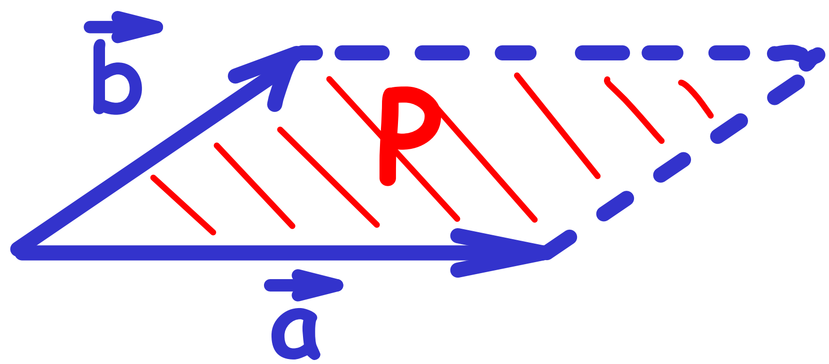
Zur Erinnerung: **Vektorprodukt** (oder **Kreuzprodukt**)

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$.

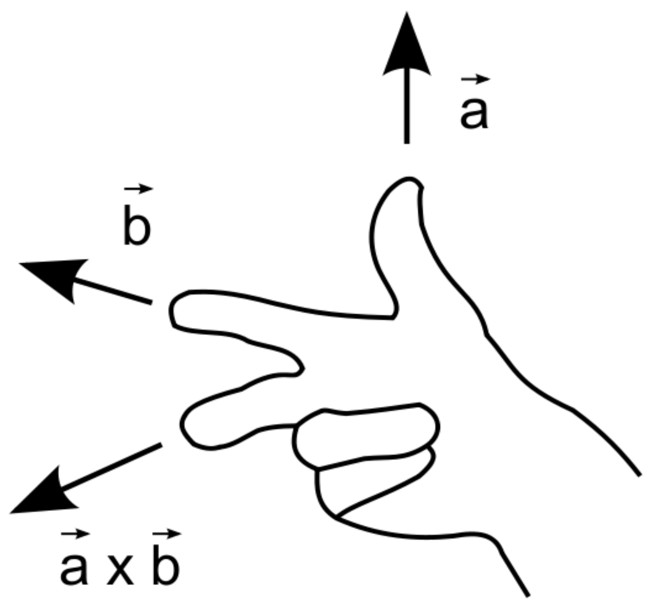
Sei P das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm.



Das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$,

- der senkrecht auf dem Parallelogramm P steht,
- der mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Rechtssystem ★ bildet und
- dessen Länge dem Flächeninhalt von P entspricht.

★ Rechte-Hand-Regel
(Rechtssystem)



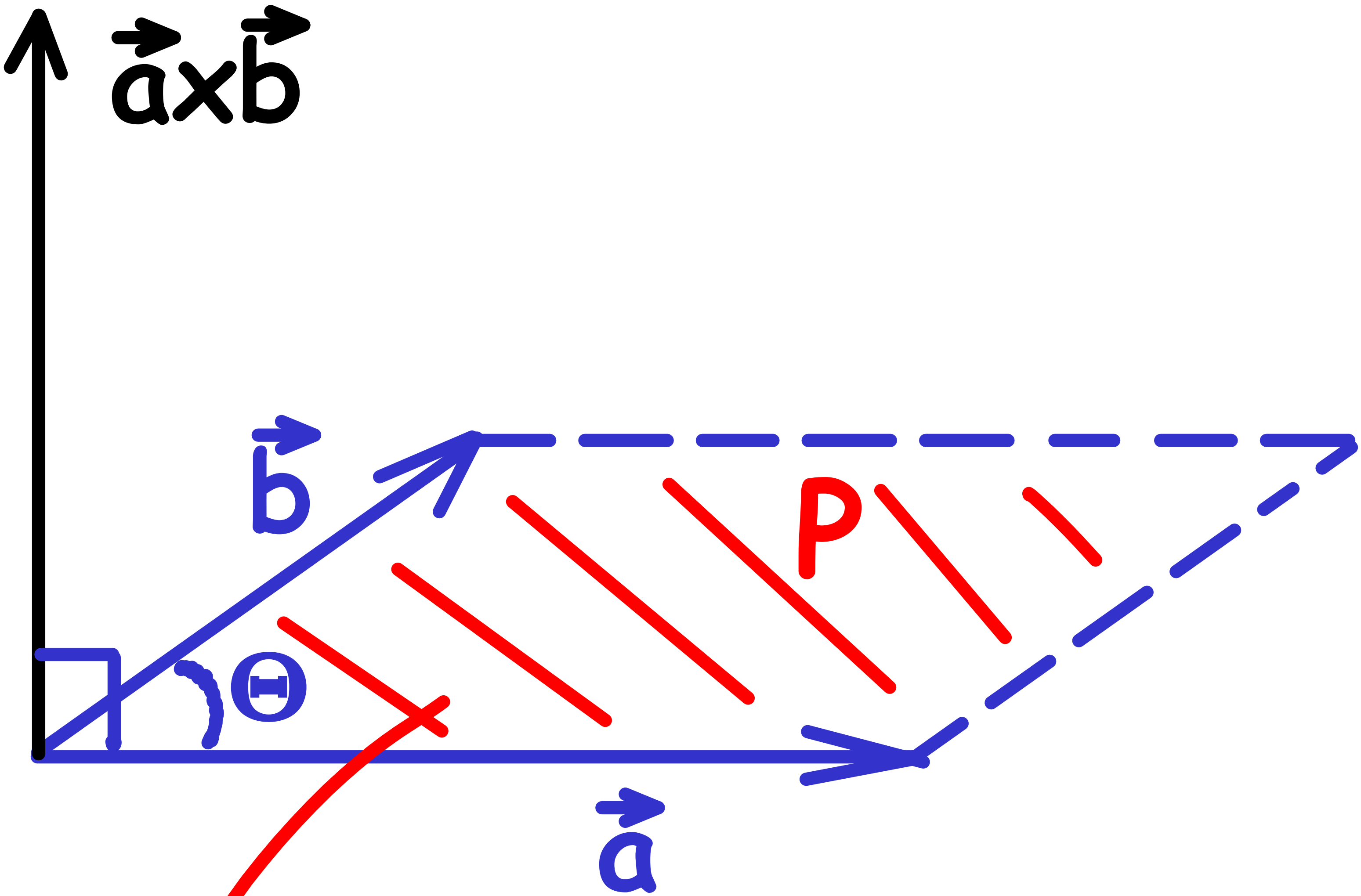
$\vec{a} \times \vec{b}$ ist so orientiert, dass

$\boxed{\vec{a},\ \ \vec{b}\ \text{ und }\ \vec{a} \times \vec{b}}$

in dieser Reihenfolge sich wie

Daumen, Zeigefinger und abgespreizter Mittelfinger

der rechten Hand verhalten.



Flächeninhalt

$$= |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$= \underbrace{|\vec{a}|}_{\text{Basislänge}} \; \underbrace{|\vec{b}| \sin\Theta}_{\text{Höhe}}$$

Θ ist der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel

Komponentenweise Berechnung

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

Merkregel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Laplacesche Entwicklung nach der ersten Zeile

$$= \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_1 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_2$$

$$+ \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$