MC-Serie 12

Einsendeschluss: 27. Mai 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Welches ist der konstante Koeffizient $\frac{a_0}{2}$ in der Fourier-Reihe von

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases} \quad ?$$

√ (a) $\frac{1}{4}$.

(b) $\frac{1}{2}$.

(c) 1.

(d) 2.

Man berechnet

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{2T}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

2. Welches ist der Koeffizient von $\cos(3x)$ in der Fourierreihe von

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases} \quad ?$$

(a) $-\frac{1}{6\pi}$.

(b) $\frac{1}{6\pi}$.

√ (c) $-\frac{1}{3\pi}$.

(d) $\frac{1}{3\pi}$.

$$a_3 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\cos(3x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3\pi}.$$

3. Was ist das Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe der 1-periodischen Funktion bestimmt durch

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < 1$$

im Punkt $x = 1$?

(a) Die Fourierreihe konvergiert gegen 0.

$\surd$ (b) Die Fourierreihe konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

(c) Die Fourierreihe konvergiert gegen 1.

(d) Die Fourierreihe divergiert.

Da $x = 1$ eine Sprungstelle der Funktion f ist, konvergiert die Fourierreihe dort gegen das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x^+)) = \frac{1}{2}$.

4. Seien $f(x)$ und $F(x)$ zwei T-periodische Funktionen, a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ und A_n, B_n die Fourierkoeffizienten von $F(x)$. Welche sind die Fourierkoeffizienten der Summe $f(x) + F(x)$?

√ (a) $a_n + A_n,\ b_n + B_n$

(b) $a_n A_n,\ b_n B_n$

(c) $a_n B_n + b_n A_n,\ a_n B_n - b_n A_n$

(d) $a_n B_n - b_n A_n,\ a_n B_n + b_n A_n$

Die Summe zweier T-periodischer Funktionen ist wieder T-periodisch und es gilt für die Fourierkoeffizienten von f und F jeweils:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\right)dx, \text{ für } n \geq 0 \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)dx, \text{ für } n \geq 1 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\right)dx, \text{ für } n \geq 0 \\ B_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)dx, \text{ für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Andererseits ergeben sich die Cosinus-Fourierkoeffizienten von $f(x) + F(x)$ zu

$$\begin{aligned} &\frac{2}{T}\int_0^T (f(x) + F(x))\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\right)dx \\ &\qquad = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\right)dx + \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\right)dx = a_n + A_n \end{aligned}$$

und die Sinus-Fourierkoeffizienten von $f(x) + F(x)$ zu

$$\begin{aligned} &\frac{2}{T}\int_0^T (f(x) + F(x))\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)dx \\ &\qquad = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)dx + \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)dx = b_n + B_n. \end{aligned}$$

5. Seien a_0, a_n, b_n ($n \geq 1$) die Fourierkoeffizienten einer T-periodischen Funktion $f(x)$ und sei c eine reelle Konstante. Welche sind die Fourierkoeffizienten des Produkts $cf(x)$?

(a) $a_0 + c$, a_n, b_n

(b) $a_0 + 2c$, a_n, b_n

√ (c) ca_0, ca_n, cb_n

(d) $2ca_0$, ca_n, cb_n

Mit $f(x)$ ist auch die Funktion $cf(x)$ T-periodisch. Die Fourierkoeffizienten von $cf(x)$ berechnen sich zu

$$\frac{2}{T}\int_0^T cf(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\right) dx = c\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx = ca_n \text{ für } n \geq 0,$$
$$\frac{2}{T}\int_0^T cf(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx = c\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx = cb_n \text{ für } n \geq 1.$$

6. Die auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ durch

$$f(x) = x + \pi$$

definierte Funktion wird periodische auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Welche Aussage gilt für ihre Fourierreihe?

√ (a) $a_0 \neq 0$ und es kommen keine Cosinusfunktionen vor.

(b) $a_0 = 0$ und es kommen keine Cosinusfunktionen vor.

(c) Es kommen keine Sinusfunktionen vor.

(d) Es treten sowohl Sinus- als auch Cosinusfunktionen auf.

Die periodische Fortsetzung der Funktion $f(x)-\pi$ ist ungerade. Somit kommen in ihrer Fourierreihe nur Sinusfunktionen vor (und insbesondere ist der konstante Koeffizient gleich Null). Damit ist der konstante Koeffizient von $f(x)$ aber gleich π und der Rest der Fourierreihe stimmt mit der Reihe von $f(x) - \pi$ überein, hat also nur Sinusbeiträge. Daher ist Aussage (a) wahr.

