Musterlösungen Basisprüfung Sommer 2020

1. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2+5} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Linearisierung von $f(x)$ in $x_0 = 2$.

   (b) Was ist der Wertebereich von $f(x)$?

   (c) Sei $F(x)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(0) = 33. \end{cases}$$

   Ist $F(1)$ grösser oder kleiner als 33? Sie brauchen **nicht** $F(x)$ zu bestimmen.

Lösung:

   (a) Es gilt

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \ \Rightarrow f'(2) = \frac{2}{3}.$$

   Die Linearisierung von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$ ist daher gegeben durch

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 3 + \frac{2}{3}(x-2) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}x.$$

   (b) Es gilt

$$f(x) = \sqrt{x^2+5} \geq f(0) = \sqrt{5},$$

   weil $x^2 \geq 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter gilt

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5} = +\infty.$$

   Da die Funktion $f(x)$ stetig ist, ist der Wertebereich gegeben durch $[\sqrt{5}, +\infty[$.

   (c) Die Ableitung $F'(x) = f(x)$ ist stets grösser als 0. Daher ist $F(x)$ streng monoton wachsend. Somit ist $F(1) > F(0) = 33$.

---

2. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y'' = 6y' - 10y$

(b) $3y' = (y-1)(y+2)$

Lösung:

(a) Dies ist eine lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung ist

$$r^2 = 6r - 10.$$

Mit Hilfe der Mitternachtsformel erhalten wir die Lösungen $r_1 = 3+i$ und $r_2 = 3-i$. Die allgemeine Lösung ist somit gegeben durch

$$y(x) = e^{3x}(k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x))$$

mit Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Diese Differentialgleichung ist separierbar. Es gilt für $y \neq 1$ und $y \neq -2$

$$\begin{aligned} 3\frac{dy}{dx} = (y-1)(y+2) &\iff \frac{3}{(y-1)(y+2)}\frac{dy}{dx} = 1 \\ &\iff \int \frac{3}{(y-1)(y+2)}\,dy = \int dx. \end{aligned}$$

Um das Integral auf der linken Seite zu berechnen, machen wir eine Partialbruchzerlegung. Es gilt

$$\frac{3}{(y-1)(y+2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+2} = \frac{A(y+2) + B(y-1)}{(y-1)(y+2)}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich erhalten wir die folgenden beiden Gleichungen, mit denen wir A und B bestimmen können:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - B = 3 \end{cases}$$

Folglich gilt $A = 1$ und $B = -1$ und $\frac{3}{(y-1)(y+2)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+2}$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{(y-1)(y+2)}\,dy = \int dx &\iff \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+2}\,dy = \int dx \\ &\iff \ln|y-1| - \ln|y+2| = x + C \iff \ln\left|\frac{y-1}{y+2}\right| = x + C \\ &\iff \frac{y-1}{y+2} = De^x \iff y(1 - De^x) = 2De^x + 1 \\ &\iff y = \frac{2De^x + 1}{1 - De^x} \end{aligned}$$

mit Konstanten $C \in \mathbb{R}$ und $D \neq 0$. Zudem haben wir die konstanten Lösungen $y \equiv 1$ und $y \equiv -2$.

---

3. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist das System

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lösbar?

(b) Bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge des Systems $A\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Raums aller Vektoren $\vec{v}$, für die das System $A\vec{x} = \vec{v}$ lösbar ist.

Lösung:

(a) Mit dem Gaussalgorithmus erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II-2I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\frac{1}{2}\text{II}}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}\text{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses System ist lösbar.

(b) Mit dem Gaussalgorithmus erhalten wir wie in a)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Anzahl der freien Variablen (d.h. 5-Anzahl führende Einsen) ist gleich der Dimension des Kerns. In unserem Fall ist $\dim(\ker) = 3$.

Wir müssen also drei linear unabhängige Basisvektoren finden. Da die Stufenform-Matrix dem System

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

entspricht, nehmen wir $x_2 = s$, $x_4 = t$ und $x_5 = r$ als freie Parameter und schreiben somit die allgemeine Lösung als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s + 2t + 4r \\ s \\ -2t - 3r \\ t \\ r \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s, t, r \in \mathbb{R}.$$

Beispielsweise können wir

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Basis des Kerns wählen.

