D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 16
Dr. Ana Cannas

# MC-Serie 13

**Einsendeschluss: 3. Juni 2016, 16 Uhr (MEZ)**

Bei allen Aufgaben ist genau eine Antwort richtig. Sie dürfen während des Lösens des Tests eine Formelsammlung verwenden.

---

**1.** Die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = u_{xx} + u^3 \cdot u_t + u_{xxx}$$

hat Ordnung

(a) 1.

(b) 2.

√ (c) 3.

(d) 4.

Die höchste vorkommende Ableitung ist $u_{xxx}$, also eine dritte Ableitung. Somit hat die Differentialgleichung Ordnung 3.

**2.** Die partielle Differentialgleichung

$$u_x + x^2 u_{yy} = y$$

ist

(a) linear und homogen.

√ (b) linear, aber nicht homogen.

(c) nicht linear.

(d) Linearität ist hier nicht definiert, da $u$ von zwei Variablen abhängt.

Diese Differentialgleichung ist linear in ihren Ableitungen, wobei $x^2$ Koeffizient vor $u_{yy}$ ist und 1 Koeffizient vor $u_x$. Jedoch gibt es den Störterm $y$ und somit ist die Differentialgleichung nicht homogen.

**3.** Welches der untenstehenden Eigenschaften passt **nicht** zur folgenden partiellen Differentialgleichung?

$$u_x + u_{yy} = 0$$

(a) linear

(b) homogen

√ (c) elliptisch

(d) zweiter Ordnung

Diese Differentialgleichung ist parabolisch, denn der Koeffizient vor $u_{xx}$ ist 0 und es gibt keine Mischterme. Man sieht direkt, dass die DGL homogen, linear und von zweiter Ordnung (höchste vorkommende Ableitung ist $u_{yy}$) ist.

Zur Erinnerung: Eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0$$

ist

- *elliptisch*, wenn $AC - B^2 > 0$
- *hyperbolisch*, wenn $AC - B^2 < 0$
- *parabolisch*, wenn $AC - B^2 = 0$.

**4.** Seien $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ zwei Lösungen der Gleichung

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0.$$

Welche Funktion ist im Allgemeinen auch eine Lösung dieser Gleichung?

√ (a) $u_1 - u_2$.

(b) $u_1 u_2$.

(c) $(u_1)^2 + (u_2)^2$.

(d) $\frac{u_1}{u_2}$.

Da sowohl $u_1$ als auch $u_2$ die DGL erfüllen und Differenzieren linear ist, erfüllen alle Linearkombinationen von $u_1$ und $u_2$ die DGL.
Dass die übrigen Antworten falsch sind, kann z.B. anhand folgender Gegenbeispiele eingesehen werden: Mit $u_1(x, y) = x$ und $u_2(x, y) = x$ hat man zwei Lösungen von $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$. Allerdings ist $u(x, y) := u_1(x, y)u_2(x, y) = x^2$ keine Lösung, denn $yu_{xx} + xu_{yy} = 2y \neq 0$. Ebenso ist $v(x, y) := (u_1)^2(x, y) + (u_2)^2(x, y) = 2x^2$ keine Lösung. Mit $u_1(x, y) = 1$ und $u_2(x, y) = x$ hat man zwei Lösungen von $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$, für die $w(x, y) := \frac{u_1(x,y)}{u_2(x,y)} = \frac{1}{x}$ keine Lösung ist:

$$yw_{xx} + yw_{yy} = \frac{2y}{x^3} \neq 0.$$

**5.** Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{tt} = 0.$$

Mit dem Separationsansatz

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

zerfällt diese PDE in ein System von ODE's für $X(x)$ und $T(t)$ in Abhängigkeit von einem Parameter $k \in \mathbb{R}$. Welches System?

(a) $X'' - kX = 0$ und $T'' - kT = 0.$

√ (b) $X'' - kX = 0$ und $T'' + kT = 0.$

(c) $X'' - kX = 0$ und $T'' - (k+1)T = 0.$

(d) $X'' - kX = 0$ und $T'' + (k-1)T = 0.$

Einsetzen des Ansatzes $u(x,t) = X(x)T(t)$ führt zu $X''(x)T(t) + X(x)T''(t) = 0$. Diese PDE lässt sich separieren zu

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{T(t)} = k$$

für eine reelle Konstante $k$, da die eine Seite der Gleichung nur von $x$ abhängt und die andere nur von $t$. Dies führt dann zu den ODE's

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad \text{und} \quad T''(t) + kT(t) = 0.$$

**6.** Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} = u_{tt} - u.$$

Mit dem Separationsansatz

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

zerfällt diese PDE in ein System von ODE's für $X(x)$ und $T(t)$ in Abhängigkeit von einem Parameter $k \in \mathbb{R}$. Welches System?

(a) $X'' - kX = 0$ und $T'' - kT = 0$.

(b) $X'' - kX = 0$ und $T'' + kT = 0$.

√ (c) $X'' - kX = 0$ und $T'' - (k+1)T = 0$.

(d) $X'' - kX = 0$ und $T'' + (k-1)T = 0$.

Einsetzen des Ansatzes $u(x,t) = X(x)T(t)$ führt zu $X''(x)T(t) = X(x)T''(t) - X(x)T(t) = X(x)\left(T''(t) - T(t)\right)$. Diese PDE lässt sich separieren zu

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t) - T(t)}{T(t)} = k$$

für eine reelle Konstante $k$, da die eine Seite der Gleichung nur von $x$ abhängt und die andere nur von $t$. Dies führt dann zu den ODE's

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad \text{und} \quad T''(t) - T(t) - kT(t) = T''(t) - (k+1)T(t) = 0.$$

**7.** Sei $\mathcal{F}(x)$ das Fourier-Integral von

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad -1 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welches ist der Wert von $\mathcal{F}(1)$?

