SIMETRIA PASSO A PASSO

ANA CANNAS DA SILVA

A simetria sempre fascinou e serviu a humanidade em arquitetura, arte, engenharia e ciência. Há milhares de anos que os padrões planos são utilizados no dia-a-dia em tecidos, cestos, pavimentos e, mais recentemente, papéis de parede, papéis de embrulho, etc.

Em finais do século XIX, o matemático e mineralogista russo Yevgraf Fyodorov estabeleceu que são exatamente 17 os tipos de simetria para padrões no plano [WPG]. Ou seja, podemos ter 17 papéis de parede diferentes em termos das repetições da simetria, e não mais! Notavelmente, todos estes tipos de simetria podem ser encontrados em artes decorativas na antiguidade.

Mas só nos anos 80 o fenómeno da existência de 17 tipos foi explicado de uma maneira geométrica, usando conhecimento de soma de frações e só um pouco de topologia. Essa explicação foi descoberta por Bill Thurston e amplamente divulgada por John H. Conway. Conway criou uma linguagem feliz para as ideias de Thurston em termos de quatro *aspectos de simetria: espelhos, rotações, cruzamentos e admirações*, que descrevemos sumariamente na Secção 1.

Além da linguagem em termos destes aspectos de simetria, Conway estabeleceu símbolos mnemónicos correspondentes (*, algarismos, X e O). Cada tipo de simetria fica assim, graças a Conway e a Thurston, com uma *assinatura simbólica* (símbolos que identificam o tipo de simetria), bem mais elucidativa e convidativa do que a notação cristalográfica antiga.

A classificação de simetrias planas *à la* Conway e Thurston é discutida na Secção 2 com recurso a aritmética elementar. Terminamos o texto na Secção 3 com os resultados até à data de um levantamento de simetria em empedrados de calçada portuguesa, de que o *Calçadão* no Rio de Janeiro (centro da Figura 1) é talvez o exemplo internacionalmente mais famoso.

Figura 1. Calçadas no Rossio (Lisboa), Copacabana (Rio de Janeiro) e Belém (Lisboa).

1. Aspectos de Simetria

• O aspecto de simetria chamado **espelho** denota a presença de simetria por reflexão e é simbolizado por uma estrela *. Por exemplo, uma cadeira vulgar apresenta apenas simetria por

Date: 30 de Março de 2012.

Com o apoio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia e da Fundação Gulbenkian (Portugal).
Fotos de Lisboa por João Ferrand; fotos da Figura 7 por Dror Bar-Natan.

reflexão relativamente a um plano bissector, pelo que a sua simetria tem assinatura $*$. Quando vários espelhos se encontram, tal como num caleidoscópio, registamos também os números de espelhos que se cruzam em cada ponto. Por exemplo, a calçada *malha de rede*, na Figura 2, tal como um papel quadriculado, é preservada por reflexão em inúmeros espelhos. Concentremo-nos num sector triangular limitado por três espelhos (um oitavo de quadrícula), dito um *domínio fundamental*. Se nos imaginarmos nesse triângulo fundamental rodeados pelos três espelhos, observamos toda a calçada reproduzida infinitamente. Para caracterizarmos esta simetria basta registarmos os ângulos desse triângulo ou, equivalentemente, quantos espelhos se cruzam em cada vértice. Temos 4 espelhos cruzando-se em cada centro de quadrado, 4 em cada vértice e 2 a meio de cada segmento, pelo que esta simetria tem assinatura $*\ 4\ 4\ 2$.

FIGURA 2. Calçada na Rua Garrett em Lisboa (Chiado), com assinatura $*$ **4 4 2**.

• Uma simetria por **rotação** e *não por espelho* é caracterizada pelo correspondente ângulo (mínimo positivo) de rotação que é uma fração de 360°. Por exemplo, a calçada na Figura 3 é preservada por rotações. Qualquer dos seus centros de rotação é equivalente a um de três distintos, assinalados na figura, com ângulos $\frac{360°}{4}$, $\frac{360°}{4}$, $\frac{360°}{2}$. A correspondente assinatura reúne os denominadores das frações: **4 4 2**.

FIGURA 3. Calçada na Praça dos Restauradores em Lisboa, com assinatura **4 4 2**.