(c) Der Spaltenraum von A ist die Menge aller $\vec{v}$, für die $A\vec{x} = \vec{v}$ lösbar ist.
Lösungsweg 1: Um eine Basis vom Spaltenraum zu bestimmen, bringen wir A zuerst auf eine Stufenform-Matrix F wie in den vorherigen Aufgaben.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F.$$

Diejenigen Spaltenvektoren von A, die den Spalten von F mit führenden Einsen entsprechen, bilden eine Basis vom Spaltenraum von A. In diesem Fall sind es der erste und der dritte Spaltenvektor von A, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsweg 2: Die Dimension des Spaltenraums ist gleich der Anzahl der führenden Einsen in einer Stufenform der Matrix A. In unserem

Fall also gleich 2. Wir suchen also zwei linear unabhängige Spaltenvektoren. Das sind zum Beispiel die Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

4. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y + 5$$

und seinen Gradienten $\vec{F} = \mathrm{grad}(f)$.

(a) Bestimmen Sie das Vektorfeld $\vec{F}$.

(b) Bestimmen Sie und klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f (als lokales Minimum, lokales Maximum oder Sattelpunkt).

(c) Die Gleichung

$$f(x, y) = 4$$

definiert eine differenzierbare Funktion $x = x(y)$ in der Nähe vom Punkt $(x, y) = (1, 0)$. Was ist die Ableitung $x'(0)$?

(d) Bestimmen Sie das Kurvenintegral von $\vec{F}$ längs der geradlinigen Strecke C vom Punkt $(1, 0)$ zum Punkt $(1, 1)$.

Lösung:

(a) Wir haben

$$\vec{F} = \mathrm{grad}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 2 \\ 2y - x + 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Die kritischen Punkte von f sind genau diejenigen, bei denen $\mathrm{grad}(f) = 0$ ist:

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ 2y - x + 2 = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (-2, -2).$$

Die Hesse-Matrix von f am Punkt $(-2, -2)$ ist gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(H)$ am Punkt $(-2, -2)$ gleich $3 > 0$ ist und $f_{xx}(-2, -2) = 2 > 0$ ist, hat f ein lokales Minimum bei $(-2, -2)$.

(c) Wir verwenden den Satz über die implizite Funktion. Gemäss diesem haben wir

$$x'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)} = -\frac{1}{4}.$$

(d) Da $\vec{F} = \mathrm{grad}(f)$ ein Gradientenfeld ist, können wir dieses Kurvenintegral mit dem Hauptsatz für Kurvenintegrale bestimmen. Wir haben also:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1,1) - f(1,0) = 10 - 8 = 2.$$

---

5. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

und die Fläche A gegeben durch

$$z = x^2 + y^2, \ 0 \leq z \leq 1.$$

(a) Parametrisieren Sie A.

(b) Parametrisieren Sie die Randkurve von A (in irgendeiner Richtung).

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{rot}(\vec{F})$.

(d) Bestimmen Sie den Wirbelfluss von $\vec{F}$ durch A nach unten (d.h., die z-Komponente des Normalenvektors ist negativ),

$$\iint_A \left(\mathrm{rot}(\vec{F})\right) \cdot \vec{n} \ dA.$$

Lösung:

(a) In kartesischen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \text{ mit } x^2 + y^2 \leq 1.$$

In Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ r^2 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq r \leq 1.$$

In Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix} \text{ mit } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \rho = \frac{\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}.$$

Dabei haben wir ρ wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} z = x^2 + y^2 &\iff \rho\cos(\varphi) = \rho^2\sin^2(\varphi)\underbrace{\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)}_{=1} \\ &\iff \cos(\varphi) = \rho\sin^2(\varphi) \iff \rho = \frac{\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\varphi)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \frac{\cos^2(\varphi)}{\sin(\varphi)} \end{pmatrix} \text{ mit } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(b) Wir wählen den Winkel θ (aus den Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten) als Parameter:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(c) Wir rechnen:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} (F_3)_y - (F_2)_z \\ (F_1)_z - (F_3)_x \\ (F_2)_x - (F_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}$$

(d) Lösungsweg 1: Direkt in Zylinderkoordinaten.

Sei $p(r,\theta) := \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ r^2 \end{pmatrix}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} p_r \times p_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\theta) \\ -2r^2\sin(\theta) \\ r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\theta) \\ -2r^2\sin(\theta) \\ r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun können wir den Wirbelfluss berechnen. Das Minuszeichen erhalten wir, weil die z-Komponente von $\vec{n}$ negativ ist.

$$\begin{aligned}
\iint_A \left(\operatorname{rot}(\vec{F})\right) \cdot \vec{n}\, dA &= - \iint_A \left(\operatorname{rot}(\vec{F})\right) \cdot (p_r \times p_\theta)\, dA \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\theta) \\ -2r^2\sin(\theta) \\ r \end{pmatrix} dr\, d\theta \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^3\, dr\, d\theta = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4} r^4\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = -\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Lösungsweg 2: Mit Stokes in Zylinderkoordinaten/Kugelkoordinaten. Mit dem Satz von Stokes erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\iint_A (\operatorname{rot}(\vec{F})) \cdot \vec{n}\, dA &= \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
&= - \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin^3(\theta) \\ \cos^3(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \\
&= - \int_0^{2\pi} \sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)\, d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(\cos(4\theta) + 3)\, d\theta \\
&= -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}\sin(4\theta) + 3\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) = -\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\sin^4(x) + \cos^4(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4x)$ ist. Diese Formel können wir wie folgt herleiten: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \text{und} \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1).$$

