MC-Serie 13

Einsendeschluss: 3. Juni 2016, 16 Uhr (MEZ)

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

1. Die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = u_{xx} + u^3 \cdot u_t + u_{xxx}$$

hat Ordnung

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

2. Die partielle Differentialgleichung

$$u_x + x^2 u_{yy} = y$$

ist

(a) linear und homogen.

(b) linear, aber nicht homogen.

(c) nicht linear.

(d) Linearität ist hier nicht definiert, da u von zwei Variablen abhängt.

3. Welches der untenstehenden Eigenschaften passt **nicht** zur folgenden partiellen Differentialgleichung?

$$u_x + u_{yy} = 0$$

(a) linear

(b) homogen

(c) elliptisch

(d) zweiter Ordnung

4. Seien $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ zwei Lösungen der Gleichung

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0.$$

Welche Funktion ist im Allgemeinen auch eine Lösung dieser Gleichung?

(a) $u_1 - u_2$.

(b) $u_1 u_2$.

(c) $(u_1)^2 + (u_2)^2$.

(d) $\dfrac{u_1}{u_2}$.

5. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{tt} = 0.$$

Mit dem Separationsansatz

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

zerfällt diese PDE in ein System von ODE's für $X(x)$ und $T(t)$ in Abhängigkeit von einem Parameter $k \in \mathbb{R}$. Welches System?

(a) $X'' - kX = 0$ und $T'' - kT = 0$.

(b) $X'' - kX = 0$ und $T'' + kT = 0$.

(c) $X'' - kX = 0$ und $T'' - (k+1)T = 0$.

(d) $X'' - kX = 0$ und $T'' + (k-1)T = 0$.

6. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} = u_{tt} - u.$$

Mit dem Separationsansatz

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

zerfällt diese PDE in ein System von ODE's für $X(x)$ und $T(t)$ in Abhängigkeit von einem Parameter $k \in \mathbb{R}$. Welches System?

(a) $X'' - kX = 0$ und $T'' - kT = 0$.

(b) $X'' - kX = 0$ und $T'' + kT = 0$.

(c) $X'' - kX = 0$ und $T'' - (k+1)T = 0$.

(d) $X'' - kX = 0$ und $T'' + (k-1)T = 0$.

7. Sei $\mathcal{F}(x)$ das Fourier-Integral von

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad -1 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welches ist der Wert von $\mathcal{F}(1)$?

(a) 0.

(b) $\frac{1}{2}$.

(c) 1.

(d) $\mathcal{F}(1)$ ist nicht definiert.

8. Welches ist das Fourier-Integral $\mathcal{F}(x)$ von der folgenden Funktion?

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad -1 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) $\mathcal{F}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(wx)\sin w}{w}\, dw.$

(b) $\mathcal{F}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(wx)\sin w}{w}\, dw.$

(c) $\mathcal{F}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(wx)\sin w + \sin(wx)\cos w}{w}\, dw.$

(d) $\mathcal{F}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(wx)\sin w - \sin(wx)\cos w}{w}\, dw.$

9. Sei $u(x,t) = \cos(kx - \omega t)$ ein Ansatz für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Welche Relation müssen die Parameter k und ω erfüllen, sodass $u(x,t)$ eine Lösung ist?

(a) $k = \omega + c$.

(b) $k = \omega - c$.

(c) $k^2 = c^2\omega^2$.

(d) $\omega^2 = c^2 k^2$.

10. **Rossby-Wellen**, die auch als **planetarische Wellen** bezeichnet werden, sind grossräumige Wellenbewegungen im Ozean oder der Erdatmosphäre. Mathematisch werden sie durch die folgende partielle Differentialgleichung modelliert:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 u + \beta\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

wobei α und β reelle Parameter sind und $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der Laplace-Operator ist.

Sei $u(x, y, t) = \cos(kx + ly - \omega t)$ ein Ansatz für die Rossby-Wellengleichung mit $k^2 + l^2 \neq 0$. Welche Relation müssen die Parameter k, l und ω erfüllen, so dass $u(x, y, t)$ eine Lösung ist?

(a) $\omega = \dfrac{\alpha k}{k^2 + l^2} - \beta k.$

(b) $\omega = \dfrac{\alpha k}{k^2 + l^2} + \beta k.$

(c) $\omega = \alpha k - \dfrac{\beta k}{k^2 + l^2}.$

(d) $\omega = \alpha k + \dfrac{\beta k}{k^2 + l^2}.$