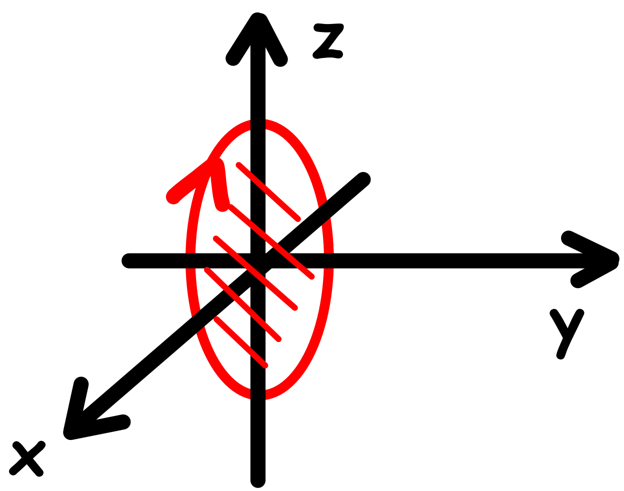
Einschätzung:
zueinander passende Orientierungen

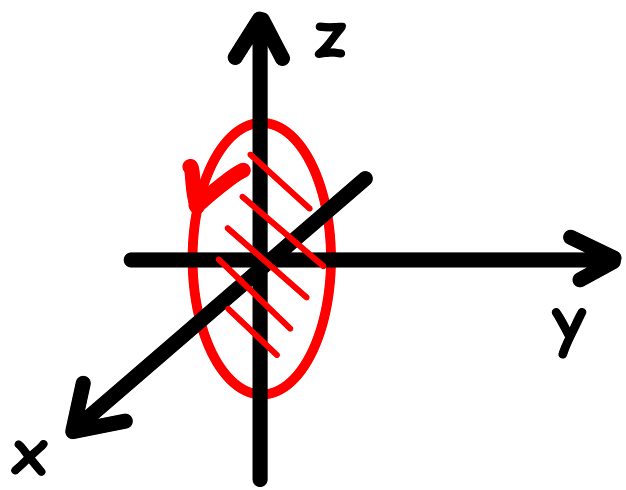
Betrachte eine Kreisscheibe auf der xz-Ebene mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = (0,1,0)^T$.

Welches Bild entspricht der passenden Richtung auf dem Randkreis?

a)

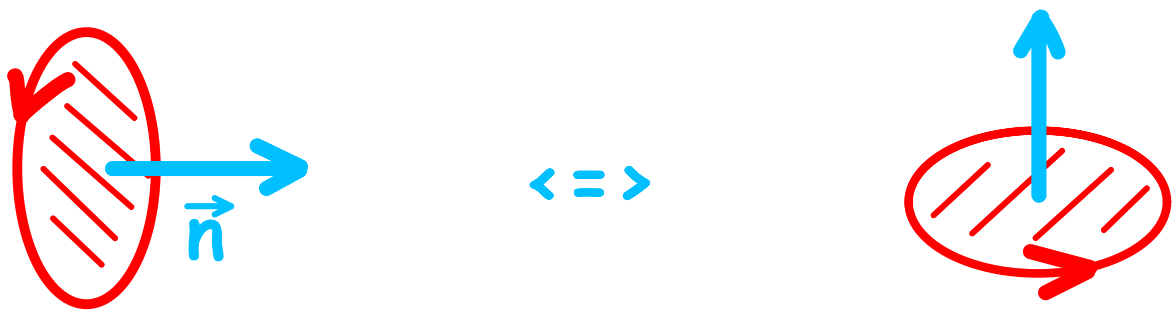


b)



Lösung

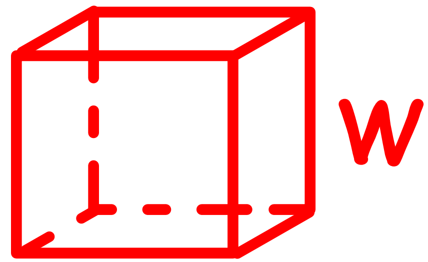
Die korrekte Wahl ist (b), da $\vec{n}$ in Richtung der positiven y-Achse zeigt.



Dies kann man auch mit der "Rechte-Hand-Regel" überprüfen.

Einschätzung: Bestimmung von Fluss

Wir möchten den nach aussen gerichteten Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}=(x,y,z)^T$ durch die Oberfläche eines Würfels W bestimmen.



Was verwenden wir am günstigsten?

a) Die Definition von Fluss.

b) Den Divergenzsatz von Gauss.

Lösung

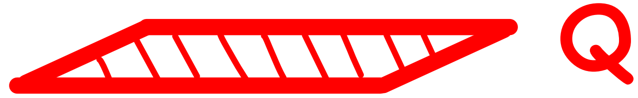
Da die Fläche die Oberfläche eines Körpers ist, verwenden wir am günstigsten den Divergenzsatz von Gauss. Ausserdem ist in diesem Fall div $\vec{F} = 3$. Damit gilt das folgende einfache Ergebnis:

$$\text{Fluss} \underset{\text{Satz von Gauss}}{=} \iiint_W 3\, dV = 3 \times \text{Volumen von } W.$$

Die Lösung ist daher (b).

Einschätzung: Bestimmung von Fluss

Wir möchten den nach oben gerichteten Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}=(x,y,z)^T$ durch eine Quadratfläche Q bestimmen.



Was verwenden wir am günstigsten?

a) Die Definition von Fluss.

b) Den Rotationssatz von Stokes.

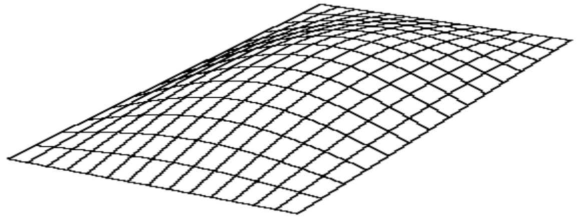
Lösung

Hier müssen wir die Definition von Fluss benutzen, da der Rotationssatz von Stokes nicht anwendbar ist. Der Satz von Stokes gilt nur für den Wirbelfluss (Fluss der Rotation eines Vektorfeldes) und in diesem Fall ist $\vec{F}$ sicher nicht von der Form $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{G}$, weil $\text{div}\,\vec{F} = 3 \neq 0$.

Die Lösung ist daher (a).

Einschätzung: schwingende rechteckige Membran

Welche ist die Lösung des folgenden Problems?



$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u \\ u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \\ u(x,y,0) = 3 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{5\pi y}{b} \\ u_t(x,y,0) = 0 \end{cases}$$

a) $u(x,y,t) =$

$$3 \cos(\lambda_{2,5} t) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{5\pi y}{b}$$

b) $u(x,y,t) =$

$$3 \sin(\lambda_{2,5} t) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{5\pi y}{b}$$

Beide Funktionen erfüllen die PDE und Randbed.
Die Lösung ist (a) wegen der Anfangsbedingungen:

$$u(x,y,0) = 3\cos(0)\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{5\pi y}{b} = 3\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{5\pi y}{b}$$ ✓

$$u_t(x,y,t) = -3\lambda_{2,5}\sin(\lambda_{2,5}t)\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{5\pi y}{b}$$

$$u_t(x,y,0) = -3\lambda_{2,5}\sin(0)\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{5\pi y}{b} = 0$$ ✓

Die Funktion in b) erfüllt andere Anfangs-
bedingungen, nämlich
$u(x,y,0) = 0$ und $u_t(x,y,0) = 3\lambda_{2,5}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{5\pi y}{b}$.