



**S I M E T R I A   P A S S O   A   P A S S O**

**M A T E M Á T I C A   N A S   C A L Ç A D A S   D E   L I S B O A**

**P R O G R A M A   N O V O S   T A L E N T O S   D A   M A T E M Á T I C A**

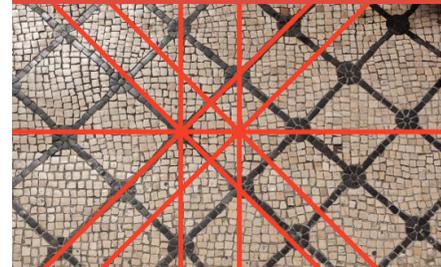


FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Há **4 aspectos de simetria**, chamados caleidoscópios, gições, cruzamentos e deslumbramentos. Ao apreciar um padrão ou um friso, procuram-se estes aspectos, nesta ordem, e, para abreviar, codificam-se com símbolos.

## CALEIDOSCÓPIOS

\***abc** (a, b, ... são números 2, 3, ... ou  $\infty$ ) representa um conjunto de espelhos que se encontram com ângulos  $\frac{180^\circ}{a}, \frac{180^\circ}{b}, \frac{180^\circ}{c}$



Por exemplo, a calçada malha de rede no Chiado é preservada por um conjunto de espelhos \* (linhas vermelhas) que se encontram em três pontos distintos com ângulos  $\frac{180^\circ}{4}, \frac{180^\circ}{4}, \frac{180^\circ}{2}$ , daí representar-se pelo símbolo **\*442**. Esta simetria também ocorre em calçadas no Largo do Município e na Praça Luís de Camões.

## GIRAÇÕES

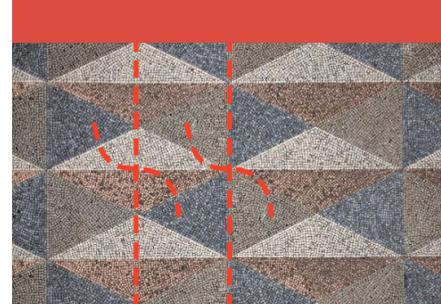
**abc** representa centros de rotação por ângulos  $\frac{360^\circ}{a}, \frac{360^\circ}{b}, \frac{360^\circ}{c}$ , respectivamente, através dos quais não passa qualquer espelho.



Por exemplo, a calçada entrançada nos Restauradores é preservada por rotação em torno de três centros por ângulos  $\frac{360^\circ}{4}, \frac{360^\circ}{4}, \frac{360^\circ}{2}$ , daí o símbolo **442**.

## CRUZAMENTOS

**X** representa uma reflexão com deslizamento.



Por exemplo, a calçada em frente ao Planetário Gulbenkian goza de dois quase-espelhos (daí o símbolo **XX**): a imagem reflectida em cada uma das linhas marcadas deve ser deslizada para que volte a coincidir com a imagem de partida. Note-se as diferentes quatro cores no padrão.

## DESLUMBRAMENTOS

**O** simboliza um padrão sem caleidoscópios, nem gições, nem cruzamentos.



Por exemplo, a calçada imaginária ao lado não apresenta quaisquer dos aspectos anteriores, restando-lhe apenas a repetição do motivo por translação em duas direcções distintas.

Imagine-se o **Restaurante Simetria** para satisfazer o apetite simétrico. Pensando nos símbolos como pratos do dia, podem compor-se menus.

Pratos do dia	Preço	Preço para combinados <sup>a</sup>
<b>O</b>	<b>2</b>	<b>-</b>
<b>*</b>	<b>1</b>	<b>-</b>
<b>X</b>	<b>1</b>	<b>-</b>
número <b>n</b>	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n-1}{2n}$
$\infty$	<b>1</b>	$\frac{1}{2}$

<sup>a</sup> 2, 3, 4, ...  $\infty$  têm desconto de 50% quando à direita de \*

Por exemplo, o número 3 custa normalmente €  $\frac{2}{3}$ , mas o combinado \*3 custa apenas €  $1 + \frac{1}{3} = € \frac{4}{3}$

A conta do almoço simétrico é uma soma de frações!

Por exemplo, o menu **\*442** custa  $1 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 2$

Por exemplo, o menu **22 $\infty$**  também custa  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$

Pensa-se numa simetria de um padrão ou de um friso como um menu com um certo custo.

