Einschätzung: Parametrisierungen

Betrachte eine Ellipse um den Punkt (0,1,2), parallel zur x-z-Ebene und mit Halbachsen 3 & 4.

Welche ist eine Parametrisierung dieser Ellipse?

a)

$$x = 3\cos t$$
$$y = 1$$
$$z = 2 + 4\sin t$$

b)

$$x = \frac{1}{3}\cos t$$
$$y = 0$$
$$z = 2 + \frac{1}{4}\sin t$$

Lösung

Da die Ellipse parallel zur x-z-Ebene liegt, bleibt die y-Koordinate konstant. Zudem gilt $y=1$, weil der Mittelpunkt der Ellipse der Punkt $(0,1,2)$ ist. Es folgt, dass nur (a) korrekt sein kann.

Wir können noch bestätigen, dass

$$x = 3\cos t \qquad \text{und} \qquad z = 2 + 4\sin t$$

eine Ellipse mit Halbachsen 3 und 4 und Mittelpunkt $(x,z)=(0,2)$ parametrisieren:

$$\frac{x}{3} = \cos t \qquad \text{und} \qquad \frac{z-2}{4} = \sin t\,,$$ deshalb

gilt $$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{z-2}{4}\right)^2 \underset{\cos^2+\sin^2=1}{=} 1$$ d.h. $$\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(z-2)^2}{4^2} = 1.$$

Einschätzung: Partielle Ableitungen

Sei $f(x,y) = x^{y}$ für $x>0$ und y beliebig definiert.

Welche ist ihre partielle Ableitung nach x, $\frac{\partial f}{\partial x}$?

a) $y\, x^{y-1}$

b) $(\ln x)\, x^{y}$

Lösung

Die Potenzfunktion $g(x) = x^a$ für $x>0$ hat die Ableitung $g'(x) = a\, x^{a-1}$ (*). Es folgt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} x^y = y\, x^{y-1}$$

und (a) ist somit korrekt. Es gilt übrigens

$$\frac{\partial}{\partial y} x^y = (\ln x)\, x^y.$$

(*) Beweis: Schreibe $g(x) = e^{y \ln x}$.

Dann gilt $g'(x) = y\, \frac{1}{x} e^{y \ln x} = y\, \frac{1}{x} x^y = y\, x^{y-1}.$

Dies ist eine Verallgemeinerung der altbekannten Formel für ganze Potenzen: $(x^n)' = n\, x^{n-1}.$

Einschätzung: Kettenregel

Seien $f(x) = e^{x^2} - x$,

$x(r,s) = r^2 s$ und

$g(r,s) = f(x(r,s))$.

Was ist die partielle Ableitung von g nach r, $\frac{\partial g}{\partial r}$?

a) $2r^5 s^3 e^{r^4 s^2} - 2rs$

b) $4r^3 s^2 e^{r^4 s^2} - 2rs$

Lösung

Unter Verwendung der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} f(x(r,s)) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x(r,s)} \cdot \frac{\partial x}{\partial r}.$$

Da $f'(x) = 2xe^{x^2-1}$ und $\frac{\partial x}{\partial r} = 2rs$, ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} f(x(r,s)) &= \left(2xe^{x^2-1}\right)\Big|_{x=r^2s} \cdot 2rs \\ &= \left(2r^2se^{r^4s^2-1}\right) 2rs.\end{aligned}$$

Somit ist (b) korrekt.

Alternativ könnten wir die Verkettung explizit schreiben $f(x(r,s)) = e^{r^4s^2-r^2s}$ und diese Funktion direkt nach r partiell ableiten.

Einschätzung: Implizite Funktion

Sei $F(x,y) = \sin(3x+y) + \sin(x^2+y^2)$.

Die Gleichung $F(x,y)=0$ definiert eine implizite Funktion $x=x(y)$ in der Nähe von $(x,y)=(0,0)$.

Was ist die Ableitung $x'(0)$?

a) -3

b) $-\frac{1}{3}$

Lösung

Wir bestimmen die partiellen Ableitungen von $F(x,y)$ an der Stelle $(x,y)=(0,0)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3\cos(3x+y) + 2x\cos(x^2+y^2); \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 3$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(3x+y) + 2y\cos(x^2+y^2); \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Nach dem Satz von der impliziten Funktion gilt

$$y'(0) = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}}\right|_{(x,y)=(0,0)} = -\frac{1}{3}.$$

Somit ist (b) korrekt.

Einschätzung: Gradient

Sei $f(x,y) = x^2y^3 + 7$ und $P = (2,-1)$.

Was ist der minimale Wert der Richtungsableitung von f im Punkt P?

Hinweis: $(\text{grad } f)(P) = (-4,12)^T$.

a) -4

b) $-4\sqrt{10}$

Lösung

Der minimale Wert der Richtungsableitung im Punkt P ist

$$-|(\text{grad } f)(P)| = -\sqrt{(-4)^2+(12)^2}$$
$$= -4\sqrt{10}.$$

Somit ist (b) korrekt.

Einschätzung: Kritische Punkte

Die Funktion $f(x,y) = x^y$ (für $x>0$) besitzt einen einzigen kritischen Punkt, nämlich $(x,y) = (1,0)$. Was für ein kritischer Punkt ist dies?

a) Sattelpunkt

b) lokale Minimum-Stelle

Lösung

Wir benutzen das Kriterium der Hesse-Matrix.

Da
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\, x^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (\ln x)\, x^{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)\, x^{y-2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\ln x)^2 x^{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + y\,(\ln x)\, x^{y-1},$$

gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 1.$

Somit ist $\quad \Delta = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0$

und (a) ist korrekt.