Wenden wir diese Gleichungen zwei Mal an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sin^4(x) + \cos^4(x) &= \frac{1}{4}(1 - \cos(2x))^2 + \frac{1}{4}(\cos(2x) + 1)^2 \\
&= \frac{1}{2}(1 + \cos^2(2x)) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(\cos(4x) + 1)\right) \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4x).
\end{aligned}$$

6. Wir betrachten Probleme der Form

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0 \\ u(x,1) = f(x) \end{cases}$$

für eine unbekannte Funktion $u(x, y)$ und $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

(a) Mit dem Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ zerfällt diese PDE in ein System von ODEs für $X(x)$ und $Y(y)$ in Abhängigkeit von einem Parameter $k \in \mathbb{R}$. In welches System?
Sie müssen dieses System **nicht** lösen.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $u(x, y)$ des Problems mit

$$f(x) = 5\sin(2\pi x).$$

Sie dürfen hier Basislösungen **ohne** erneute Herleitung benutzen.

Lösung:

(a) Setzen wir $u(x, y)) = X(x)Y(y)$ in die Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ein, erhalten wir für $X(x) \neq 0$ und $Y(y) \neq 0$

$$u_{xx}+u_{yy} = X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y) = 0 \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Die linke Seite ist unabhängig von y und die rechte Seite ist unabhängig von x. Also müssen $\frac{X''(x)}{X(x)}$ und $-\frac{Y''(y)}{Y(y)}$ beide konstant gleich einem $k \in \mathbb{R}$ sein. Wir erhalten also

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k \iff X''(x) - kX(x) = 0$$

und

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k \iff Y''(y) + kY(y) = 0.$$

(b) Die Basislösungen dieses Problems sind gegeben durch

$$u_n(x, y) = \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y),\ n = 1, 2, \ldots.$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist die Reihe

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$$

auch eine Lösung des Problems und wir wählen die Koeffizienten so, dass sie die Randbedingung $u(x,1) = f(x) = 5\sin(2\pi x)$ erfüllt. Mit einem Koeffizientenvergleich erhalten wir $C_2 \sinh(2\pi) = 5$, also $C_2 = \frac{10}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}$ und $C_n = 0$ für alle $n \neq 2$. Also ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,y) = \frac{10}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} \sin(2\pi x) \sinh(2\pi y).$$

Bei den MC-Aufgaben gab es in der Prüfung 3 verschiedene Versionen. Die Version finden Sie auf der zweiten Seite Ihrer Prüfung oben rechts. Beispielsweise bedeutet Winter 2020 B, dass Sie die Version B der Prüfung hatten. Die richtigen Lösungen sind:

Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Version A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Version B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Version C	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

7. Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

√ (a) $-2.$ (b) $-1.$ (c) $1.$ (d) $2.$

Lösung: Wir machen zwei Mal eine Laplace-Entwicklung nach der 3. Spalte und erhalten:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= -(1 \cdot 6 - 2 \cdot 2) = -2.$$

---

8. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Was ist der entsprechende Eigenwert?

(a) -2 (b) -1 (c) 1 √ (d) 2

Lösung: Wir haben

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

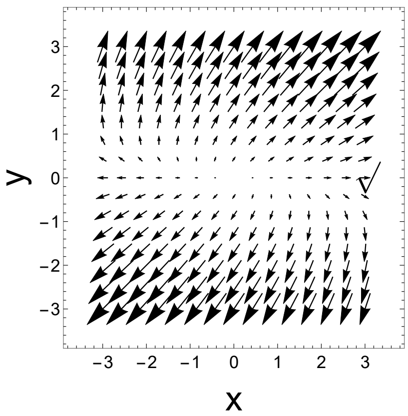
Somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

---

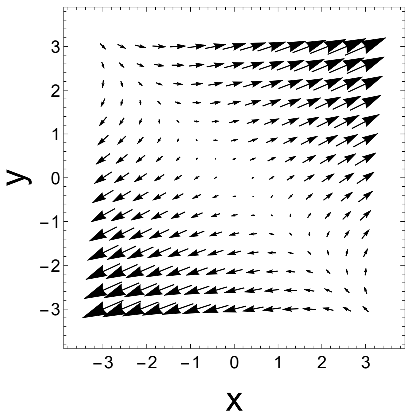
9. Welches ist das Phasenportrait des Systems

