Musterlösungen Basisprüfung Winter 2020

1. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 - \tan(x)}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$.

   (b) Bestimmen Sie die Linearisierung von $f(x)$ in $x_0 = 0$.

   (c) Was ist der Wertebereich von $\tan(x)$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$?

   (d) Was ist der Wertebereich von $f(x)$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$?

Lösung:

   (a) Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{(1 - \tan(x))^2} = \frac{1}{\cos^2(x)(1 - \tan(x))^2}.$$

   (b) Die Linearisierung von f bei x_0 ist gegeben durch

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

   Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)(1 - \tan(x))^2} \Rightarrow f'(0) = 1.$$

   Also ist

$$L(x) = 1 + x.$$

   (c) Der Tangens ist streng monoton wachsend und stetig auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$. Es gilt $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ und $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Somit ist der Wertebereich $]-\infty, 1[$.

   (d) Die Funktion $f(x)$ ist stetig und streng monoton wachsend auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$. Es gelten

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0$$

   und

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = +\infty.$$

   Darum ist der Wertebereich von $f(x)$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$ gegeben durch $]0, +\infty[$.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

   (a) $y'' = 4y' - 4y$.

   (b) $3xy' - y = x + 1 \quad$ für $x > 0$.

   Lösung:

   (a) Die charakteristische Gleichung der DGL ist

   $$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

   Die Lösungen sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

   $$y(x) = (k_1 + k_2 x)e^{2x}.$$

   (b) Dividieren wir die DGL auf beiden Seiten durch $3x$. erhalten wir

   $$y' - \frac{y}{3x} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

   Wir lösen diese Gleichung mit Hilfe der Methode des integrierenden Faktors. Es gilt

   $$y(x) = \left[\int q(x)e^{P(x)}\,dx\right] e^{-P(x)},$$

   wobei $p(x) = \frac{-1}{3x}$, $q(x) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ und $P(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $p(x)$ ist. Wir wählen $P(x) = -\frac{1}{3}\ln(x)$. Es gilt

   $$\int q(x)e^{P(x)}\,dx = \int \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3x}\right) x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \int \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}\,dx$$
   $$= \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + C$$

   mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Zusammengefasst erhalten wir also

   $$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + C\right) x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x - 1 + Cx^{\frac{1}{3}}.$$

3. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge des Systems $A\vec{x} = \vec{0}$?

(c) Sei $\vec{b}$ die Summe aller vier Spalten von A. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$.

Lösung:

(a) Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II-2I}]{\text{III-3I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III-3II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der führenden Einsen ist 2, also ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$.

(b) Sei n die Anzahl der Spalten von A. Die Dimension des Kerns ist gleich n Minus der Anzahl führender Einsen in der Stufenform von A. In unserem Fall ist $\dim(\ker(A)) = 2$. Wir suchen also zwei linear unabhängige Vektoren im Kern von A. Beispielsweise sind das

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Die allgemeine Lösung des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ setzt sich aus den Lösungen des homogenen Problems (Teilaufgabe b)) $\vec{x}_H$ und einer partikulären Lösung $\vec{x}_P$ zusammen. Da $\vec{b}$ die Summe aller Spaltenvektoren ist, ist

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine mögliche partikuläre Lösung. Wir erhalten also als allgemeine Lösung

$$\vec{x} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

---

4. Wir betrachten das System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix, A, dieses Systems.

   (b) Bestimmen Sie die Lösung des Systems mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (c) Für welche Werte von k bleibt jede Lösung vom System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt?

Lösung:

   (a) Beginnen wir mit den Eigenwerten. Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0.$$

   Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$. Kommen wir zu den Eigenvektoren.

   Zu $\lambda_1 = 2i$:

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

   Wir wählen als Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 2i$ und $v_2 = \overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = -2i$.

