

# UM NOVO OLHAR SOBRE SIMETRIA

ANA CANNAS DA SILVA

## 1. SIMETRIAS ESFÉRICAS E ORBI-SUPERFÍCIES

Certamente não é preciso saber matemática para apreciar a simetria que nos rodeia e atrai na natureza, em arte e no dia-a-dia. Mas até aos anos 80 era necessária sofisticação em teoria de grupos para compreender a classificação dos tipos de simetria. A perspectiva geométrica dos matemáticos norte-americano Bill Thurston e britânico John H. Conway oferece agora uma abordagem mais acessível. Thurston propõe que, ao estudar a simetria de um objecto tridimensional, tal como a simetria bilateral de uma cadeira analisada na Figura 1, visualizemos o objecto no interior de uma esfera. Consideremos *equivalentes* pontos relacionados por transformações da simetria do objecto. Por exemplo, pontos da perna direita de uma cadeira são equivalentes aos correspondentes pontos da perna esquerda por reflexão. Para a esfera que envolve a cadeira, consideramos pontos do hemisfério esquerdo equivalentes aos correspondentes pontos do hemisfério direito. Um hemisfério diz-se um *domínio fundamental* uma vez que contém um ponto de cada classe de equivalência. O espaço das classes ou *órbitas* de equivalência, recordando a hierarquia do tamanho dessas órbitas, é o que se chama uma *orbi-superfície*.

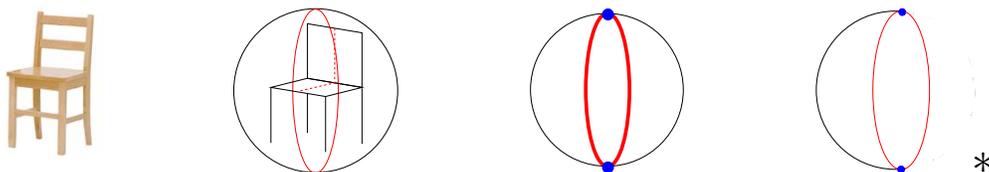


FIGURA 1. Estudo de simetria bilateral: desde uma cadeira até à decomposição da respectiva orbi-superfície em vértices, arestas e faces.

No caso da simetria bilateral, a orbi-superfície será uma meia carapaça esférica representada na Figura 1 e simbolizada por uma estrela  $*$  na notação de Conway. No entanto, os seus pontos não são todos iguais, pois alguns representam órbitas mais numerosas. No caso da meia carapaça esférica, os pontos do bordo da carapaça representam órbitas singulares, enquanto que os restantes pontos representam órbitas de dois elementos. Podemos pensar que os pontos do bordo *valem metade* dos restantes pontos – a orbi-superfície não é democrática.

Entender simetrias *a la Thurston* passa por entender as correspondentes orbi-superfícies.

Ignorando os tipos de pontos, as orbi-superfícies não são mais do que superfícies, das quais é conhecida a classificação desde meados do século XIX. Todas as superfícies podem ser obtidas de uma esfera com operações de apenas três tipos: furos, colagem de asas e colagem de tampas de Möbius. Um *furo* consiste em remover um disco, e representa-se simbolicamente por uma estrela  $*$ . Colar uma *asa* (no sentido de arco para pegar) consiste em remover dois discos disjuntos e anexar um cilindro ligando os dois furos; representa-se por um anel  $O$ . A colocação de uma *tampa de Möbius*, ou *crosscap* na literatura anglo-saxónica, representada por uma cruz  $X$ , consiste em remover um disco e tapar esse furo com uma banda ou fita de Möbius (cujo bordo é também uma circunferência) [FM]. É difícil visualizar esta última operação pois não

---

*Date:* 30 de Janeiro de 2012.

Com o apoio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia e da Fundação Gulbenkian (Portugal).

se consegue realizar em três dimensões. Mostra-se que o efeito de introduzir uma asa e uma tampa de Möbius,  $\mathbf{O X}$ , é sempre equivalente ao de introduzir três tampas de Möbius,  $\mathbf{X}^3 = \mathbf{X X X}$ . Fora esta redundância, não há mais repetições. Desta maneira, as superfícies distintas correspondem exactamente às *assinaturas*  $\mathbf{O}^m *^n$  ou  $*^n \mathbf{X}^p$  com  $m, n, p = 0, 1, 2, \dots$ . A Figura 2 apresenta algumas superfícies. A esfera corresponde à assinatura  $\mathbf{O}^0 *^0 = *^0 \mathbf{X}^0 = \mathbf{1}$ .

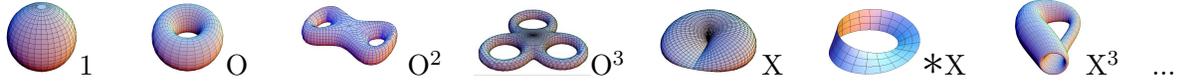


FIGURA 2. Algumas das superfícies mais simples.

