

Musterlösungen Basisprüfung Winter 2020

1. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 - \tan(x)}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$.
- (b) Bestimmen Sie die Linearisierung von $f(x)$ in $x_0 = 0$.
- (c) Was ist der Wertebereich von $\tan(x)$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$?
- (d) Was ist der Wertebereich von $f(x)$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$?

Lösung:

- (a) Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{(1 - \tan(x))^2} = \frac{1}{\cos^2(x)(1 - \tan(x))^2}.$$

- (b) Die Linearisierung von f bei x_0 ist gegeben durch

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)(1 - \tan(x))^2} \Rightarrow f'(0) = 1.$$

Also ist

$$L(x) = 1 + x.$$

- (c) Der Tangens ist streng monoton wachsend und stetig auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$. Es gilt $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ und $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. Somit ist der Wertebereich $]-\infty, 1[$.
- (d) Die Funktion $f(x)$ ist stetig und streng monoton wachsend auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$. Es gelten

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = +\infty.$$

Darum ist der Wertebereich von $f(x)$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$ gegeben durch $]0, +\infty[$.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y'' = 4y' - 4y$.

(b) $3xy' - y = x + 1$ für $x > 0$.

Lösung:

(a) Die charakteristische Gleichung der DGL ist

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Die Lösungen sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(x) = (k_1 + k_2x)e^{2x}.$$

(b) Dividieren wir die DGL auf beiden Seiten durch $3x$. erhalten wir

$$y' - \frac{y}{3x} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Wir lösen diese Gleichung mit Hilfe der Methode des integrierenden Faktors. Es gilt

$$y(x) = \left[\int q(x)e^{P(x)} dx \right] e^{-P(x)},$$

wobei $p(x) = \frac{-1}{3x}$, $q(x) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ und $P(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $p(x)$ ist. Wir wählen $P(x) = -\frac{1}{3} \ln(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int q(x)e^{P(x)} dx &= \int \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3x}\right) x^{-\frac{1}{3}} dx = \int \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} dx \\ &= \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + C \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Zusammengefasst erhalten wir also

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + C\right) x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x - 1 + Cx^{\frac{1}{3}}.$$

3. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A .
 (b) Bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge des Systems $A\vec{x} = \vec{0}$?
 (c) Sei \vec{b} die Summe aller vier Spalten von A . Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$.

Lösung:

- (a) Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}-2\text{I}]{\text{III}-3\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-3\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der führenden Einsen ist 2, also ist $\text{Rang}(A) = 2$.

- (b) Sei n die Anzahl der Spalten von A . Die Dimension des Kerns ist gleich n Minus der Anzahl führender Einsen in der Stufenform von A . In unserem Fall ist $\dim(\ker(A)) = 2$. Wir suchen also zwei linear unabhängige Vektoren im Kern von A . Beispielsweise sind das

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Die allgemeine Lösung des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ setzt sich aus den Lösungen des homogenen Problems (Teilaufgabe b)) \vec{x}_H und einer partikulären Lösung \vec{x}_P zusammen. Da \vec{b} die Summe aller Spaltenvektoren ist, ist

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine mögliche partikuläre Lösung. Wir erhalten also als allgemeine Lösung

$$\vec{x} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

4. Wir betrachten das System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix, A , dieses Systems.
(b) Bestimmen Sie die Lösung des Systems mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Für welche Werte von k bleibt jede Lösung vom System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt?

Lösung:

- (a) Beginnen wir mit den Eigenwerten. Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0.$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$. Kommen wir zu den Eigenvektoren.

Zu $\lambda_1 = 2i$:

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

Wir wählen als Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 2i$ und $v_2 = \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -2i$.

(b) Die allgemeine Lösung des DGLs ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \vec{u} - \sin(\beta t) \vec{s}) + k_2 e^{\alpha t} (\sin(\beta t) \vec{u} + \cos(\beta t) \vec{s}),$$

wobei in unserem Fall $\alpha = 0, \beta = 2, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind.