(b) Die allgemeine Lösung des DGLs ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t)\vec{u} - \sin(\beta t)\vec{s}\right) + k_2 e^{\alpha t} \left(\sin(\beta t)\vec{u} + \cos(\beta t)\vec{s}\right),$$

wobei in unserem Fall $\alpha = 0, \beta = 2, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind.
Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \; & k_1 \left(\cos(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\ & + k_2 \left(\sin(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Setzen wir die Anfangswerte ein, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2k_2 \end{pmatrix}.$$

Also $k_1 = 1$ und $k_2 = -1$. Also ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \cos(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen wir die Eigenwerte von A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ k & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + k = 0.$$

Die Eigenwerte sind also

$$\begin{cases} \pm i\sqrt{k} & \text{für } k > 0; \\ 0 & \text{für } k = 0; \\ \pm\sqrt{-k} & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

Im Fall $k > 0$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 & \left(\cos(t\sqrt{k}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(t\sqrt{k}) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{k} \end{pmatrix} \right) \\ & + C_2 \left(\sin(t\sqrt{k}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(t\sqrt{k}) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{k} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese Lösungen sind für alle $k > 0$ beschränkt.

Im Fall $k = 0$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -C_2 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese Lösung ist nicht beschränkt.

Im Fall $k < 0$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-\sqrt{-k}t} \begin{pmatrix} \sqrt{-k} \\ -k \end{pmatrix} + C_2 e^{\sqrt{-k}t} \begin{pmatrix} \sqrt{-k} \\ k \end{pmatrix}.$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese Lösung ist nicht beschränkt.

Dass es in den Fällen $k = 0$ und $k < 0$ unbeschränkte Lösungen gibt, können wir ebenfalls mit den entsprechenden Phasenportraits sehen.

---

5. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 - y^2) \ .$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f in Abhängigkeit von (x, y).

(b) In welche Richtung wächst f am schnellsten im Punkt $(x, y) = (1, 1)$?

(c) Geben Sie eine Gleichung der Tangentialebene an den Funktionsgraphen im Punkt $(x, y, f(x, y)) = (1, 1, 0)$.

(d) Klassifizieren Sie den kritischen Punkt $(0, 0)$ als lokales Maximum, lokales Minimum oder Sattelpunkt.

Lösung:

(a) Der Gradient ist gegeben durch

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2-y^2} \\ \frac{-2y}{1+x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

(b) Am schnellsten wächst die Funktion in Richtung des Gradienten. Der Gradient im Punkt $(1, 1)$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, daher erhalten wir die Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ist gegeben durch

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0, y - y_0) = 2(x-1) - 2(y-1) = 2x - 2y.$$

(d) Die Hessematrix im Punkt $(0, 0)$ ist gegeben durch

$$\text{Hess} = \begin{pmatrix} \frac{-2(x^2+y^2-1)}{(x^2-y^2+1)^2} & \frac{4xy}{(x^2-y^2+1)^2} \\ \frac{4xy}{(x^2-y^2+1)^2} & \frac{-2(x^2+y^2+1)}{(x^2-y^2+1)^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(\text{Hess}) = -4 < 0$ ist, ist der Ursprung ein Sattelpunkt.

---

6. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 \\ 2xyz \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\overrightarrow{F}$ konservativ?

(b) Bestimmen Sie die Arbeit von $\overrightarrow{F}$ entlang der geradlinigen Strecke, vom Punkt $(1, 1, 1)$ zum Punkt (x, y, z). Drücken Sie Ihre Antwort als Funktion von (x, y, z) aus.

(c) Für welche Punkte auf der Koordinatenebene $z = 0$ ist die Divergenz von $\overrightarrow{F}$ positiv? Skizzieren Sie diese Punktmenge.

Lösung:

(a) Ja, $\vec{F}$ ist konservativ, denn $\phi(x, y, z) = xyz^2$ ist eine Potentialfunktion.

(b) Das Vektorfeld $\vec{F}$ ist konservativ. Das heisst, die Arbeit entlang der Strecke C hängt nur von den Endpunkten ab. Genauer gesagt gilt

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(x, y, z) - \phi(1, 1, 1) = xyz^2 - 1.$$

(c) Es gilt

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 + 0 + 2xy = 2xy.$$

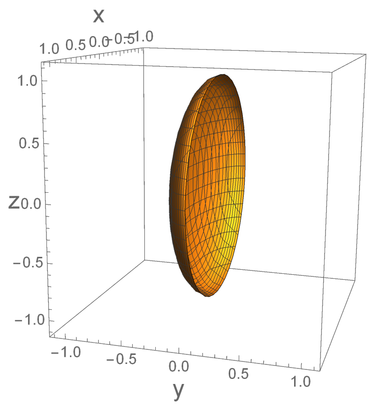
Die Divergenz ist positiv, wenn $x > 0$ und $y > 0$ oder wenn $x < 0$ und $y < 0$.

7. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\overrightarrow{G}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\sin(y) \\ ye^x \\ x+z \end{pmatrix} .$$

und das Halbellipsoid A gegeben durch

$$x^2 + 9y^2 + z^2 = 1 \text{ und } y \leq 0 \ .$$



(a) Parametrisieren Sie A.

(b) Parametrisieren Sie die Randkurve von A (in irgendeiner Richtung).

(c) Bestimmen Sie den Wirbelfluss durch A nach rechts (d.h., die y-Komponente des Normalenvektors ist positiv),

$$\iint_A \left(\text{rot}\,\overrightarrow{G}\right) \cdot \vec{n}\, dA \ .$$

Lösung:

(a) In kartesischen Koordinaten: $9y^2 = 1-x^2-z^2 \iff y = \pm\sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{9}}$. Da $y < 0$ müssen wir die negative Lösung benutzen. Ausserdem muss $x^2 + z^2 \leq 1$ sein. Zusammengefasst:

$$x = -\sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{9}} \text{ mit } x^2 + z^2 \leq 1.$$

In Zylinderkoordinaten: Wir benutzen folgende Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= y \\ z &= r\sin(\theta) \end{aligned}$$

Es gilt $x^2 + 9y^2 + z^2 = 1 \iff 9y^2 + r^2 = 1 \iff y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{1-r^2}$.
Also da $y \leq 0$, erhalten wir die Parametrisierung

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= -\frac{1}{3}\sqrt{1-r^2} \text{ mit } r \in [0,1] \text{ und } \theta \in [0,2\pi] \\ z &= r\sin(\theta). \end{aligned}$$

Alternativ in angepassten Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y &= \frac{1}{3}\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

mit $\varphi \in [0,\pi]$ und $\theta \in [\pi, 2\pi]$.

(b) Setzen wir $y = 0$ in die Gleichung ein, erhalten wir

$$1 = x^2 + 9y^2 + z^2 = x^2 + z^2.$$

Dies können wir durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren.

(c) Sei C die Randkurve von A. Die Randkurve müssen wir, anders als in Teilaufgabe b), im Uhrzeigersinn parametrisieren. Nach dem Satz von Stokes gilt also

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot}(\vec{G}) \cdot \vec{n}\, dA = \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} &= -\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \cos^2(t) + \sin(t)\cos(t)\, dt \\ &= -\frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t)) + \frac{1}{2}\cos^2(t)\Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= -\frac{1}{2}(2\pi - 1) - \frac{1}{2} = -\pi. \end{aligned}$$

8. Wir betrachten Probleme der Form

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + 2u \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

für $0 \le x \le \pi$ und $t \ge 0$.

(a) Bestimmen Sie entsprechende Basislösungen $u_n(x,t)$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ des Problems, wenn

$$f(x) = 3\cos(4x) - \cos(5x) \ .$$

Lösung:

(a) Schritt 1: Separationsansatz
Sei $u(x,t) = X(x)T(t)$. Setzen wir dies in die PDE ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} & X''T = XT' + 2XT \\ \Rightarrow & \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 2 = k \\ \Rightarrow & X'' - kX = 0 \text{ und } T' - (k-2)T = 0, \end{aligned}$$

wobei k eine Konstante ist, weil $\frac{X''}{X}$ nur von x abhängt und $\frac{T'}{T} + 2$ nur von t abhängt.

Schritt 2: Basislösungen
Wir haben von den Randbedingungen

$$X'(0) = 0 = X'(\pi),$$

also löst X die Gleichungen

$$\begin{cases} X'' - kX = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten interessante (nicht-triviale) Lösungen nur wenn $k < 0$ und zwar

$$X(x) = A\cos(x\sqrt{-k}) + B\sin(x\sqrt{-k}).$$

Aus $X'(0) = X'(\pi) = 0$ erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} -A\sqrt{-k}\sin(0\sqrt{-k}) + B\sqrt{-k}\cos(0\sqrt{-k}) &= 0 \text{ und} \\ -A\sqrt{-k}\sin(\pi\sqrt{-k}) + B\sqrt{-k}\cos(\pi\sqrt{-k}) &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $B = 0$ und $\pi\sqrt{-k} = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$, also $k = -n^2$. Schliesslich ist

$$X(x) = A\cos(nx) \text{ für } n = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