## TEOREMA MÁGICO

Os tipos de padrões ou frisos que podem existir correspondem às combinações de símbolos – os menus – com custo total 2. Pode-se concluir (exercício!) que há apenas

17 TIPOS DE PADRÕES [menus que não envolvem o símbolo $\infty$ ]					7 TIPOS DE FRISOS [menus que envolvem o símbolo $\infty$ ]		
*632	632	*442	442	*333	*22 $\infty$	22 $\infty$	2* $\infty$
333	*2222	2222	4*2	3*3	2*22	* $\infty\infty$	$\infty\infty$
22*	**	*X	XX	22X	O	$\infty^*$	$\infty X$

Mas donde vem o teorema mágico? Imagine-se um padrão estampado num pano e que se enrola esse pano de maneira a sobrepôr as repetições do padrão.



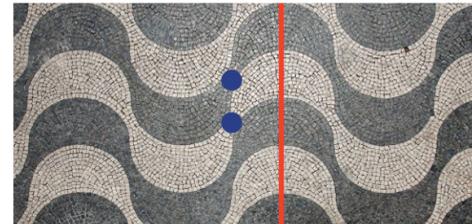
Por exemplo, um pano com o padrão das folhas de ginkgo ao lado seria enrolado verticalmente obtendo-se um cilindro com uma fila de folhas lado a lado e depois horizontalmente obtendo-se um pneu com apenas uma folha estampada.

Em geral, obtém-se uma superfície que pode ter bicos e/ou que não se consegue visualizar nas nossas três dimensões espaciais.

O teorema mágico resulta do estudo matemático do que essas superfícies, ditas orbivariadas, podem ser.

O primeiro a compreender esta relação de simetria com orbivariadas foi o geómetra americano **Bill Thurston**. Quem popularizou este novo olhar sobre simetria e criou o sistema de símbolos aqui apresentado para a descrever foi o matemático britânico **John H. Conway**.

Nas calçadas de Lisboa já foram detectados representantes de 11 dos 17 tipos de padrões e todos os tipos de frisos. No verso desta brochura propõe-se um passeio que pisa pelo menos 4 tipos de padrões e 4 tipos de frisos.



Por exemplo, a calçada mar largo no Rossio pode ser reflectida ao longo de um espelho \* (a vermelho) e rodada em torno de dois centros (a azul) ambos por ângulo  $\frac{360^\circ}{2}$ .

**22\***



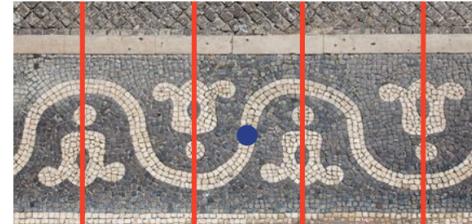
As ondas da calçada à entrada do CAM da Fundação Gulbenkian têm uma simetria diferente – exibindo quatro centros de rotação por  $\frac{360^\circ}{2}$  – graças à variação da sua espessura.

**2222**



A calçada grega na Rua Áurea goza de um conjunto de infinitos espelhos paralelos que se cruzam num ponto no infinito, como se o ângulo entre eles fosse  $\frac{360^\circ}{\infty}$  e um centro de rotação por ângulo  $\frac{360^\circ}{2}$ .

**2\* $\infty$**



O tipo de simetria **2\* $\infty$**  também se encontra presente na calçada da esquina da Rua Vitor Cordon com o Largo da Academia Nacional de Belas Artes.

**2\* $\infty$**

Os tipos de padrões ainda não encontrados são

<b>632</b>	<b>333</b>	<b>*333</b>	<b>22X</b>	<b>4*2</b>	<b>O</b>
------------	------------	-------------	------------	------------	----------

Assim se lança o desafio de descobri-los ou produzi-los!

Encontra-se uma galeria de fotografias de calçadas simétricas e outras informações em

[www.math.ist.utl.pt/simetria/](http://www.math.ist.utl.pt/simetria/)

Projecto financiado pela Fundação Gulbenkian no âmbito do Programa Novos Talentos em Matemática, com proposta de colaboração com a Câmara Municipal de Lisboa e a Sociedade Portuguesa de Matemática.

Textos/conteúdos: Ana Cannas Fotografia: João Ferrand Design: Atelier António Modesto Lda. Impressão: Popelmunde Maio 2010



# SIMETRIA PASSO A PASSO

## MATEMÁTICA NAS CALÇADAS DE LISBOA

### PROGRAMA NOVOS TALENTOS DA MATEMÁTICA



FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN



Largo do Chiado [friso em torno do monumento]

FRISO \*∞∞∞



Praça Luís de Camões

PADRÃO \*442



Restauradores

PADRÃO 442



Rossio

PADRÃO 22\*



Rua Garrett

PADRÃO \*442



ROTA DA SIMETRIA



Rua Áurea

FRISO 2\*∞



Praça do Município

PADRÃO \*442



Rua do Comércio

FRISO \*22∞



Rua dos Correios [note-se a variação da espessura das cunhas]

FRISO ∞∞∞



Rua Augusta [note-se que são losangos, não quadrados]

PADRÃO 2\*2