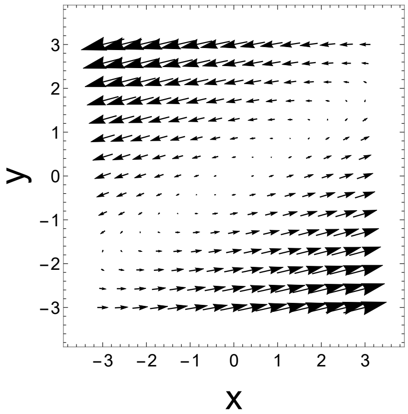
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \quad ?$$

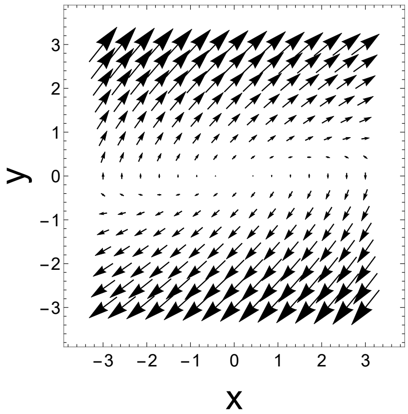
(a)



√ (b)



(c) 

(d) 

Lösung: Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-5).\end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind die Eigenwerte von A. Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$. Bestimmen wir die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

und

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Phasenportrait des Systems kann daher nur b) sein.

---

10. Was ist der Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{x}} \quad ?$$

(a) 0 $\checkmark$ (b) 1 (c) 2 (d) $+\infty$

Lösung: Es gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{2}{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{x}\ln(x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)}{x}}$$
$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}} = e^0 = 1.$$

Dabei haben wir im drittletzten Schritt Bernoulli-de l'Hôpital verwendet.

---

11. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \ln(t^2 + e^3)\,dt.$$

Was ist der Wert der Ableitung $f'(0)$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 $\checkmark$ (d) 3

Lösung: Gemäss dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechung gilt

$$f'(x) = \ln(x^2 + e^3).$$

Also haben wir insbesondere $f'(0) = \ln(e^3) = 3$.

---

12. Sei $g(y)$ die Umkehrfunktion der Funktion

$$y = f(x) = e^{(3-x)^3-1}.$$

Wir betrachten $g(y)$ an der Stelle $y = f(2) = 1$. Was ist der Wert der Ableitung $g'(1)$?

(a) -3 $\checkmark$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) 3

Lösung: Wir haben

$$f'(x) = -3(3-x)^2 e^{(3-x)^3-1}.$$

Mit der Umkehrformel erhalten wir dann

$$g'(1) = \frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{3}.$$

---

13. Die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda) = \lambda^4 + 1$ sind:

(a) $-1, 1, -i, i$

(b) $-1, 1, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

√ (c) $e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}$

(d) $e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, -i, i$

Lösung: Es gilt

$$\lambda^4 = -1 = e^{i\pi} \iff \lambda = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

---

14. Sei $f(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen (I) und (II) sind im Allgemeinen wahr?

(I) Ist f nicht injektiv, so existiert eine Stelle c mit $f'(c) = 0$.

(II) Falls eine Stelle c mit $f'(c) = 0$ existiert, so ist f nicht injektiv.

(a) Beide Aussagen (I) und (II) sind wahr.

√ (b) Aussage (I) ist wahr, aber Aussage (II) ist falsch.

(c) Aussage (II) ist wahr, aber Aussage (I) ist falsch.

(d) Beide Aussagen (I) und (II) sind falsch.

Lösung: Da f nicht injektiv ist, gibt es zwei verschiedene Punkte $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(b)$. Gemäss dem Satz von Rolle folgt dann, dass die Aussage (I) wahr ist. Die Aussage (II) ist falsch. Beispielsweise ist die Funktion $f(x) = x^3$ injektiv, aber es gilt $f'(0) = 0$.

---

15. Die Bahn eines bewegten Massenpunkts erfülle das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 4t \\ 1 - \sin(t) \end{pmatrix} \\ \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Welchen Ortsvektor besitzt der Masssenpunkt zur Zeit $t = 1$?

(a) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \cos(1) \end{pmatrix}$

(b) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \cos(1) \end{pmatrix}$

(c) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - \cos(1) \end{pmatrix}$

$\checkmark$ (d) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 + \cos(1) \end{pmatrix}$

Lösung: Wir integrieren die rechte Seite der Gleichung nach t und erhalten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 + c_1 \\ t + \cos(t) + c_2 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Setzen wir die Anfangsbedingung ein, erhalten wir

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 1 + c_2 \end{pmatrix}.$$

Also sind $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 + 1 \\ t + \cos(t) \end{pmatrix}$$

und zur Zeit $t = 1$ haben wir

$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 + \cos(1) \end{pmatrix}.$$

---

16. Was ist die Bogenlänge der Kurve parametrisiert durch

$$x = -e^t \sin(t), \qquad y = e^t \cos(t),\ 0 \le t \le 1 \quad ?$$

(a) $e - 2$.