Für T gilt nun $T' = (k-2)T = (-n^2-2)T$ und somit ist die Lösung dieser ODE die Exponentialfunktion

$$T(t) = Ce^{(-n^2-2)t}.$$

Als Basislösungen wählen wir dann

$$u_n(x,t) = e^{-(n^2+2)t}\cos(nx) \text{ für } n = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

(b) Durch Superposition ist die allgemeine Lösung von der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(n^2+2)t}\cos(nx).$$

Es gilt also

$$3\cos(4x) - \cos(5x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\cos(nx).$$

Mit einem Koeffizientenvergleich erhalten wir $C_4 = 3$ und $C_5 = -1$, also

$$\begin{aligned} u(x,t) &= C_4e^{-18t}\cos(4x) + C_5e^{-27t}\cos(5x) \\ &= 3e^{-18t}\cos(4x) - e^{-27t}\cos(5x). \end{aligned}$$

Bei den MC-Aufgaben gab es in der Prüfung 3 verschiedene Versionen. Die Version finden Sie auf der zweiten Seite Ihrer Prüfung oben rechts. Beispielsweise bedeutet Winter 2020 B, dass Sie die Version B der Prüfung hatten. Die richtigen Lösungen sind:

Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Version A	a	c	d	b	b	c	a	d	c	b	c	a	a	c	b	a
Version B	b	c	a	c	a	d	b	c	a	a	b	c	c	a	d	b
Version C	c	a	a	a	c	b	b	d	c	d	a	b	c	b	a	c

9. Die Bahn eines bewegten Massenpunktes erfülle das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 4t^3 \end{pmatrix}, \\ \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 3-e \\ 2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Welchen Ortsvektor besitzt der Massenpunkt zur Zeit $t = 1$?

√ (a) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2e \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 3e \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 4e \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 5e \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir integrieren die rechte Seite der Gleichung nach t und erhalten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t + c_1 \\ t^4 + c_2 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Setzen wir die Anfangsbedingung ein, erhalten wir

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 3-e \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Also sind $c_1 = -e$ und $c_2 = 2$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t - e \\ t^4 + 2 \end{pmatrix}$$

und zur Zeit $t = 1$ haben wir

$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2e \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daher ist (a) richtig.

---

10. Welche der folgenden Gleichungen erfüllt die Kurve mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi \text{ ?}$$

(a) $x^2 + y^2 - y = 0.$

(b) $x^2 + y^2 + y = 0.$

$\surd$ (c) $x^2 + y - 1 = 0.$

(d) $x^2 + y + 1 = 0.$

Lösung: Wir haben

$$x^2 = (\cos(t) - \sin(t))^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) - 2\sin(t)\cos(t) = 1 - \sin(2t) = 1 - y,$$

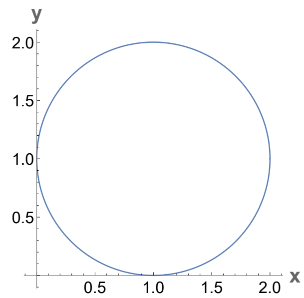
denn $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ und $2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)$. Darum ist $x^2 + y - 1 = 0$.

---

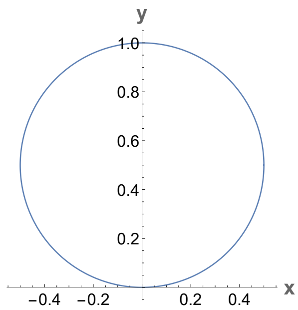
11. Welches ist das Bild der Kurve mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi \text{ ?}$$

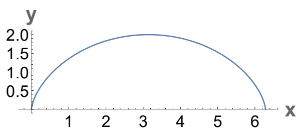
(a)



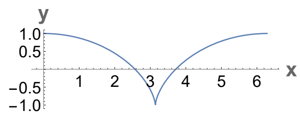
(c)



(b)



$\surd$ (d)



Lösung: Es gilt

$$\vec{r}(\pi) = \begin{pmatrix} \pi \\ -1 \end{pmatrix}.$$

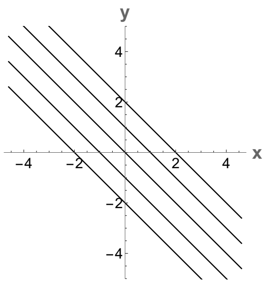
Das einzige Bild in dem die Kurve durch diesen Punkt geht ist c).

