Clairaut-Schwarz Gegenbeispiel

Ohne die Stetigkeit der zweiten Ableitungen gilt der Satz von Schwarz (oder Satz von Clairaut) im Allgemeinen tatsächlich nicht.

Ein Gegenbeispiel, bei dem die Vertauschbarkeit der einzelnen Differentiationsschritte nicht gilt, ist die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bestimmung der ersten partiellen Ableitung von f(x,y) nach x abseits des Ursprungs:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4y+4x^4y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

Bestimmung der ersten partiellen Ableitung nach x im Ursprung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Ähnlich gilt für die erste partielle Ableitung nach y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5-xy^4-4x^3y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Bestimmung der gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung im Ursprung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = \underline{\underline{1}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = \underline{\underline{-1}}$$

Abseits des Ursprungs kann man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung mit einfachen Rechenregeln für Ableitungen bestimmen.

Bei dieser Funktion existieren die zweiten partiellen Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}^2$, aber es gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0) = 1 \neq \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = -1$$

Es gibt keinen Widerspruch, da diese partiellen Ableitungen keine stetige Funktionen sind.

Graph der Funktion f(x,y):