(b) $2\sqrt{2}e$.

(c) $e - \sqrt{2}$.

√ (d) $\sqrt{2}e - \sqrt{2}$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{r}}(t)| &= \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} = \sqrt{(-e^t(\sin(t)+\cos(t)))^2 + (e^t(\cos(t)-\sin(t)))^2} \\ &= \sqrt{2e^{2t}(\sin^2(t)+\cos^2(t))} = e^t\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ ist. Also erhalten wir die Bogenlänge

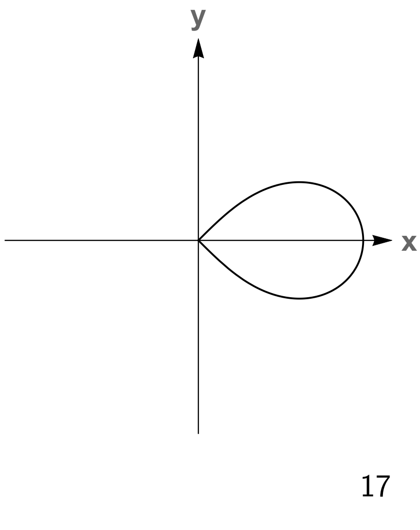
$$L = \int_0^1 |\dot{\vec{r}}(t)|\, dt = \sqrt{2}\int_0^1 e^t\, dt = \sqrt{2}e^t\Big|_{t=0}^{t=1} = \sqrt{2}e - \sqrt{2}.$$

---

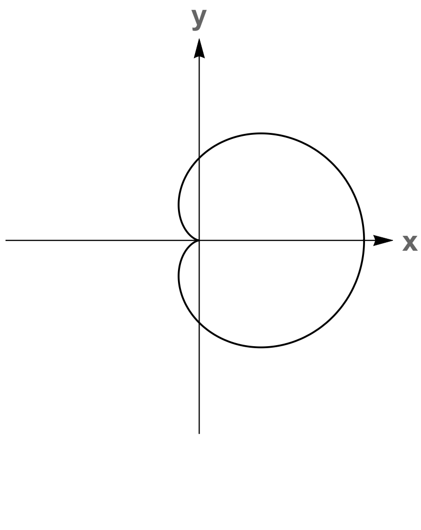
17. Welches ist das Bild der Kurve mit der folgenden Gleichung in Polarkoordinaten

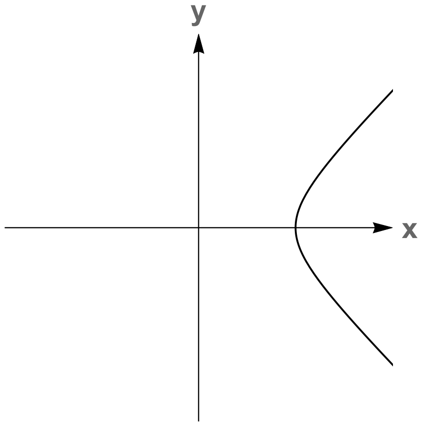
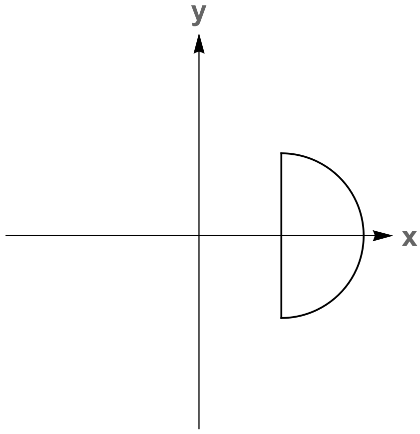
$$r^2 = 4\cos(2\theta), \qquad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4} \quad ?$$

√ (a)



(b)



(c)  (d) 

Lösung: Die Kurve läuft durch den Usprung und läuft im Sektor

$$\frac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

---

18. Was ist der Definitionsbereich D und der Wertebereich W der Funktion

$$f(x, y) = \tan\left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right) \quad ?$$

√ (a) $D = \mathbb{R}^2,\ W =]0, \tan(1)].$

(b) $D = \mathbb{R}^2,\ W = [\tan(1), +\infty[.$

(c) $D = \{(x, y) \mid \tan(1 + x^2 + y^2) \neq 1\},\ W =]0, \tan(1)].$

(d) $D = \{(x, y) \mid \tan(1 + x^2 + y^2) \neq 1\},\ W = [\tan(1), +\infty[.$

Lösung: Da der Nenner $1 + x^2 + y^2$ grösser als Null ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ist $D = \mathbb{R}^2$. Weiter nimmt $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ alle Werte im Intervall $]0, 1]$, also ist der Wertebereich von $f(x, y)$ gegeben durch $]0, \tan(1)]$.