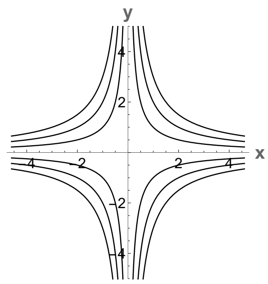
---

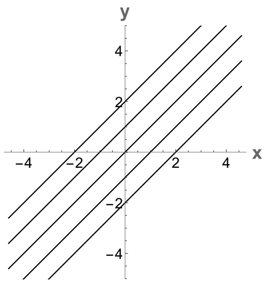
12. Welches Bild stellt Niveaulinien der Funktion

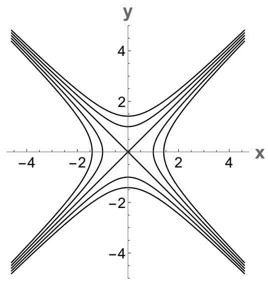
$$f(x, y) = (x - y)^2$$

dar?

(a) 

(c) 

√ (b) 

(d) 

Lösung: Wir sind interessiert an Mengen der Form

$$f(x,y) = (x-y)^2 = k \iff x - y = \pm\sqrt{k}$$

für eine Konstante $k \in \mathbb{R}$. Das heisst, die Niveaulinien sind gegeben durch $y = x + C$ für Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Das sind genau die Niveaulinien im Bild b).

---

13. Die partielle Ableitung in Richtung y von

$$f(x,y) = e^{x+y^2}$$

ist

(a) e^{x+y^2}.

√ (b) $2ye^{x+y^2}$.

(c) $(1+2y)e^{x+y^2}$.

(d) $(x+y^2)e^{x+y^2}$.

Lösung: Wir rechnen

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{x+y^2} = 2ye^{x+y^2}.$$

---

14. Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = 3xy^3 - x^2 - 9xy\ .$$

Wie viele kritische Punkte besitzt f in der Ebene?

(a) $1.$ (b) $3.$ $\surd$ (c) $5.$ (d) $7.$

Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3y^3 - 2x - 9y \\ 9xy^2 - 9x \end{pmatrix}.$$

Da diese Funktion überall differenzierbar ist, sind ihre kritische Punkte die Lösungen der Gleichung $\nabla f(x,y) = 0$. Betrachten wir die zweite Komponente. Es gilt

$$9x(y^2 - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } y = \pm 1.$$

Setzen wir $x = 0$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$3y^3 - 9y = 0 \iff 3y(y^2 - 3) = 0 \iff y = 0 \text{ oder } y = \pm\sqrt{3}.$$

Setzen wir $y = 1$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$3 - 2x - 9 = -2(x + 3) = 0 \iff x = -3.$$

Setzen wir $y = -1$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$-3 - 2x + 9 = 2(3 - x) = 0 \iff x = 3.$$

Die kritischen Punkte sind also $(0,0), (0,\sqrt{3}), (0,-\sqrt{3}), (1,-3)$ und $(-1,3)$.

---

15. Was ist die Steigung der Kurve gegeben durch

$$x^5 - 2x^2y + xy^3 = 0$$

im Punkt $(x, y) = (1, 1)$?

√ (a) -2. (b) $-\frac{1}{2}$. (c) $\frac{1}{2}$. (d) 2.

Lösung: Für $F(x, y) = x^5 - 2x^2y + xy^3$ wissen wir mit dem Satz der impliziten Funktion, dass die Steigung der Kurve $F(x, y) = 0$ an einem Punkt (x, y) gegeben ist durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = -\frac{5x^4 - 4xy + y^3}{-2x^2 + 3xy^2}.$$

Für $(x, y) = (1, 1)$ haben wir dann

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5 - 4 + 1}{-2 + 3} = -2.$$

---

16. Welches Integral ist im Allgemeinen gleich

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x^2+y^2)\,dy\,dx\ ?$$

Beachten Sie den Integrand.