Wir erhalten also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 \left(\cos(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) + k_2 \left(\sin(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Setzen wir die Anfangswerte ein, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2k_2 \end{pmatrix}.$$

Also $k_1 = 1$ und $k_2 = -1$. Also ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \cos(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen wir die Eigenwerte von A :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ k & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + k = 0.$$

Die Eigenwerte sind also

$$\begin{cases} \pm i\sqrt{k} & \text{für } k > 0; \\ 0 & \text{für } k = 0; \\ \pm\sqrt{-k} & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

Im Fall $k > 0$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \left(\cos(t\sqrt{k}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(t\sqrt{k}) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{k} \end{pmatrix} \right) + C_2 \left(\sin(t\sqrt{k}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(t\sqrt{k}) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{k} \end{pmatrix} \right)$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese Lösungen sind für alle $k > 0$ beschränkt.

Im Fall $k = 0$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -C_2 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese Lösung ist nicht beschränkt.

Im Fall $k < 0$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-\sqrt{-k}t} \begin{pmatrix} \sqrt{-k} \\ -k \end{pmatrix} + C_2 e^{\sqrt{-k}t} \begin{pmatrix} \sqrt{-k} \\ k \end{pmatrix}.$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese Lösung ist nicht beschränkt.

Dass es in den Fällen $k = 0$ und $k < 0$ unbeschränkte Lösungen gibt, können wir ebenfalls mit den entsprechenden Phasenportraits sehen.

5. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 - y^2).$$

- Bestimmen Sie den Gradienten von f in Abhängigkeit von (x, y) .
- In welche Richtung wächst f am schnellsten im Punkt $(x, y) = (1, 1)$?
- Geben Sie eine Gleichung der Tangentialebene an den Funktionsgraphen im Punkt $(x, y, f(x, y)) = (1, 1, 0)$.
- Klassifizieren Sie den kritischen Punkt $(0, 0)$ als lokales Maximum, lokales Minimum oder Sattelpunkt.

Lösung:

- Der Gradient ist gegeben durch

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2-y^2} \\ \frac{-2y}{1+x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

- Am schnellsten wächst die Funktion in Richtung des Gradienten. Der Gradient im Punkt $(1, 1)$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, daher erhalten wir die Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ist gegeben durch

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f|_{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0, y - y_0) = 2(x - 1) - 2(y - 1) = 2x - 2y.$$

(d) Die Hessematrix im Punkt $(0, 0)$ ist gegeben durch

$$\text{Hess} = \begin{pmatrix} \frac{-2(x^2+y^2-1)}{(x^2-y^2+1)^2} & \frac{4xy}{(x^2-y^2+1)^2} \\ \frac{4xy}{(x^2-y^2+1)^2} & \frac{-2(x^2+y^2-1)}{(x^2-y^2+1)^2} \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(\text{Hess}) = -4 < 0$ ist, ist der Ursprung ein Sattelpunkt.

6. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 \\ 2xyz \end{pmatrix}.$$

- (a) Ist \vec{F} konservativ?
- (b) Bestimmen Sie die Arbeit von \vec{F} entlang der geradlinigen Strecke, vom Punkt $(1, 1, 1)$ zum Punkt (x, y, z) . Drücken Sie Ihre Antwort als Funktion von (x, y, z) aus.
- (c) Für welche Punkte auf der Koordinatenebene $z = 0$ ist die Divergenz von \vec{F} positiv? Skizzieren Sie diese Punktmenge.

Lösung:

- (a) Ja, \vec{F} ist konservativ, denn $\phi(x, y, z) = xyz^2$ ist eine Potentialfunktion.
- (b) Das Vektorfeld \vec{F} ist konservativ. Das heisst, die Arbeit entlang der Strecke C hängt nur von den Endpunkten ab. Genauer gesagt gilt

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla \phi \cdot d\vec{r} = \phi(x, y, z) - \phi(1, 1, 1) = xyz^2 - 1.$$

(c) Es gilt

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 + 0 + 2xy = 2xy.$$

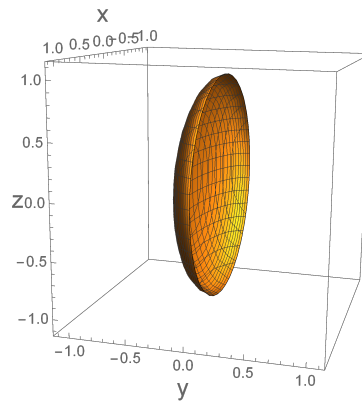
Die Divergenz ist positiv, wenn $x > 0$ und $y > 0$ oder wenn $x < 0$ und $y < 0$.

7. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{G}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \sin(y) \\ ye^x \\ x + z \end{pmatrix}.$$

und das Halbellipsoid A gegeben durch

$$x^2 + 9y^2 + z^2 = 1 \text{ und } y \leq 0.$$



- Parametrisieren Sie A .
- Parametrisieren Sie die Randkurve von A (in irgendeiner Richtung).
- Bestimmen Sie den Wirbelfluss durch A nach rechts (d.h., die y -Komponente des Normalenvektors ist positiv),

$$\iint_A (\text{rot } \vec{G}) \cdot \vec{n} \, dA.$$

Lösung:

- In kartesischen Koordinaten: $9y^2 = 1 - x^2 - z^2 \iff y = \pm \sqrt{\frac{1 - x^2 - z^2}{9}}$.
Da $y < 0$ müssen wir die negative Lösung benutzen. Ausserdem muss $x^2 + z^2 \leq 1$ sein. Zusammengefasst:

$$x = -\sqrt{\frac{1 - x^2 - z^2}{9}} \text{ mit } x^2 + z^2 \leq 1.$$

In Zylinderkoordinaten: Wir benutzen folgende Zylinderkoordinaten:

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = y$$

$$z = r \sin(\theta)$$

Es gilt $x^2 + 9y^2 + z^2 = 1 \iff 9y^2 + r^2 = 1 \iff y = \pm \frac{1}{3} \sqrt{1 - r^2}$.

Also da $y \leq 0$, erhalten wir die Parametrisierung

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = -\frac{1}{3} \sqrt{1 - r^2} \text{ mit } r \in [0, 1] \text{ und } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$z = r \sin(\theta).$$

Alternativ in angepassten Kugelkoordinaten:

$$x = \sin(\varphi) \cos(\theta)$$

$$y = \frac{1}{3} \sin(\varphi) \sin(\theta)$$

$$z = \cos(\varphi)$$

mit $\varphi \in [0, \pi]$ und $\theta \in [\pi, 2\pi]$.

(b) Setzen wir $y = 0$ in die Gleichung ein, erhalten wir

$$1 = x^2 + 9y^2 + z^2 = x^2 + z^2.$$

Dies können wir durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren.

(c) Sei C die Randkurve von A . Die Randkurve müssen wir, anders als in Teilaufgabe b), im Uhrzeigersinn parametrisieren. Nach dem Satz von Stokes gilt also

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot}(\vec{G}) \cdot \vec{n} \, dA &= \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos^2(t) + \sin(t) \cos(t) \, dt \\ &= -\frac{1}{2}(t + \sin(t) \cos(t)) + \frac{1}{2} \cos^2(t) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= -\frac{1}{2}(2\pi - 1) - \frac{1}{2} = -\pi. \end{aligned}$$

8. Wir betrachten Probleme der Form

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + 2u \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

für $0 \leq x \leq \pi$ und $t \geq 0$.

- (a) Bestimmen Sie entsprechende Basislösungen $u_n(x, t)$.
(b) Bestimmen Sie die Lösung $u(x, t)$ des Problems, wenn

$$f(x) = 3 \cos(4x) - \cos(5x) .$$

Lösung:

- (a) Schritt 1: Separationsansatz

Sei $u(x, t) = X(x)T(t)$. Setzen wir dies in die PDE ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} X''T &= XT' + 2XT \\ \Rightarrow \frac{X''}{X} &= \frac{T'}{T} + 2 = k \\ \Rightarrow X'' - kX &= 0 \text{ und } T' - (k - 2)T = 0, \end{aligned}$$

wobei k eine Konstante ist, weil $\frac{X''}{X}$ nur von x abhängt und $\frac{T'}{T} + 2$ nur von t abhängt.

