Gradientenfelder - Testen

Ist das Vektorfeld $\vec{F}$ in einem Gebiet D ein Gradientenfeld?

$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \vec{0}\ ?}$

ja

nein

Ist das Gebiet D einfach zusammenhängend?

$\boxed{\text{Nein, } \vec{F} \text{ ist kein Grad.}}$

ja

nein

$\boxed{\text{Ja, } \vec{F} \text{ ist ein Grad. in D.}}$

Wir müssen noch weiter untersuchen:

- suche f, so dass $\vec{F}=\text{grad } f$ oder
- suche C im Gebiet D, so dass $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$.

Gradientenfelder - Testen

Bsp Sind die folgenden Vektorfelder in ihren Definitionsbereiche Gradientenfelder?

(a) $\vec{F}= (1, x)$

(b) $\vec{F}= (e^x\cos y + y, -e^x\sin y + x + y^2)$

(c) $\vec{F}= \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ ← wichtig

(d) $\vec{F}= \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\right)$

Falls ja,
bestimme eine entsprechende Potentialfunktion f.

Falls nein,
bestimme so eine geschlossene Kurve C, dass

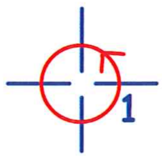
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0.$$

Kurzlösungen:

(a) Nein z.B. C = 

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi$

(b) Ja z.B. $f(x,y) = e^x \cos y + xy + y^3/3$

(c) Nein z.B. C = 

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$

(d) Ja z.B. $f(x,y) = -\frac{1}{2(x^2+y^2)}$

Musterlösungen: handgeschriebene Seiten.

(a) Definitionsbereich $\underline{\mathbb{R}^2}$ ist einfach zusammenhängend

Rotation/Vorticity Test:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \begin{matrix}] F_1 \\ ] F_2 \end{matrix}$$

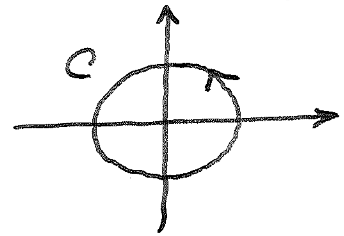
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

$\vec{F}$ scheitert beim Test (also erfüllt die notwendige Bedingung nicht).

$\Rightarrow$ $\vec{F}$ ist kein Gradientenfeld

<u>Nein</u>

Sei C der Einheitskreis mit der positiven Richtung.



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t + \cos^2 t) \, dt$$

$$= \pi \neq 0$$

<u>Bmk</u> Falls dieses Integral Null wäre, würden wir eine andere Kurve suchen.

(b) Definitionsbereich $\underline{\mathbb{R}^2}$ ist einfach zusammenhängend

Rotation / Vorticity Test:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} e^x \cos y + y \\ -e^x \sin y + x + y^2 \end{pmatrix} \begin{matrix}]\, F_1 \\ ]\, F_2 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -e^x \sin y + 1 = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \checkmark$$

$\vec{F}$ besteht den Test.

Da der Definitionsbereich einfach zusammenhängend ist, ist diese Bedingung für Gradientenfelder nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.

$\Longrightarrow$ $\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld

Ja

Um eine entsprechende Potentialfunktion f zu bestimmen, lösen wir das System

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + y &]\, F_1 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y + x + y^2 &]\, F_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x,y) = e^x \cos y + xy + g(y) \\ f(x,y) = e^x \cos y + xy + \dfrac{y^3}{3} + h(x) \end{cases}$$

Ein Vergleich der zwei Ausdrücke ergibt

$$f(x,y) = e^x \cos y + xy + \frac{y^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Z.B. ist $f(x,y) = e^x \cos y + xy + \frac{y^3}{3}$ eine Potentialfunktion für $\vec{F}$.

(c) Definitionsbereich $\underline{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$

ist <u>nicht</u> einfach zusammenhängend.

Rotation / Vorticity Test:

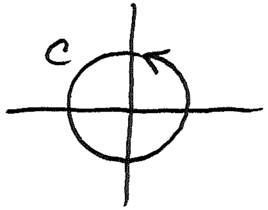
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{matrix}] \, F_1 \\ ] \, F_2 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \checkmark$$

$\vec{F}$ besteht den Test.

Da der Definitionsbereich nicht einfach zusammenhängend ist, können wir noch nicht entscheiden, ob $\vec{F}$ ein Gradientenfeld ist oder nicht.

Sei C der Einheitskreis



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\vec{F}(\vec{r}(t))} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\dot{\vec{r}}(t)} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1} \, dt$$

$$= 2\pi \neq 0$$

Da diese Zirkulation nicht verschwindet, ist $\vec{F}$ <u>kein</u> Gradientenfeld.

(d) Definitionsbereich $\underline{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ ist <u>nicht</u> einfach zusammenhängend.

Rotation / Vorticity Test :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \begin{matrix}]\, F_1 \\ ]\, F_2 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \checkmark$$

$\vec{F}$ besteht den Test.

Da der Definitionsbereich nicht einfach zusammenhängend ist, können wir noch nicht entscheiden, ob $\vec{F}$ ein Gradientenfeld ist oder nicht.

Wir versuchen eine Potentialfunktion zu bestimmen.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^2} &]\, F_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} &]\, F_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+y^2} + g(y) \\ f(x,y) = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+y^2} + h(x) \end{cases}$$

Ein Vergleich der zwei Ausdrücke ergibt die Schar von Lösungen

$$f(x,y) = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+y^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Damit ist $\vec{F}$ ein Gradientenfeld mit Potentialfunktion z.B.

$$f(x,y) = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+y^2}.$$