• O aspecto de simetria **cruzamento**, representado por uma cruz **X**, ocorre quando se encontra um caminho de uma figura para uma sua cópia reflectida *sem atravessar qualquer espelho*.

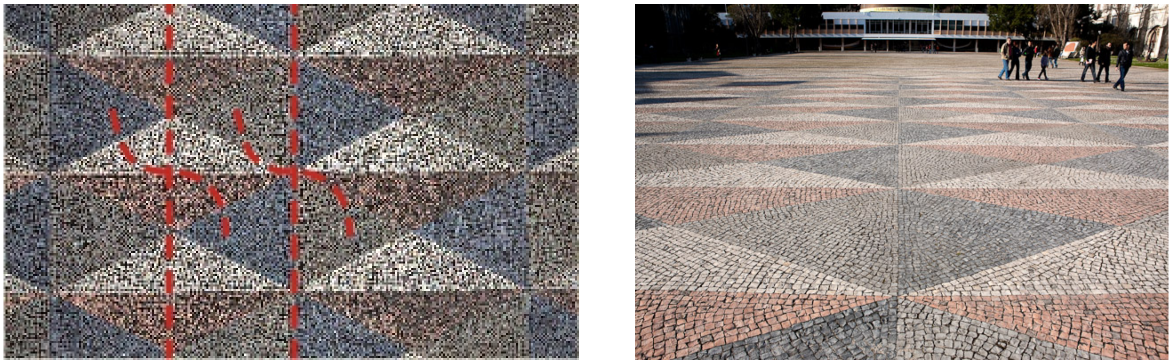

FIGURA 4. Calçada a quatro cores junto ao Mosteiro dos Jerónimos em Lisboa, com assinatura **X X**.

Por exemplo, a calçada *a quatro cores* na Figura 4 apresenta dois cruzamentos, logo tem assinatura **X X**.

• Diz-se que o aspecto **admiração**, simbolizado por um anel **O**, ocorre quando um padrão não apresenta *nem* espelhos, *nem* rotações, *nem* cruzamentos. Por exemplo, a calçada na Figura 5, imaginada repetindo na horizontal e na vertical um módulo extraído da calçada na Praça dos Restauradores, apresenta zero (0) aspectos anteriores (Oh!), daí ter assinatura **O**.

FIGURA 5. Calçada imaginária com assinatura O.

2. Padrões no Plano

Uma metáfora ajuda-nos a descobrir os 17 tipos de padrões em termos das correspondentes assinaturas: Imaginemos o Restaurante *Simetria* que oferece o seguinte cardápio.

pratos do dia	preço	preço para combinados†
O	2	—
$*$	1	—
número **N**	$\frac{N-1}{N}$	$\frac{N-1}{2N}$
X	1	—

† 2, 3, 4, ... têm desconto de 50% quando combinados à direita de $*$.
Por exemplo, **3** custa $\frac{2}{3}$€ mas o combinado $*$ **3** custa apenas $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$€.

Em tempos de crise, suponhamos que o orçamento para o almoço é 2€. O que poderemos almoçar esgotando completamente o orçamento? Por exemplo, a opção **∗ 4 4 2** custa $1 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} =$ 2€, assim como a opção **2 2 X** também custa $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 =$ 2€.

"Teorema Mágico" para o plano: *Os tipos de padrões planos correspondem às combinações de símbolos (ou opções) com custo total exatamente 2.*

Mas quais são os tipos de padrões? E donde vem o *Teorema Mágico*?

Usando o *Teorema Mágico*, a resposta à primeira pergunta não passa de um exercício. Reparamos que, na ausência de ∗, cada algarismo custa no mínimo $\frac{1}{2}$ e sempre menos do que 1. Deduzimos primeiro a lista de assinaturas que não envolvem ∗:

6 3 2, **4 4 2**, **3 3 3**, **2 2 2 2**, **X X**, **2 2 X**, **O**.

Ora, com a, b, c a representarem números, o "combinado" ∗ $ab \ldots c$ custa 2 quando $ab \ldots c$ custar 2. Assim, a lista acima dá origem à correspondente lista de assinaturas que começam por ∗:

∗ 6 3 2, **∗ 4 4 2**, **∗ 3 3 3**, **∗ 2 2 2 2**, **∗ X**, **∗ ∗**.