Schritt 2: Basislösungen

Wir haben von den Randbedingungen

$$X'(0) = 0 = X'(\pi),$$

also löst X die Gleichungen

$$\begin{cases} X'' - kX = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten interessante (nicht-triviale) Lösungen nur wenn $k < 0$ und zwar

$$X(x) = A \cos(x\sqrt{-k}) + B \sin(x\sqrt{-k}).$$

Aus $X'(0) = X'(\pi) = 0$ erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} -A\sqrt{-k} \sin(0\sqrt{-k}) + B\sqrt{-k} \cos(0\sqrt{-k}) &= 0 \text{ und} \\ -A\sqrt{-k} \sin(\pi\sqrt{-k}) + B\sqrt{-k} \cos(\pi\sqrt{-k}) &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $B = 0$ und $\pi\sqrt{-k} = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$, also $k = -n^2$. Schliesslich ist

$$X(x) = A \cos(nx) \text{ f\"ur } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

F\"ur T gilt nun $T' = (k-2)T = (-n^2-2)T$ und somit ist die L\"osung dieser ODE die Exponentialfunktion

$$T(t) = C e^{(-n^2-2)t}.$$

Als Basisl\"osungen w\"ahlen wir dann

$$u_n(x, t) = e^{-(n^2+2)t} \cos(nx) \text{ f\"ur } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(b) Durch Superposition ist die allgemeine L\"osung von der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(n^2+2)t} \cos(nx).$$

Es gilt also

$$3 \cos(4x) - \cos(5x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(nx).$$

Mit einem Koeffizientenvergleich erhalten wir $C_4 = 3$ und $C_5 = -1$, also

$$\begin{aligned} u(x, t) &= C_4 e^{-18t} \cos(4x) + C_5 e^{-27t} \cos(5x) \\ &= 3e^{-18t} \cos(4x) - e^{-27t} \cos(5x). \end{aligned}$$

Bei den MC-Aufgaben gab es in der Pr\"ufung 3 verschiedene Versionen. Die Version finden Sie auf der zweiten Seite Ihrer Pr\"ufung oben rechts. Beispielsweise bedeutet Winter 2020 B, dass Sie die Version B der Pr\"ufung hatten. Die richtigen L\"osungen sind:

Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Version A	a	c	d	b	b	c	a	d	c	b	c	a	a	c	b	a
Version B	b	c	a	c	a	d	b	c	a	a	b	c	c	a	d	b
Version C	c	a	a	a	c	b	b	d	c	d	a	b	c	b	a	c

9. Die Bahn eines bewegten Massenpunktes erfülle das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 4t^3 \end{pmatrix}, \\ \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 3 - e \\ 2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Welchen Ortsvektor besitzt der Massenpunkt zur Zeit $t = 1$?

- ✓ (a) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2e \\ 3 \end{pmatrix}$. (c) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 4e \\ 3 \end{pmatrix}$.
- (b) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 3e \\ 1 \end{pmatrix}$. (d) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 5e \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir integrieren die rechte Seite der Gleichung nach t und erhalten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t + c_1 \\ t^4 + c_2 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Setzen wir die Anfangsbedingung ein, erhalten wir

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 3 - e \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Also sind $c_1 = -e$ und $c_2 = 2$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t - e \\ t^4 + 2 \end{pmatrix}$$

und zur Zeit $t = 1$ haben wir

$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2e \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daher ist (a) richtig.

10. Welche der folgenden Gleichungen erfüllt die Kurve mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi ?$$

(a) $x^2 + y^2 - y = 0$.

✓ (c) $x^2 + y - 1 = 0$.

(b) $x^2 + y^2 + y = 0$.

(d) $x^2 + y + 1 = 0$.