---

19. Die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y) = xy$ an der Stelle $(1, 3)$ in Richtung des Vektors $(2, 1)$ ist gleich

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

(c) $\sqrt{5}$.

$\surd$ (d) $\frac{7}{\sqrt{5}}$.

Lösung: Die Länge von $(2,1)$ ist $\sqrt{5}$, also ist die Richtung von $(2,1)$ gegeben durch $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$. Die Richtungsableitung ist gegeben durch

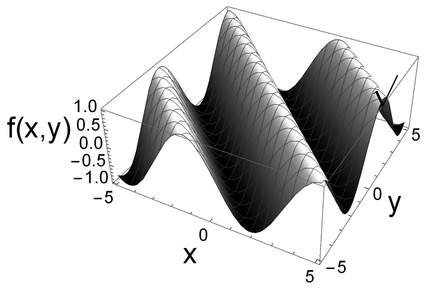
$$(D_{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)}f) = \nabla f(1,3) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

---

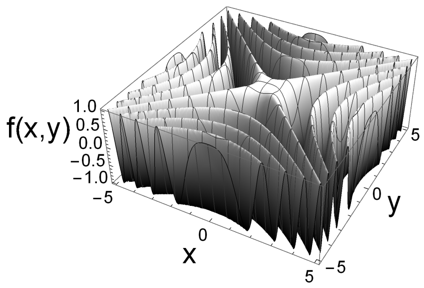
20. Welcher Graph passt zur Funktion

$$f(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \quad ?$$

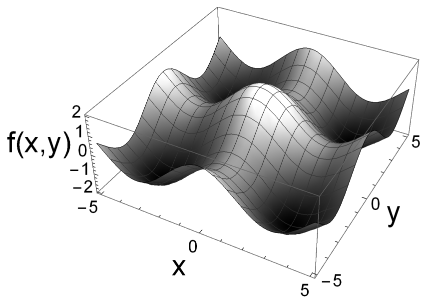
(a)



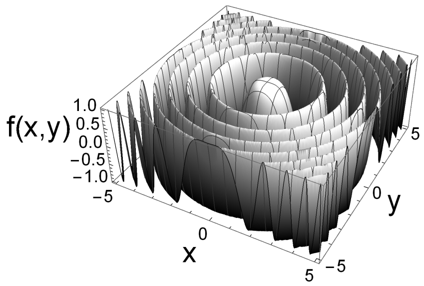
(c)



(b)



(d)



Lösung: Das einzige Bild, in dem die Funktion konstant ist auf den Hyperbeln $x^2 - y^2 = c$ ist c). Alternativ: Ist $x = y$, so gilt

$$f(x, y) = f(y, y) = \cos(0) = 1.$$

Ist $x = -y$, so gilt ebenfalls

$$f(x, y) = f(-y, y) = \cos(0) = 1.$$

Dies wird nur in c) erfüllt.

---

21. Sei $f(x, y)$ eine stetige reelle Funktion, die auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Welches Integral ist im Allgemeinen gleich

$$\int_{-1}^{0} \int_{4+4x^3}^{4} f(x, y)\, dy\, dx \quad ?$$

√ (a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{-1}^{\sqrt[3]{\frac{y}{4}-1}} f(x,y)\,dx\,dy$

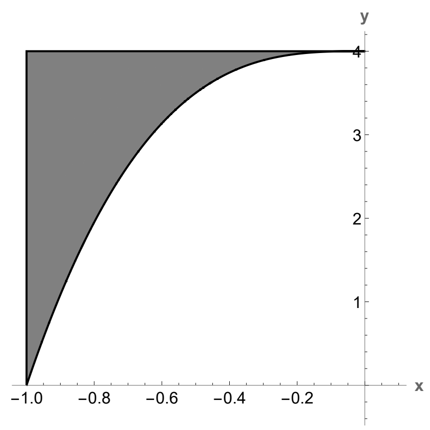
(b) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt[3]{\frac{y}{4}-1}}^{-1} f(x,y)\,dx\,dy$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt[3]{\frac{y}{4}-1}}^{0} f(x,y)\,dx\,dy$

(d) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt[3]{\frac{y}{4}-1}} f(x,y)\,dx\,dy$

