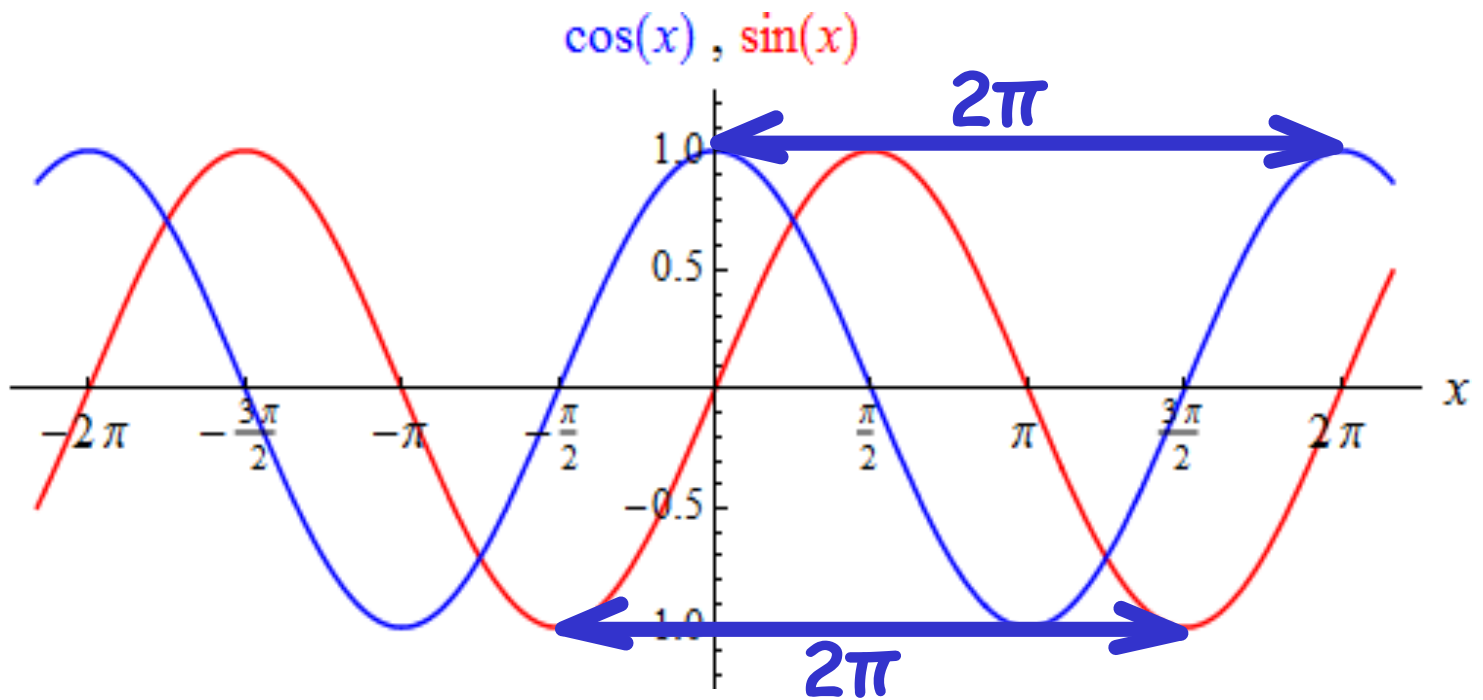


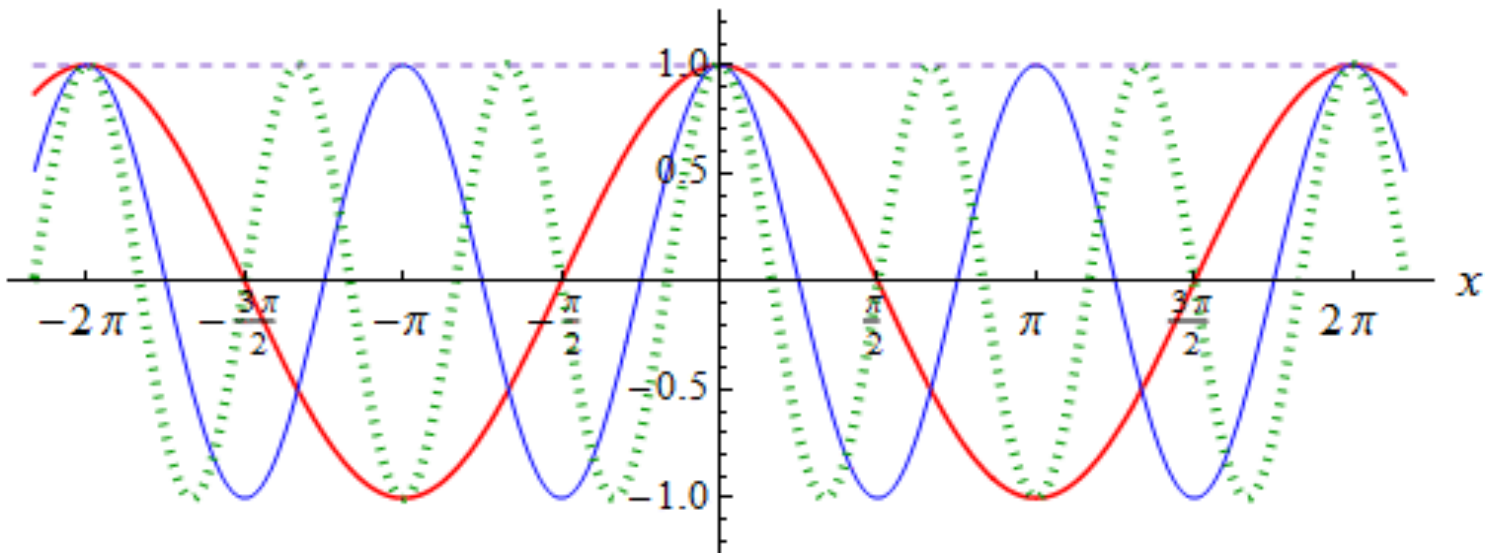
Cos und Sin - prototypische periodische Funktionen



Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ sind 2π -periodisch und auch 4π -, 6π -, ...-periodisch.

