von f also gleich $\frac{2\pi}{k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Andererseits gilt

$$f(p) = f(0) = 0$$

und $f(x) > 0$ für $0 < x < \pi$, sodass also $p \geq \pi$ ist. Folglich kann die Fundamentalperiode von f nur π oder 2π sein. Wenn f also π-periodisch ist, ist $p = \pi$. Und in der Tat ist dies der Fall, es gilt nämlich für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \big(\sin(x+\pi)\big)^2 = \big(\sin(x)\underset{=-1}{\underline{\cos(\pi)}} + \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\cos(x)\big)^2 \\ &= \big(-\sin(x)\big)^2 = \big(\sin(x)\big)^2\big) = f(x). \end{aligned}$$

5. alperiode der Funktion

$$f(x) = \sin(x)\cos(x) \quad ?$$

(a) $\frac{\pi}{2}$.

√ (b) π.

(c) 2π.

(d) 4π.

Es gilt $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ und $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, das kann man zum Beispiel durch Betrachtung der Graphen sehen. Somit ist

$$\sin(x+\pi)\cos(x+\pi) = (-\sin(x))(-cos(x)) = \sin(x)\cos(x).$$

Durch Verwendung von trigonometrischen Formel kann man ermitteln, dass $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ und da die Fundamentalperiode von $\sin(x)$ genau 2π ist, hat $\sin(2x)$ die Fundamentalperiode π.

6. Welche Funktion ist gerade?

√ (a) $\cosh x$.

$\cosh(-x) = \cosh(x)$.

(b) $\sinh x$.

$\sinh x$ ist ungerade, denn $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

(c) $\cos(x) + \sin(x)$.

$\cos(x)+\sin(x)$ ist weder gerade noch ungerade, denn $\cos(-x)+\sin(-x) = \cos(x) - \sin(x)$.

(d) $\cos(x) - \sin(x)$.

$\cos(x)-\sin(x)$ ist weder gerade noch ungerade, denn $\cos(-x)-\sin(-x) = \cos(x) + \sin(x)$.

7. Welche Aussage ist **falsch**?

(a) Eine Summe von geraden Funktionen ist stets gerade.

Für f und g gerade gilt $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ und somit ist die Summe ebenfalls gerade.

(b) Eine Summe von ungeraden Funktionen ist stets ungerade.

Für f und g ungerade gilt $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f + g)(x)$ und somit ist die Summe ebenfalls ungerade.

(c) Ein Produkt von geraden Funktionen ist stets gerade.

Für f und g gerade gilt $(f\cdot g)(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot g(x) = (f\cdot g)(x)$ und somit ist das Produkt ebenfalls gerade.

√ (d) Ein Produkt von ungeraden Funktionen ist stets ungerade.

Für f und g ungerade gilt $(f\cdot g)(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = (-f(x))\cdot(-g(x)) = (f \cdot g)(x)$ und somit ist ein Produkt von zwei ungeraden Funktionen stets eine gerade Funktion. Insbesondere ist das Produkt von n ungeraden Funktion immer eine gerade Funktion für n gerade und eine ungerade Funktion für n ungerade.

8. Welche Aussage über Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist **falsch**?

(a) Die Verkettung $f(g(x))$ zweier gerader Funktionen ist gerade.

(b) Die Verkettung $f(g(x))$ zweier ungerader Funktionen ist ungerade.

(c) Die Nullfunktion $f(x) \equiv 0$ ist die einzige Funktion, die gleichzeitig gerade und ungerade ist.

√ (d) Die konstanten Funktionen von der Form $f(x) \equiv c$ mit $c \neq 0$ sind weder gerade noch ungerade.

- Die Verkettung zweier gerader Funktionen f und g ist gerade, denn für $h(x) = f(g(x))$ gilt:
$$h(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = h(x).$$
Daher ist (a) wahr.

- Genauso verhält es sich, die Funktionen f und g ungerade sind. Für $h(x) = f(g(x))$ gilt dann:
$$h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -h(x).$$
Deshalb gilt Aussage (b).

- Wenn eine Funktion f sowohl gerade als auch ungerade ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:
$$-f(x) = f(-x) = f(x),$$
woraus $f(x) = 0$ folgt. (Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen, weil f ungerade, und das zweite, weil f gerade ist.). Somit stimmt Aussage (c).

- Die Aussage (d) ist falsch, denn jede konstante Funktion ist gerade.

9. Was ist der Wert der geraden (2-periodischen) Fortsetzung von

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < 1$$

an der Stelle $x = 1.25$?

(a) 0.25.

√ (b) 0.75.

(c) 1.25.

(d) 1.75.

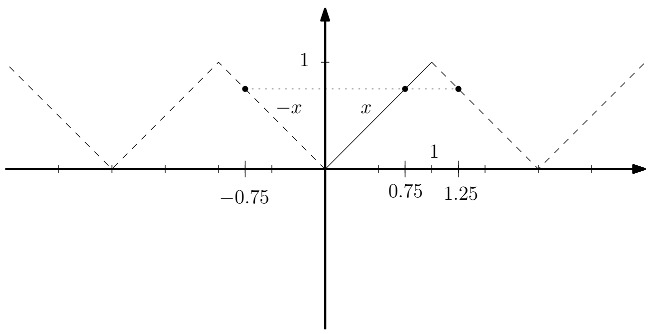
Da wir die gerade 2-periodische Fortsetzung betrachten, betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Insbesondere hat $f(1.25)$ denselben Wert wie

$$f(1.25 - 2) = f(-0.75) = f(0.75) = 0.75$$

da f gerade ist.



10. Was ist der Wert der geraden (2-periodischen) Fortsetzung von

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < 1$$

an der Stelle $x = -2.75$?

(a) 0.25.

√ (b) 0.75.

(c) 1.25.

(d) 1.75.

Wie in Aufgabe **9.** wissen wir, da f 2-periodisch ist, dass

$$f(-2.75) = f(-2.75 + 2) = f(-0.75) = f(-0.75 + 2) = f(1.25) = 0.75.$$