Aufgaben zu PDEs - 25. Mai 2016

A1 Bestimmen die Lösung $u(x,t)$, $0 \le x \le 10$, $t \ge 0$, von

$$\begin{cases} u_t &= 4u_{xx} \;, \\ u_x(0,t) &= 0 \;, \\ u_x(10,t) &= 0 \;, \\ u(x,0) &= 33 - \cos(7\pi x) \;. \end{cases}$$

Sie dürfen geeignete Basislösungen aus der Vorlesung benutzen.

A2 Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$, $0 \le x \le 2$, $t \ge 0$, von

$$\begin{cases} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \;, \\ u(0,t) &= 3 \;, \\ u(2,t) &= 1 \;, \\ u(x,0) &= f(x) \;, \\ u_t(x,0) &= g(x) \;, \end{cases}$$

wobei $f(x) = 3 - x$ und $g(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 \le x \le 1 \;, \\ 2 - x & \text{falls } 1 < x \le 2 \;. \end{cases}$.

Sie dürfen geeignete Basislösungen aus der Vorlesung benutzen.

A3 Betrachten Sie das Problem

$$\begin{cases} u_{xx} &= u_t - u \;, \\ u(0,t) &= 0 \;, \\ u(\pi,t) &= 0 \;, \\ u(x,0) &= j(x) \;. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie seine *Basislösungen* $u_n(x,t)$, $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$.

b) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$, $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$, in Abhängigkeit von $j(x)$.

Kurzlösungen

A1 $u(x,t) = 33 - e^{-196\pi^2 t}\cos(7\pi x)$.

A2 $u(x,t) = 3 - x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b_n}{n\pi c} \sin\frac{n\pi x}{2} \sin\frac{n\pi ct}{2}$ wobei

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k \\ \frac{8}{n^2\pi^2} & \text{falls } n = 2k+1 \;, k = 0,2,4,\dots \\ \frac{-8}{n^2\pi^2} & \text{falls } n = 2k+1 \;, k = 1,3,5,\dots \end{cases}$$

A3 Die Basislösungen sind $u_n(x,t) = e^{(1-n^2)t}\sin(nx)$, $n = 1,2,3,\dots$.
Die Lösung des Problems ist $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(1-n^2)t}\sin(nx)$, wobei c_n der Koeffizient von $\sin(nx)$ in der Sinus-Reihe von $j(x)$ ist:

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} j(x)\sin(nx)\,dx \;.$$