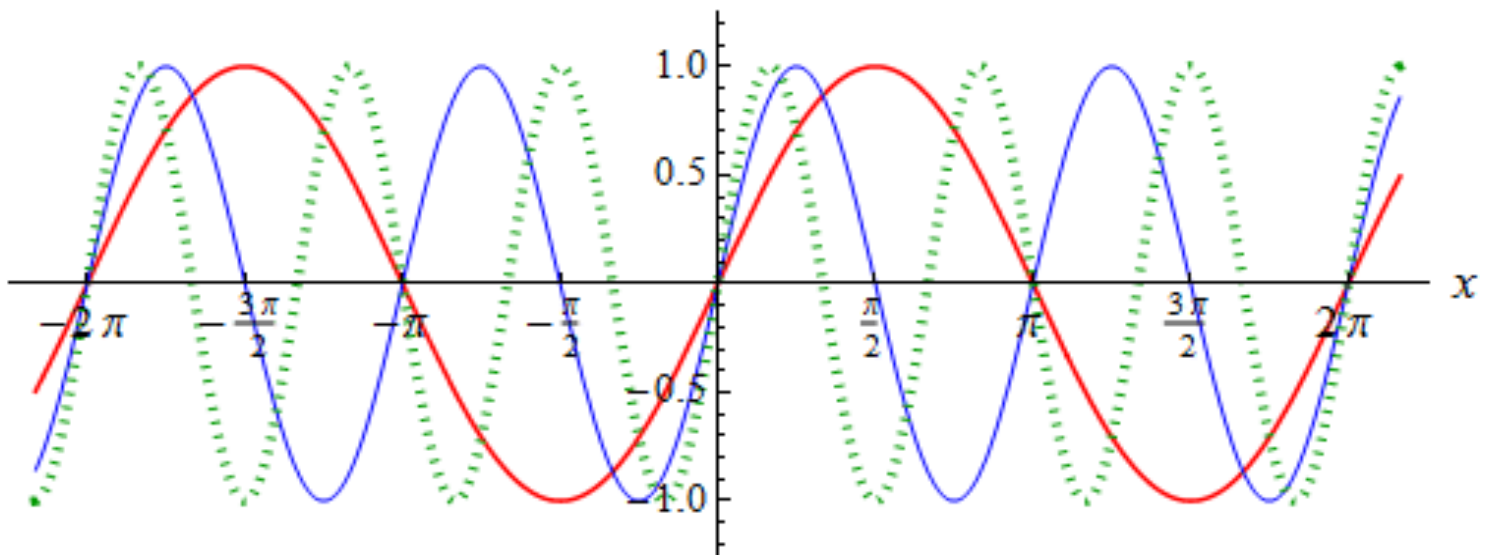
2π ist ihre Hauptperiode, d.h. die kleinste positive Periode.

1, $\cos(x)$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$



Die Funktionen $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ sind nun $\frac{2\pi}{n}$ -periodisch.