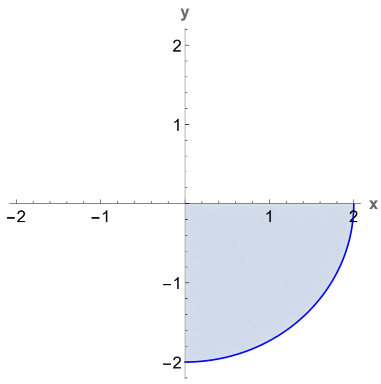
(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 f(r)\,dr\,d\theta.$

(b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_0^2 r f(r)\,dr\,d\theta.$

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_0^2 f(r^2)\,dr\,d\theta.$

√ (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r f(r^2)\,dr\,d\theta.$

Lösung: Das Integrationsgebiet sieht wie folgt aus:



Gehen wir über zu Polarkoordinaten $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, erhalten wir

$$0 \le r \le 2 \text{ und } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

Mit $x^2 + y^2 = r^2$ und der Substitution $\varphi = -\theta$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x^2+y^2)\,dy\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^2 f(r^2) r\,dr\,d\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^2 f(r^2) r\,dr\,d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 f(r^2) r\,dr\,d\varphi.\end{aligned}$$

Also ist d) die richtige Antwort.

---

17. Der Wert des Integrals

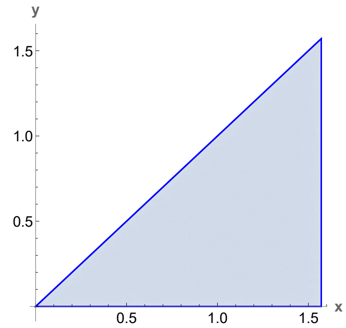
$$\iint_A \sin(x+y)\,dx\,dy\ ,$$

wobei A der von $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = x$ begrenzte Bereich ist, ist

(a) $0.$ $\checkmark$ (c) $1.$

(b) $\frac{1}{2}.$ (d) $2.$

Lösung: Der Integrationsbereich sieht wie folgt aus:



Es gilt

$$\iint_A \sin(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x \sin(x+y)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x+y)\Big|_{y=0}^{y=x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(2x) + \cos(x)\,dx = -\frac{1}{2}\sin(2x) + \sin(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

---

18. Welche der folgenden Ungleichungen stellt das räumliche Gebiet $V \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \qquad \text{und} \qquad y \geq 0$$

in Kugelkoordinaten dar?

(a) $1 \leq \rho \sin\varphi \leq 2$ und $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. (c) $\sin\varphi \leq \rho \leq 2\sin\varphi$ und $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

√ (b) $1 \leq \rho \sin\varphi \leq 2$ und $0 \leq \theta \leq \pi$. (d) $\sin\varphi \leq \rho \leq 2\sin\varphi$ und $0 \leq \theta \leq \pi$.

Lösung: Die Kugelkoordinaten sind in der Vorlesung gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= \rho\ \sin\varphi\ \cos\theta \\ y &= \rho\ \sin\varphi\ \sin\theta \\ z &= \rho\ \cos\varphi\ . \end{aligned}$$

Es gilt also $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\varphi \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} = \rho^2 \sin^2\varphi$ und wir erhalten

$$1 \leq \rho^2 \sin^2\varphi \leq 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \leq \rho \sin\varphi \leq 2\ .$$

Aus der Gleichung $0 \leq y = \rho \sin(\varphi)\sin(\theta)$ erhalten wir $\sin(\theta) \geq 0$ (denn $\rho\sin(\varphi) > 1$). Das heisst, $\theta \in [0, \pi]$. Daher ist (b) richtig.

---

19. Was ist die Länge der Kurve mit der Polargleichung

$$r = \cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad ?$$

(a) $1.$ (b) $2.$ $\checkmark$ (c) $\pi.$ (d) $2\pi.$

Lösung: Richtig ist (c). Die Länge der Kurve berechnet sich wie folgt:

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta,$$

wobei $r(\theta) = \cos(\theta)$ ist. Somit ist

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi,$$

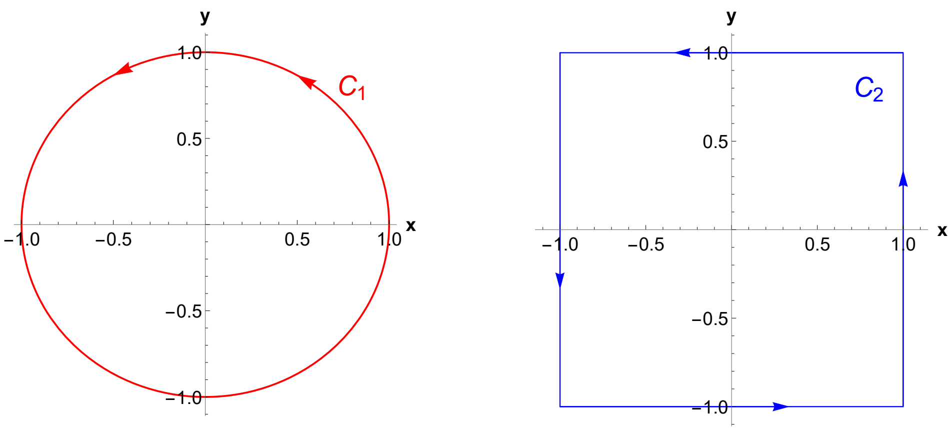
denn $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

---

20. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\overrightarrow{H}(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

und die abgebildeten Kurven C_1 und C_2:



Welche Aussage ist korrekt?

√ (a) $\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} \neq 0.$ (c) $\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0.$

(b) $\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} = 2 \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} \neq 0.$ (d) $\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} - 2 \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} \neq 0.$

Lösung: Wir erkennen, dass $\vec{H}$ wirbelfrei auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist:

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

sind gleich. Sei A das Gebiet zwischen C_1 und C_2. Mit dem Satz von Green erhalten wir:

$$\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_A 0\,dx\,dy = 0.$$

Also ist $\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r}$. Bemerke, dass das Gebiet A in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ liegt.

Wir parametrisieren C_1 durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \ \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0, 2\pi].$$

Mit $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{H}(\vec{r}(t))\dot{\vec{r}}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

---

21. Welches ist eine Parametrisierung der Schnittkurve der Sphäre

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$$

mit dem Kegel

$$z = 1 + \sqrt{x^2+y^2}\,?$$

√ (a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(c) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sqrt{2}\sin t \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(d) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sqrt{2}\sin t \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Lösung: Zuerst setzen wir die zweite Gleichung in die erste ein:

$$2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

Nun arbeiten wir mit Polarkoordinaten $x = r\cos(t),\ y = r\sin(t)$. Wir erhalten

$$2 = 2x^2 + 2y^2 = 2r^2 \iff r = 1.$$

Also ist $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Damit ist eine Parametrisierung gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Parametrisierungen in (b), (c) und (d) erfüllen nicht die Gleichung des Kegels (und (b) und (d) auch nicht die Gleichung der Sphäre).

---

22. Was ist die Zirkulation des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2y^3 + y \\ x^3y^2 - x \end{pmatrix}$$

entlang der Randkurve des Quadrats $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ im Uhrzeigersinn?

(a) -4. (b) -2. √ (c) 2. (d) 4.

Lösung: Sei Q das gegebene Quadrat. Nach dem Satz von Green gilt (wir brauchen die Zirkulation im Uhrzeigersinn, darum gibt es ein Minuszeichen):

$$-\oint_{\partial Q} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\iint_Q \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = -\int_0^1 \int_0^1 -2\, dx\, dy = 2.$$

---

23. Welches ist der Koeffizient von $\sin(2x)$ in der Fourrierreihe von

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases} ?$$

(a) $-1.$ $\surd$ (b) $1.$ (c) $-\frac{1}{2}.$ (d) $\frac{1}{2}.$

Lösung: Der Koeffizient von $\sin(2x)$ ist

$$a_2 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

---

24. Was ist der Typ und Ordnung der folgenden partiellen Differentialgleichung?

$$u_{tt} = x^2 \cdot u_x + u$$

$\surd$ (a) Linear von Ordnung 2.

(b) Linear von Ordnung 3.

(c) Nicht-linear von Ordnung 2.

(d) Nicht-linear von Ordnung 3.

Lösung: Die Ordnung ist 2, da der Grad der höchsten auftretenden partiellen Ableitung zwei ist. Ausserdem ist die Gleichung linear.