7. Die auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ durch

$$f(x) = x^2 \sin(x) \cos(x)$$

definierte Funktion wird periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Welche Aussage gilt für ihre Fourierreihe?

(a) $a_0 \neq 0$ und es kommen keine Cosinusfunktionen vor.

√ (b) $a_0 = 0$ und es kommen keine Cosinusfunktionen vor.

(c) Es kommen keine Sinusfunktionen vor.

(d) Es treten sowohl Sinus- als auch Cosinusfunktionen auf.

Als Produkt von zwei geraden und einer ungeraden Funktion ist $f(x)$ ungerade. Die periodische Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}$ ist ebenfalls ungerade und daher besteht die Fourierreihe ausschließlich aus Sinusbeiträgen (und insbesondere ist $a_0 = 0$).

8. Die auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ durch

$$f(x) = x(x + \pi)$$

definierte Funktion wird periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Welche Aussage gilt für ihre Fourierreihe?

(a) $a_0 \neq 0$ und es kommen keine Cosinusfunktionen vor.

(b) $a_0 = 0$ und es kommen keine Cosinusfunktionen vor.

(c) Es kommen keine Sinusfunktionen vor.

√ (d) Es treten sowohl Sinus- als auch Cosinusfunktionen auf.

Da die Funktion $f(x)$ nicht gerade ist ($f(x) = x^2 + \pi x$ und x^2 ist gerade und $\neq 0$, während πx ungerade und $\neq 0$ ist, sodass $f(x)$ also weder gerade noch ungerade sein kann), müssen Sinusfunktionen in ihrer Fourierreihe auftauchen. Für den konstanten Koeffizienten ergibt sich:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(x + \pi)\, dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{\pi^2}{3} \neq 0.$$

Wenn keine Cosinusfunktionen in der Fourierreihe von $f(x)$ aufträten, müsste $f(x) - \frac{\pi^2}{3}$ eine ungerade Funktion sein. Betrachtet man wieder die Punkte $\pm\frac{\pi}{2}$, sieht man, dass dies nicht wahr ist. Folglich ist Aussage (d) wahr.

9. Die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

ist

(a) $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n+1} \cos(nx) + (-1)^{(n+1)} \frac{2}{n} \sin(nx).$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n+1} \cos(nx) + (-1)^{(n+1)} \frac{2}{n} \sin(nx).$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n+1} \cos(nx).$

√ (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{2}{n} \sin(nx).$

Da die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[-\pi, +\pi]$ eine ungerade Funktion ist, muss ihre Fourierreihe ebenfalls eine ungerade Funktion sein, also eine reine Sinus-Reihe.
Und für die Sinus-Koeffizienten b_n ($n \in \mathbb{N}$) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \Bigg([-\frac{x\cos(nx)}{n}]_{x=-\pi}^{x=\pi} \underbrace{- \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n}\, dx}_{=[\frac{\sin(nx)}{n^2}]_{x=-\pi}^{x=\pi}=0} \Bigg) \\
&= \frac{1}{\pi} \big(\pi \frac{-\cos(n\pi)}{n} - (-\pi) \frac{-\cos(-n\pi)}{n} \big) = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

10. Die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \le x \le \pi$$

ist

√ (a) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$.

(b) $\frac{\pi}{2} - (4\pi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx)$.

(c) $\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4\pi}{n^2} \sin(nx) + \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x) \right)$.

(d) $\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi(2n+1)^2} \sin((2n+1)x) + \frac{4\pi}{n^2} \cos(nx) \right)$.

Auf $[-\pi, \pi]$ ist (2π)-periodische Fortsetzung der Betragsfunktion symmetrisch. Daher muss ihre Fourierreihe eine reine Cosinusreihe sein.

Konkret:

Es handelt sich hier um eine symmetrische Funktion und somit ist die Fourierreihe eine reine Cosinusreihe. Wir berechnen die Fourierkoeffizienten $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi. \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\pi \frac{\sin(n\pi)}{n} \right) - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) \, dx \\
&= \frac{2}{n} \sin(n\pi) - \frac{2}{n\pi} \left(\frac{-\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right) \\
&= 0 + \frac{2}{n^2\pi} \cos(n\pi) - \frac{2}{n^2\pi} = \frac{2}{n^2\pi} \left((-1)^n - 1 \right) \\
&= \frac{2}{n^2\pi} \begin{cases} -2, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade}, n \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Daher ist die Fourierreihe

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x).$$