$\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$



Wir sagen, dass die ganze Reihe von Funktionen $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos(3x)$, $\sin(3x)$, ... 2π -periodisch ist, da 2π eine gemeinsame Periode ist.

Sei T eine positive reelle Zahl.

Die Funktionen $\cos \frac{2\pi x}{T}$ und $\sin \frac{2\pi x}{T}$ sind T -periodisch.

Die Funktionen $\cos \frac{2n\pi x}{T}$ und $\sin \frac{2n\pi x}{T}$ sind $\frac{T}{n}$ -periodisch.

Wir sagen, dass die ganze Reihe von Funktionen $\cos \frac{2n\pi x}{T}$, $\sin \frac{2n\pi x}{T}$, $n=1,2,3,\dots$ T -periodisch ist, da T eine gemeinsame Periode ist.

Eine Linearkombination von diesen Funktionen ist auch T -periodisch:

z.B. $3 - 2\cos \frac{4\pi x}{T} + 5\sin \frac{2\pi x}{T} - \sin \frac{12\pi x}{T}$

heißt "trigonometrisches Polynom"

Ausserdem sind die Funktionen $\cos \frac{2n\pi x}{T}$, $\sin \frac{2n\pi x}{T}$ "orthogonal" im folgenden Sinn*:

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos \frac{2m\pi x}{T} \cos \frac{2n\pi x}{T} dx = \dots$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos \frac{2m\pi x}{T} \sin \frac{2n\pi x}{T} dx = \dots$$
$$= 0 \quad \text{für alle } m \text{ \& } n$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin \frac{2m\pi x}{T} \sin \frac{2n\pi x}{T} dx = \dots$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

* Das Skalarprodukt zweier Funktionen wird durch Integration gegeben!

Cos und Sin - "Wellen Addition"

Summe von zwei Funktionen von
der Form $\sin \frac{2m\pi x}{T}$ und $\sin \frac{2n\pi x}{T}$;

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$\underbrace{\hspace{10em}}_B$