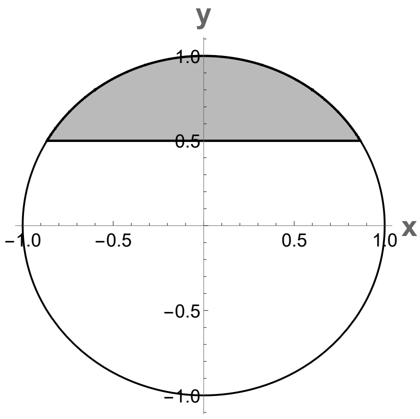
Lösung: Es gilt $y = 4 + 4x^3 \iff x = \sqrt[3]{\frac{y}{4} - 1}$. Also erhalten wir

$$\int_{-1}^{0} \int_{4+4x^3}^{4} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^4 \int_{-1}^{\sqrt[3]{\frac{y}{4}-1}} f(x,y)\,dx\,dy.$$



---

22. Wir betrachten den Kreisscheibenteil,



welcher durch $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq \frac{1}{2}$ gegeben ist. Welche der folgenden Ungleichungen beschreibt dieses Gebiet in Polarkoordinaten?

(a) $\dfrac{1}{2\sin(\theta)} \leq r \leq 1, \ \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}.$

√ (b) $\dfrac{1}{2\sin(\theta)} \leq r \leq 1, \ \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{6}.$

(c) $\dfrac{\sin(\theta)}{2} \leq r \leq 1, \ \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}.$

(d) $\dfrac{\sin(\theta)}{2} \leq r \leq 1, \ \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{6}.$

Lösung: Die Polarkoordinaten sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Es gilt für $\sin(\theta) \neq 0$

$$y = \frac{1}{2} \iff r\sin(\theta) = \frac{1}{2} \iff r = \frac{1}{2\sin(\theta)}.$$

Nun wollen wir die beiden Punkte finden, in denen sich der Kreis $x^2+y^2 = 1$ und die horizontale Linie $y = \frac{1}{2}$ schneiden. Es gilt

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1 \iff x^2 = \frac{3}{4} \iff x \in \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Die beiden Schnittpunkte sind also $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ and $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Die dazugehörigen Winkel sind $\frac{\pi}{6}$ weil

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

und $\frac{5\pi}{6}$ weil

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

Da

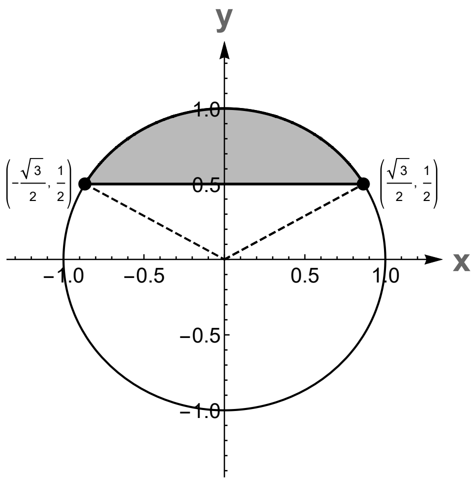
$$y \geq \frac{1}{2} \Rightarrow r \geq \frac{1}{2\sin(\theta)}$$

und

$$x^2 + y^2 \leq 1 \iff r^2 \leq 1 \iff r \leq 1$$

erhalten wir die Ungleichungen

$$\frac{1}{2\sin(\theta)} \leq r \leq 1, \ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}.$$



23. Wir betrachten das Integral

$$I = \iiint\limits_V x \, dV$$

über dem Kugeloktanten vom Radius R

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x, y, z \leq 0\right\}.$$

Welche der folgenden Formeln ist korrekt?

(a) $I = \displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \rho^2 \sin(\varphi) \cos(\theta) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

(b) $I = \displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \rho^2 \sin(\varphi) \cos(\theta) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

√ (c) $I = \displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^R \rho^3 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

(d) $I = \displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^R \rho^3 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

Lösung: In Kugelkoordinaten ist $x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta)$ und das Volumenelement ist $dV = \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$. Für $x, y \leq 0$ gilt

$$\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

und für $z \leq 0$ gilt

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi.$$

Also erhalten wir

$$I = \iiint\limits_V x \, dV = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^R \rho^3 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta.$$

---

24. Das Volumen des beschränkten Körpers definiert durch

$$1 \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

ist

√ (a) $\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi.$

(b) $\dfrac{5\sqrt{2}-4}{3}\pi.$

(c) $(4\sqrt{2}-5)\pi.$

(d) $(5\sqrt{2}-4)\pi.$

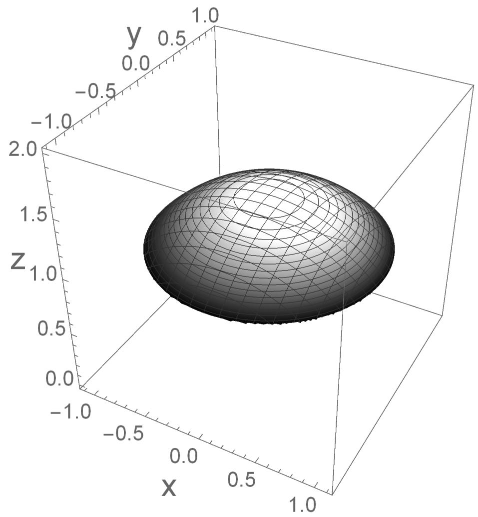
Lösung: Da $1 \le \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, haben wir $x^2 + y^2 \le 1$. Wir benutzen Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } 1 \le z \le \sqrt{2 - r^2},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1.$$