Quem sabe somar frações completa a lista com as assinaturas mistas:

4 ∗ 2, **3 ∗ 3**, **2 ∗ 2 2**, **2 2 ∗**.

Descobrimos então que só há ao todo estes 17 tipos de padrões.

Quanto à segunda pergunta, para perceber de onde vem o *Teorema Mágico*, remetemos o texto que continua este artigo [NOS]. Uma análise muito mais completa e com fascinantes ilustrações pode ser encontrada no livro [CBG]. Esse livro explica também em que espaços vivem os padrões correspondentes às opções com custo inferior a 2 e àquelas com custo superior a 2.

3. Matemática nas Calçadas

Introduzida no século XIX como uma inovadora iniciativa de ocupação dos prisioneiros no Castelo de S. Jorge, a *calçada portuguesa* tornou-se desde então num ex-líbris da cidade de Lisboa, é o revestimento mais aplicado nos passeios nas zonas históricas de cidades portuguesas e encontra-se em todos os continentes por influência portuguesa.

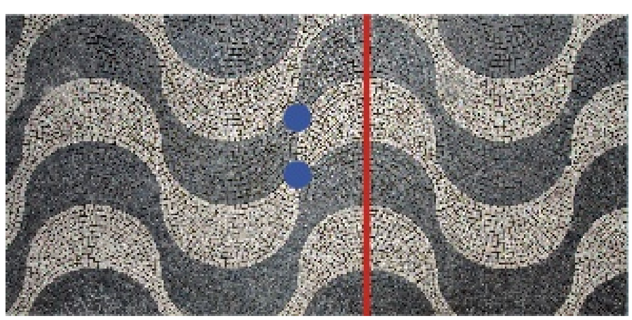

Figura 6. Padrão *ondas do mar largo* com assinatura 2 2 ∗.

O seu desenho mais reconhecido, *ondas do mar largo*, foi usado em 1849 na Praça D. Pedro IV,[1] informalmente chamada Rossio, e importado para Copacabana em 1906 com redobrado sucesso; ver Figura 1.

Nas *ondas do mar largo* encontramos espelhos todos equivalentes e centros de rotação por 180^o nas partes mais estreitas das ondas de dois tipos (escuro e claro), donde se conclui que a sua assinatura é 2 2 ∗; ver Figura 6.

Será que todos os tipos de simetria já aparecem na calçada portuguesa?

Lançou-se em Lisboa um levantamento dos tipos de simetria presentes em calçada portuguesa [SPP] com o intuito de completar a lista. O tipo **4 ∗ 2** foi encontrado na cidade de Guimarães. Ainda não se detectaram em calçada portuguesa os seguintes tipos:

6 3 2, **3 3 3**, **∗ 3 3 3**, **2 2 X**, **O**.

Enquanto que o tipo **O** está ilustrado na Figura 5, os restantes quatro tipos em falta podem ser reconhecidos nos detalhes de objectos na Figura 7. Mais exemplos dos tipos em falta podem ser encontrados em [PEF].

Figura 7. Detalhes de cesto, tampo de mesa, imagem de caleidoscópio e esponja, ilustrando os tipos de simetria **6 3 2**, **3 3 3**, **∗ 3 3 3**, **2 2 X**, respectivamente.

Conseguirá o leitor ou a leitora encontrar algum nas calçadas da sua vizinhança? A autora agradece desde já o envio por email de contribuições de todo o mundo!

Referências

[CBG] Conway, J. H., H. Burgiel, C. Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, A K Peters, 2008.
[NOS] Cannas da Silva, A., *Um Novo Olhar Sobre Simetria*, `http://www.math.ethz.ch/~acannas/Outreach`.
[PEF] *Padrões em Falta*, `http://www.math.ethz.ch/~acannas/Outreach`.
[SPP] *Simetria Passo a Passo – Matemática nas Calçadas de Lisboa*, `http://www.math.ist.utl.pt/simetria`.
[WPG] *Wallpaper Group*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group`.

Department of Mathematics, ETH Zurich, 8092 Zurich Switzerland e Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, 1049-001 Lisboa, Portugal

E-mail address: `acannas@math.ist.utl.pt`

[1] O rei D. Pedro IV de Portugal foi o primeiro imperador, Pedro I, do Brasil.