(a) $0$.

√ (b) $\frac{1}{2}$.

(c) $1$.

(d) $\mathcal{F}(1)$ ist nicht definiert.

Es gilt, dass in den Sprungstellen von $f$, das Fourier-Integral gleich dem arithmetischen Mittel der beiden einseitigen Grenzwerte ist. Also ist

$$\mathcal{F}(1) = \frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

**8.** Welches ist das Fourier-Integral $\mathcal{F}(x)$ von der folgenden Funktion?

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad -1 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

√ (a) $\mathcal{F}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(wx) \sin w}{w} \, dw.$

(b) $\mathcal{F}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(wx) \sin w}{w} \, dw.$

(c) $\mathcal{F}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(wx) \sin w + \sin(wx) \cos w}{w} \, dw.$

(d) $\mathcal{F}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(wx) \sin w - \sin(wx) \cos w}{w} \, dw.$

Da es sich bei $f(x)$ um eine gerade Funktion handelt, ist das Fourier-Integral ein reines Fourier-Cosinus-Integral. Daher kommt nur Antwort (a) in Frage. In (a) ist $\sin w$ die Koeffizienten-Funkion von $f$.

Man kann dies überprüfen, indem man das Fourier-Integral konkret berechnet. Das Fourier-Integral $\mathcal{F}(x)$ einer Funktion $f$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^\infty \big(A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)\big)\, dw,$$

wobei die Funktionen $A$ und $B$ bestimmt sind durch

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv)\, dv,$$
$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wv)\, dv.$$

Wir berechnen die Koeffizienten:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv)\, dv = \int_{-1}^{1} \cos(wv)\, dv = \frac{1}{\pi w} \left[\sin(wv)\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi w} \sin(w)$$
$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wv)\, dv = \int_{-1}^{1} \sin(wv)\, dv = 0$$

wobei wir verwendet haben, dass das Integral einer ungeraden Funktion über ein symmetrisches Gebiet verschwindet. Damit ist das Fourier-Integral gegeben durch

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^\infty \cos(wx) \frac{2 \sin w}{\pi w}\, dw$$

und dies ist genau der Term aus Antwort (a).

**9.** Sei $u(x,t) = \cos(kx - \omega t)$ ein Ansatz für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Welche Relation müssen die Parameter $k$ und $\omega$ erfüllen, sodass $u(x,t)$ eine Lösung ist?

(a) $k = \omega + c$.

(b) $k = \omega - c$.

(c) $k^2 = c^2 \omega^2$.

√ (d) $\omega^2 = c^2 k^2$.

Wir berechnen die entsprechenden Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= -k \sin(kx - \omega t), \quad & u_{xx}(x,t) &= -k^2 \cos(kx - \omega t) \\ u_t(x,t) &= \omega \sin(kx - \omega t), \quad & u_{tt}(x,t) &= -\omega^2 \cos(kx - \omega t). \end{aligned}$$

$u$ ist genau dann eine Lösung von $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t > 0$ die Beziehung

$$-\omega^2 \cos(kx - \omega t) = c^2 \left(-k^2 \cos(kx - \omega t)\right)$$

gilt. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $\omega^2 = c^2 k^2$ ist.

Diese Beziehung heißt **Dispersionsrelation**.

**10.** **Rossby-Wellen**, die auch als **planetarische Wellen** bezeichnet werden, sind grossräumige Wellenbewegungen im Ozean oder der Erdatmosphäre. Mathematisch werden sie durch die folgende partielle Differentialgleichung modelliert:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 u + \beta\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

wobei $\alpha$ und $\beta$ reelle Parameter sind und $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der Laplace-Operator ist.

Sei $u(x, y, t) = \cos(kx + ly - \omega t)$ ein Ansatz für die Rossby-Wellengleichung mit $k^2 + l^2 \neq 0$. Welche Relation müssen die Parameter $k, l$ und $\omega$ erfüllen, so dass $u(x, y, t)$ eine Lösung ist?

(a) $\omega = \frac{\alpha k}{k^2 + l^2} - \beta k.$

(b) $\omega = \frac{\alpha k}{k^2 + l^2} + \beta k.$

√ (c) $\omega = \alpha k - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}.$

(d) $\omega = \alpha k + \frac{\beta k}{k^2 + l^2}.$

Es sind

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,t) = -k\sin(kx + ly - \omega t), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y,t) = -k^2\cos(kx + ly - \omega t)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y,t) = -l^2\cos(kx + ly - \omega t).$$

Somit löst $u$ die obige Differentialgleichung genau dann, wenn folgende Beziehung für alle $x, y \in \mathbb{R},\ t > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 u + \beta\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\big(-(k^2 + l^2)\cos(kx + ly - \omega t)\big) - \beta k\sin(kx + ly - \omega t) \\
&= -(k^2 + l^2)\omega\sin(kx + ly - \omega t) - \alpha(k^2 + l^2)(-k\sin(kx + ly - \omega t)) - \beta k\sin(kx + ly - \omega t) \\
&= \big(-(k^2 + l^2)(\omega - \alpha k) - \beta k\big)\sin(kx + ly - \omega t)
\end{aligned}$$

Dieser Term ist genau dann Null für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $t > 0$, wenn

$$-(k^2 + l^2)(\omega - \alpha k) - \beta k = 0$$

und somit (unter Verwendung, dass $k^2 + l^2 \neq 0$) genau dann, wenn

$$\alpha k - \frac{k\beta}{k^2 + l^2} = \omega.$$