Wir erhalten damit

$$\text{Vol} = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{\sqrt{2-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{2 - r^2} - r\, dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}r^2 \right]_{r=0}^{r=1} = 2\pi \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi$$



25. Sei $\vec{F}$ ein mindestens zweimal differenzierbares Vektorfeld im Raum. Welche der folgenden Formeln macht keinen Sinn?

(a) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{F}))$.

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F}))$.

$\checkmark$ (c) $\operatorname{grad}(\operatorname{grad}(\vec{F}))$.

(d) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{F}))$.

Lösung: Den Gradienten können wir nur von einer skalarwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ berechnen. Allerdings ist hier $\vec{F}$ ein Vektorfeld. Somit macht die Formel $\operatorname{grad}(\operatorname{grad}(\vec{F}))$ keinen Sinn. Die anderen Formeln sind zulässig, denn die Divergenz berechnen wir von einem Vektorfeld und erhalten eine skalarwertige Funktion und die Rotation berechnen wir von einem Vektorfeld und erhalten wiederum ein Vektorfeld.

26. Was ist die Zirkulation des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xy^2 - y \\ x^4 + x^2y + x \end{pmatrix}$$

entlang der Randkurve des Rechtecks

$$-1 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1$$

im Gegenuhrzeigersinn?

(a) $-8.$ (b) $-4.$ ✓ (c) $4.$ (d) $8.$

Lösung: Sei A das gegebene Rechteck. Mit dem Satz von Green erhalten wir

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_0^1 \int_{-1}^1 4x^3 + 2xy + 1 - 2xy + 1\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 \int_{-1}^1 4x^3 + 2\,dx\,dy = x^4 + 2x \Big|_{x=-1}^{x=1} = 4.$$

Musterlösungen zu den MC-Aufgaben der Prüfung Mathematik I

7. Wir betrachten das diskrete System

$$\begin{cases} a(N+1) = 3a(N) + 4b(N) \\ b(N+1) = 2a(N) + b(N) \end{cases} \qquad \text{mit } N = 0, 1, 2, \ldots$$

Für welchen Anfangswert bleibt die Lösung $\vec{x}(N) = \begin{pmatrix} a(N) \\ b(N) \end{pmatrix}$ des entsprechenden Anfangswertprobelms beschränkt?

✓ (a) $\begin{cases} a(0) = -1 \\ b(0) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} a(0) = 2 \\ b(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} a(0) = 2 \\ b(0) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} a(0) = 0 \\ b(0) = -1 \end{cases}$

Lösung 1: Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix des Systems, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$
$$\iff \lambda = -1 \text{ oder } \lambda = 5.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist daher von der Form

$$\begin{pmatrix} a(N) \\ b(N) \end{pmatrix} = c_1(-1)^N \vec{v_1} + c_2 5^N \vec{v_2},$$

wobei $\vec{v_1}$, bzw. $\vec{v_2}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$, bzw. $\lambda_2 = 5$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sind so, dass

$$(a(0), b(0)) = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2}.$$

Da 5^N mit $N \to +\infty$ unbeschränkt wächst, während $(-1)^N$ beschränkt bleibt, sind nur Lösungen mit $c_2 = 0$ beschränkt, also nur Lösungen mit Anfangswert im Eigenraum zu $\lambda_1 = -1$, welche wir bestimmen:

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist a) korrekt.

Lösung 2: Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Da

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist, sehen wir, dass $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -1 ist. Das heisst, für $a(0) = -1$, $b(0) = 1$ ist

$$\begin{pmatrix} a(N+1) \\ b(N+1) \end{pmatrix} = A^{N+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^{N+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $\vec{x}$ bleibt also beschränkt für den Anfangswert $a(0) = -1$, $b(0) = 1$.

---

8. Der Ausdruck $\frac{3+i}{2-i}$ lässt sich umformen zu:

(a) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

(b) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\surd$ (c) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(d) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Lösung: Wir rechnen:

$$\frac{3+i}{2-i} = \frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6+5i+i^2}{4-i^2} = \frac{5+5i}{5} = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$