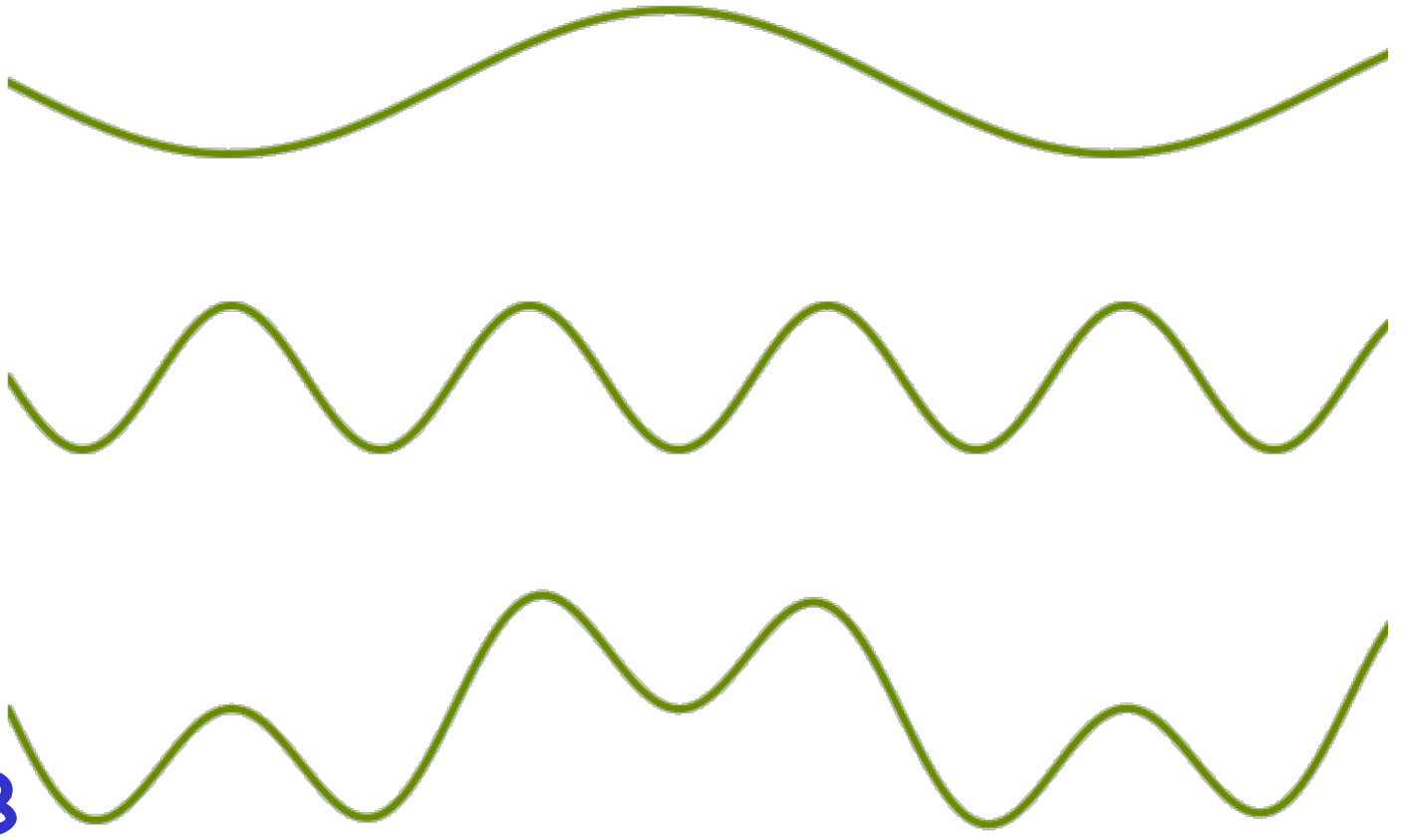
A

+

B

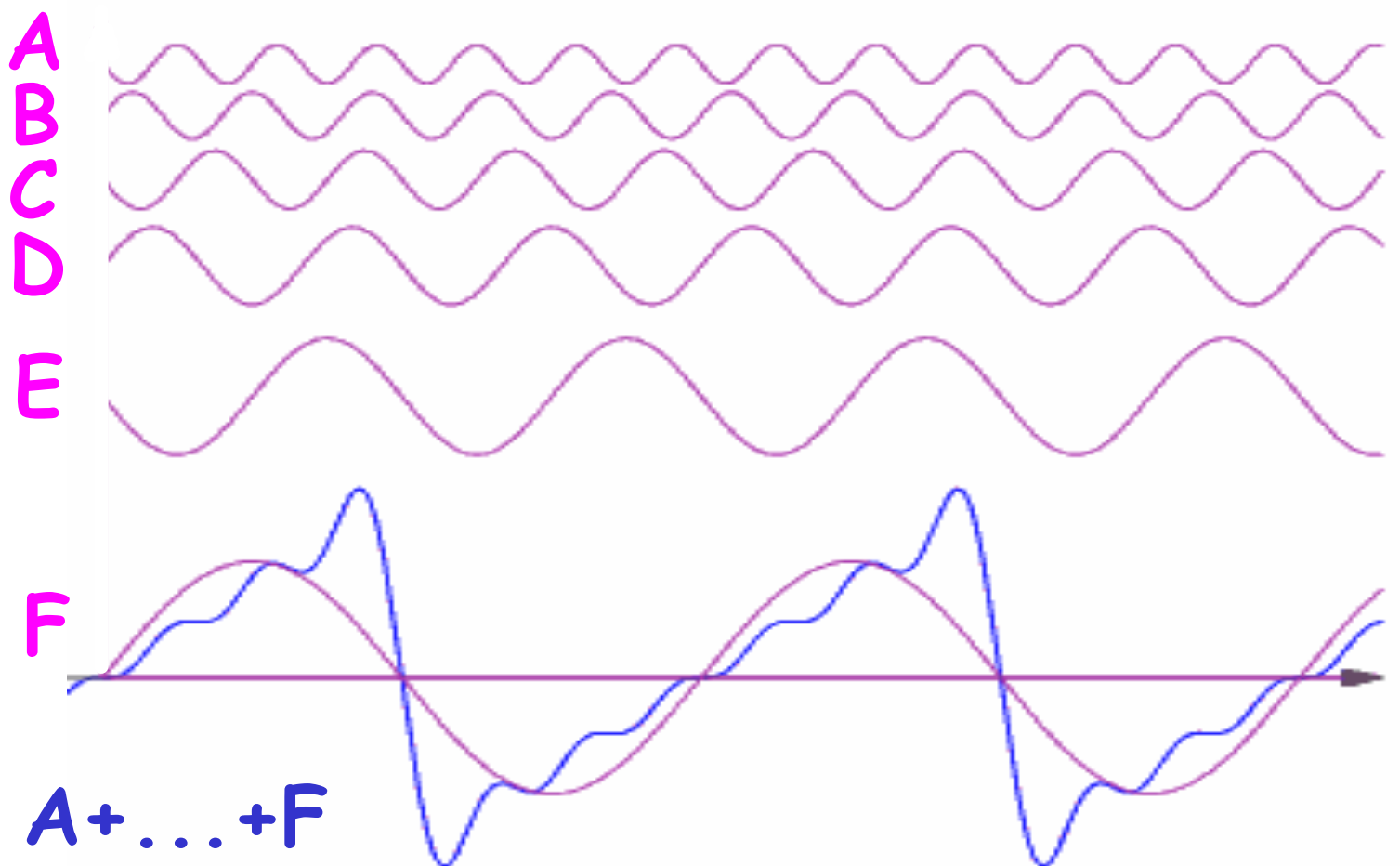
=

A+B



Summe von mehreren Funktionen
von der Form $\sin \frac{2n\pi x}{T}$:

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A, B, \dots, F}$

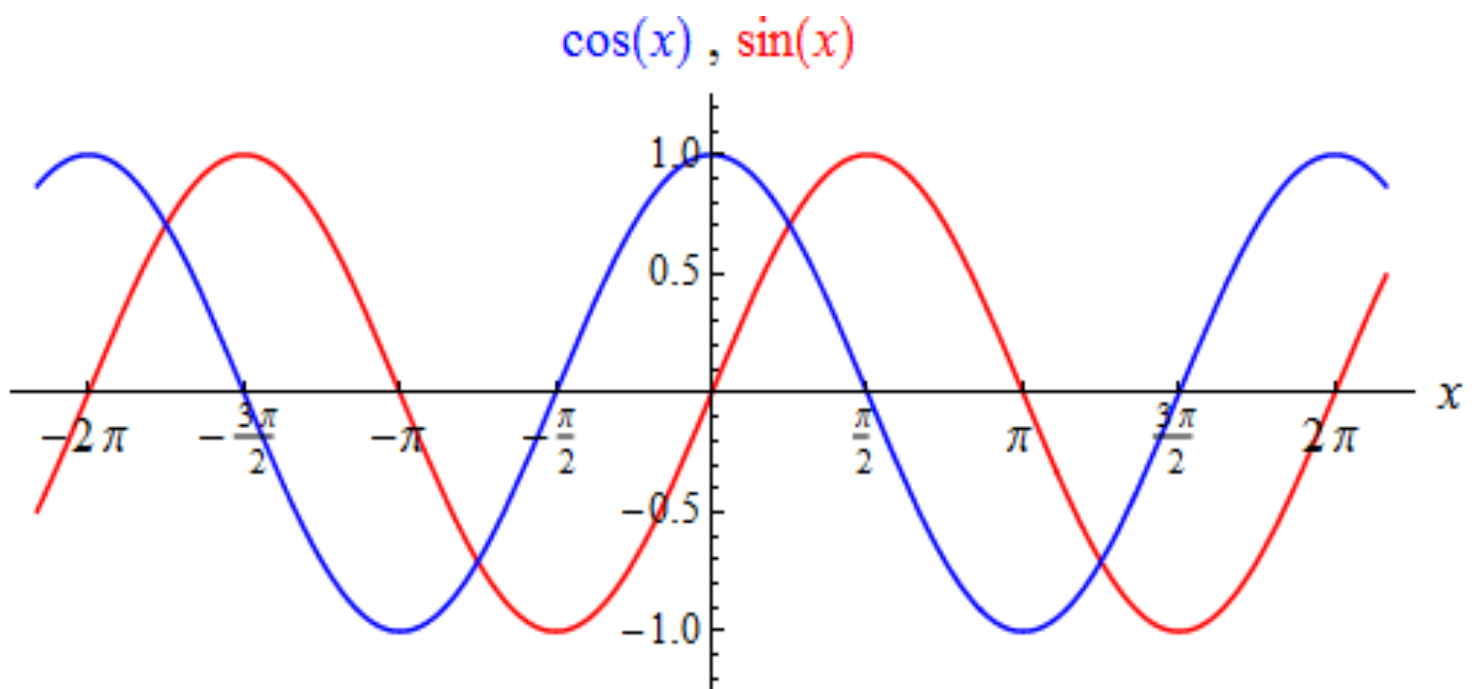


Cos und Sin -

prototypische symmetrische Funkt.

Die Funktion $\cos x$ ist gerade,
da $\cos(-x) = \cos(x)$.

Ihr Funktionsgraph ist daher
achsensymmetrisch zur y -Achse.



Die Funktion $\sin x$ ist ungerade,
da $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Ihr Funktionsgraph ist daher
punktsymmetrisch zum Ursprung.

Ebenso sind die Funktionen

$$\cos(nx), \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \text{ und } \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

alle gerade Funktionen.

Andererseits sind die Funktionen

$$\sin(nx), \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \text{ und } \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

alle ungerade Funktionen.