Da classificação das superfícies segue a classificação das orbi-superfícies. A assinatura de uma orbi-superfície inclui, além dos símbolos da superfície subjacente, também algarismos que registam o carácter fraccionário de alguns dos seus pontos. Encontra-se um exemplo na Figura 3.

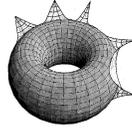


FIGURA 3. A orbi-superfície  $\mathbf{O 2 2 5 * 3 4}$  é construída a partir de uma esfera com uma asa  $\mathbf{O}$ , incluindo três pontos cónicos de ângulos  $\frac{360^\circ}{2}$ ,  $\frac{360^\circ}{2}$  e  $\frac{360^\circ}{5}$ , um furo  $*$  e dois cantos na fronteira desse furo de ângulos  $\frac{180^\circ}{3}$  e  $\frac{180^\circ}{4}$ .

Para obtermos uma orbi-superfície com uma certa assinatura, peguemos numa esfera e por cada símbolo na assinatura causemos o efeito correspondente listado na tabela seguinte. Os efeitos dos símbolos na construção coincidem com os efeitos na orbi-superfície dos respectivos *aspectos de simetria* apresentados em [SPP]. (Sempre que  $N=1$  ocorre pode ser omitido pois o seu efeito é nulo.)

símbolo	efeito na construção	aspecto de simetria
*	furo	<i>espelho</i>
N	ponto cónico	centro de <i>rotação</i> por ângulo $\frac{360^\circ}{N}$
N após *	canto na fronteira	cruzamento de N espelhos
O	asa	<i>admiração</i>
X	tampa de Möbius	<i>cruzamento</i>

Acontece que, para testar se uma orbi-superfície corresponde a uma simetria, o que interessa é a sua *característica de Euler* [CE].

## 2. CARACTERÍSTICA DE EULER DE UMA ORBI-SUPERFÍCIE

A característica de Euler de uma superfície é o número

$$\chi = (\text{n}^\circ \text{vértices}) - (\text{n}^\circ \text{arestas}) + (\text{n}^\circ \text{faces})$$

onde se contam os vértices, arestas e faces de uma triangulação ou de um mapa sobre a superfície, com segmentos por arestas e faces sem buracos. Consideremos dois mapas sobre uma dada

superfície. Movendo ligeiramente um deles se necessário, podemos assumir que os vértices de cada mapa estão sobre as faces do outro. Constatamos que o mapa que resulta de fundir os dois, cujos vértices são todos os anteriores e ainda os pontos de intersecção das arestas, tem a mesma soma alternada  $\chi$  de qualquer dos mapas de partida, pelo que a característica de Euler é independente do mapa escolhido.

Para uma superfície esférica a característica de Euler é 2, como podemos verificar considerando um mapa criado pela projecção de um tetraedro, ou de um cubo, etc. Para uma orbi-superfície obtida de uma esfera identificando pontos relacionados por certas transformações, define-se a característica de Euler *enquanto orbi-superfície* como

$$\chi(\text{orbi-superfície}) = \frac{2}{\text{n}^\circ \text{ transformações}} .$$

Para a orbi-superfície hemisférica da simetria bilateral obtemos  $\chi = 1$ , uma vez que há duas transformações: identidade e reflexão. A transformação identidade, tão preguiçosa que nada mexe, está presente em todos os casos. Para a orbi-superfície triangular das simetrias de um cubo exibida na Figura 4 obtemos  $\chi = \frac{1}{24}$ , já que há 48 transformações que preservam o cubo!

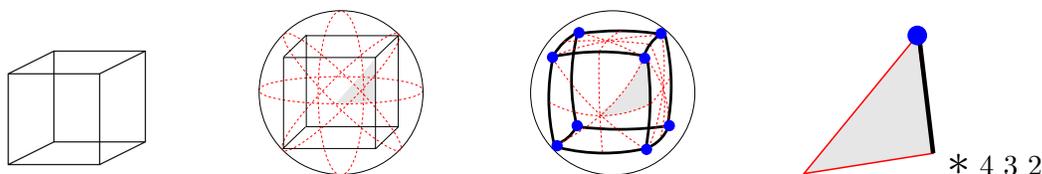


FIGURA 4. Estudo da simetria de um cubo até à decomposição da respectiva orbi-superfície em vértices, arestas e faces.

Em alternativa, o número  $\chi(\text{orbi-superfície})$  pode ser obtido contando vértices  $V$ , arestas  $A$  e faces  $F$  num mapa sobre a orbi-superfície, *tendo em atenção que certos pontos valem menos por corresponderem a órbitas menos numerosas*. Engrossemos vértices e arestas de maneira a realçar fracções de vértices-bolas ou de arestas-cilindros. Para a orbi-superfície da simetria bilateral, escolhendo o mapa da Figura 1, temos dois meios vértices  $V = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ , duas meias arestas  $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  e uma face  $F = 1$ , o que bate certo com  $\chi = V - A + F = 1$ . Para a orbi-superfície das simetrias do cubo, o mapa da Figura 4 exhibe  $V = \frac{1}{6}$  (um sexto de vértice pois o vértice original do cubo é partilhado por 6 domínios fundamentais),  $A = \frac{1}{4}$  (a aresta original do cubo é partilhada por 4 domínios fundamentais) e  $F = \frac{1}{8}$  (a face original do cubo contém 8 domínios fundamentais), donde  $\chi = V - A + F = \frac{1}{24}$ .

Vejam agora como podemos construir uma orbi-superfície com uma dada característica de Euler. Qualquer orbi-superfície é obtida de uma esfera construindo os efeitos dos símbolos na assinatura da orbi-superfície. Cada efeito tem uma consequência numa triangulação, tal como eliminação de uma face ou cisão de uma aresta ou de um vértice, que implica um *custo* a deduzir à característica de Euler da esfera de partida para obter a característica de Euler da orbi-superfície. A tabela seguinte indica os efeitos em termos da característica de Euler. Esta tabela pode ser verificada escolhendo triangulações bem ajustadas a cada efeito. Por exemplo, um furo é criado eliminando uma face e despromovendo os vértices e arestas em torno dessa face a meios-vértices e meias-arestas. Para transformar um ponto vulgar em ponto cónico de ordem  $N$ , convém escolher uma triangulação em que o ponto original seja o vértice no centro de um polígono de  $N$  lados, com  $N$  raios/arestas a partir dele. O ponto cónico é criado como

que enrolando esse polígono, sobrepondo os  $N$  raios, perdendo um vértice vulgar e ganhando um  $N$ -ésimo de vértice.

símbolo	efeito na construção	custo na característica de Euler
*	furo	1
$N$	ponto cónico	$1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$
$N$ após *	canto na fronteira	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2N} = \frac{N-1}{2N}$
$O$	asa	2
$X$	tampa de Möbius	1

### 3. AS ORBI-SUPERFÍCIES DOS PADRÕES ESFÉRICOS E PLANOS

Qualquer orbi-superfície obtida de uma esfera com transformações de simetria tem característica de Euler  $\frac{2}{\#}$ , onde  $\#$  é o número de transformações. Então, para deduzir quais os tipos de simetria que podem ocorrer numa esfera, procuramos primeiro todas as orbi-superfícies com característica de Euler da forma  $\frac{2}{\#}$ . Ou seja, procuramos todas as combinações de símbolos com custo total  $2 - \frac{2}{\#}$ . Depois verificamos se essas orbi-superfícies correspondem de facto a alguma simetria;  $* N M$  e  $N M$ , com  $N$  e  $M$  números diferentes, falham o último teste, pois não podem ser obtidas de uma esfera, essencialmente porque os únicos polígonos de dois lados que podem existir na esfera têm que ter ângulos iguais.

**Teorema Mágico** para a esfera: *Os tipos de padrões esféricos correspondem às seguintes combinações de símbolos (as 7 últimas sendo famílias dependentes do parâmetro  $N = 1, 2, 3, \dots$ ):*

$$\begin{array}{cccccccc}
 * & 5 & 3 & 2, & * & 4 & 3 & 2, & * & 3 & 3 & 2, & 5 & 3 & 2, & 4 & 3 & 2, & 3 & 3 & 2, & 3 & * & 2, \\
 * & 2 & 2 & N, & * & N & N, & 2 & * & N, & 2 & 2 & N, & N & N, & N & *, & N & X.
 \end{array}$$

Para deduzir o Teorema Mágico para o plano a partir do caso da esfera basta deixar o número  $\#$  de transformações de simetria tender para infinito:  $\lim_{\# \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{\#}\right) = 2$ . Isto é, para uma orbi-superfície de um padrão plano a característica de Euler deve ser nula. Os 17 tipos de padrões planos são listados e discutidos no artigo [SPP]. O DVD [SA] exhibe as correspondentes 17 orbi-superfícies como carimbos a moverem-se para estampar um plano com diferentes simetrias. Mais explicações sobre estas ideias, com impressionantes ilustrações, podem ser encontradas no livro [CBG]. A simetria, intuitivamente tão geométrica, afinal é intrinsecamente geométrica!

### REFERÊNCIAS

- [CBG] Conway, J. H., H. Burgiel, C. Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, A K Peters, 2008.  
 [CE] *Característica de Euler*, [http://pt.wikipedia.org/wiki/Característica\\_de\\_Euler](http://pt.wikipedia.org/wiki/Característica_de_Euler).  
 [FM] Fita de Möbius, [http://pt.wikipedia.org/wiki/Fita\\_de\\_Möbius](http://pt.wikipedia.org/wiki/Fita_de_Möbius).  
 [SA] *Simetria – Apresentação Dinâmica*, Projecto Atractor, <http://www.atractor.pt/publicacoes/ritmo.htm>.  
 [SPP] Cannas da Silva, A., *Simetria Passo a Passo*, <http://www.math.ethz.ch/~acannas/Outreach>.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ETH ZURICH, 8092 ZURICH SWITZERLAND E DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, 1049-001 LISBOA, PORTUGAL

*E-mail address:* [acannas@math.ist.utl.pt](mailto:acannas@math.ist.utl.pt)