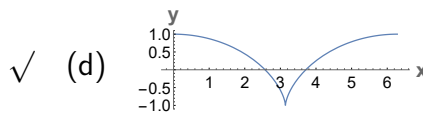
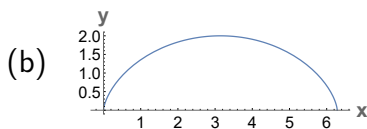
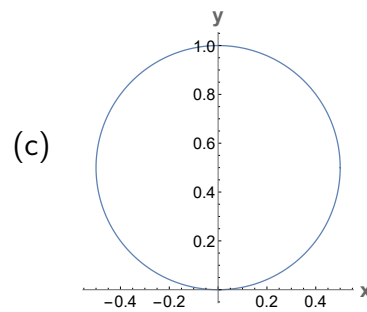
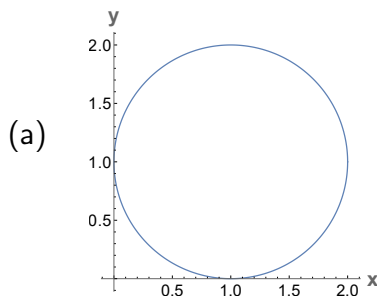
Lösung: Wir haben

$$x^2 = (\cos(t) - \sin(t))^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) - 2 \sin(t) \cos(t) = 1 - \sin(2t) = 1 - y,$$

denn $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ und $2 \cos(t) \sin(t) = \sin(2t)$. Darum ist $x^2 + y - 1 = 0$.

11. Welches ist das Bild der Kurve mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \text{ für } 0 \leq t \leq 2\pi ?$$



Lösung: Es gilt

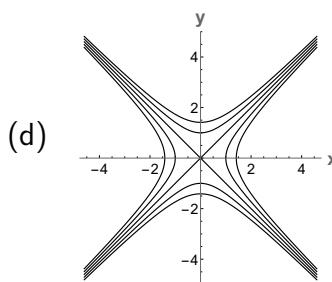
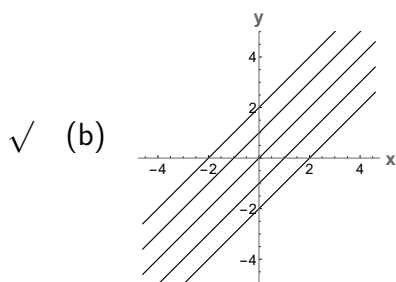
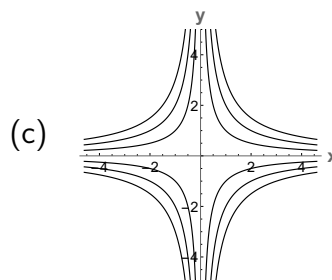
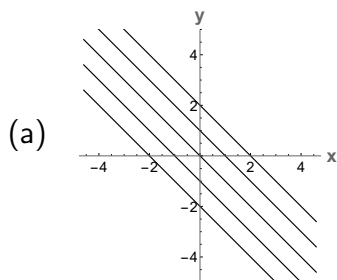
$$\vec{r}'(\pi) = \begin{pmatrix} \pi \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Das einzige Bild in dem die Kurve durch diesen Punkt geht ist c).

12. Welches Bild stellt Niveaulinien der Funktion

$$f(x, y) = (x - y)^2$$

dar?



Lösung: Wir sind interessiert an Mengen der Form

$$f(x, y) = (x - y)^2 = k \iff x - y = \pm\sqrt{k}$$

für eine Konstante $k \in \mathbb{R}$. Das heißt, die Niveaulinien sind gegeben durch $y = x + C$ für Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Das sind genau die Niveaulinien im Bild b).

13. Die partielle Ableitung in Richtung y von

$$f(x, y) = e^{x+y^2}$$

ist

(a) e^{x+y^2} .

(c) $(1 + 2y)e^{x+y^2}$.

✓ (b) $2ye^{x+y^2}$.

(d) $(x + y^2)e^{x+y^2}$.

Lösung: Wir rechnen

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{x+y^2} = 2ye^{x+y^2}.$$

14. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = 3xy^3 - x^2 - 9xy.$$

Wie viele kritische Punkte besitzt f in der Ebene?

- (a) 1. (b) 3. ✓ (c) 5. (d) 7.

Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3y^3 - 2x - 9y \\ 9xy^2 - 9x \end{pmatrix}.$$

Da diese Funktion überall differenzierbar ist, sind ihre kritische Punkte die Lösungen der Gleichung $\nabla f(x, y) = 0$. Betrachten wir die zweite Komponente. Es gilt

$$9x(y^2 - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } y = \pm 1.$$

Setzen wir $x = 0$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$3y^3 - 9y = 0 \iff 3y(y^2 - 3) = 0 \iff y = 0 \text{ oder } y = \pm\sqrt{3}.$$

Setzen wir $y = 1$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$3 - 2x - 9 = -2(x + 3) = 0 \iff x = -3.$$

Setzen wir $y = -1$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$-3 - 2x + 9 = 2(3 - x) = 0 \iff x = 3.$$

Die kritischen Punkte sind also $(0, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$, $(1, -3)$ und $(-1, 3)$.

15. Was ist die Steigung der Kurve gegeben durch

$$x^5 - 2x^2y + xy^3 = 0$$

im Punkt $(x, y) = (1, 1)$?

- ✓ (a) -2 . (b) $-\frac{1}{2}$. (c) $\frac{1}{2}$. (d) 2 .

Lösung: Für $F(x, y) = x^5 - 2x^2y + xy^3$ wissen wir mit dem Satz der impliziten Funktion, dass die Steigung der Kurve $F(x, y) = 0$ an einem Punkt (x, y) gegeben ist durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = -\frac{5x^4 - 4xy + y^3}{-2x^2 + 3xy^2}.$$

Für $(x, y) = (1, 1)$ haben wir dann

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5 - 4 + 1}{-2 + 3} = -2.$$

16. Welches Integral ist im Allgemeinen gleich

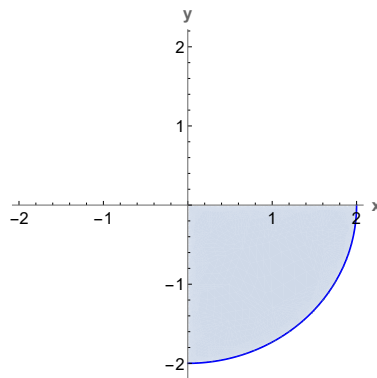
$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x^2 + y^2) dy dx ?$$

Beachten Sie den Integrand.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 f(r) dr d\theta.$ (c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^2 f(r^2) dr d\theta.$

(b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^2 r f(r) dr d\theta.$ ✓ (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r f(r^2) dr d\theta.$

Lösung: Das Integrationsgebiet sieht wie folgt aus:



Gehen wir über zu Polarkoordinaten $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, erhalten wir

$$0 \leq r \leq 2 \text{ und } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

Mit $x^2 + y^2 = r^2$ und der Substitution $\varphi = -\theta$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x^2 + y^2) dy dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^2 f(r^2) r dr d\theta = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^2 f(r^2) r dr d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 f(r^2) r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Also ist d) die richtige Antwort.

17. Der Wert des Integrals

$$\iint_A \sin(x + y) dx dy ,$$

wobei A der von $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = x$ begrenzte Bereich ist, ist

18. Welche der folgenden Ungleichungen stellt das räumliche Gebiet $V \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{und} \quad y \geq 0$$

in Kugelkoordinaten dar?

- (a) $1 \leq \rho \sin \varphi \leq 2$ und $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. (c) $\sin \varphi \leq \rho \leq 2 \sin \varphi$ und $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
✓ (b) $1 \leq \rho \sin \varphi \leq 2$ und $0 \leq \theta \leq \pi$. (d) $\sin \varphi \leq \rho \leq 2 \sin \varphi$ und $0 \leq \theta \leq \pi$.

Lösung: Die Kugelkoordinaten sind in der Vorlesung gegeben durch

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \varphi \cos \theta \\y &= \rho \sin \varphi \sin \theta \\z &= \rho \cos \varphi .\end{aligned}$$

Es gilt also $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} = \rho^2 \sin^2 \varphi$ und wir erhalten

$$1 \leq \rho^2 \sin^2 \varphi \leq 4 \quad \iff \quad 1 \leq \rho \sin \varphi \leq 2 .$$

Aus der Gleichung $0 \leq y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta)$ erhalten wir $\sin(\theta) \geq 0$ (denn $\rho \sin(\varphi) > 1$). Das heisst, $\theta \in [0, \pi]$. Daher ist (b) richtig.

19. Was ist die Länge der Kurve mit der Polargleichung

$$r = \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad ?$$

- (a) 1. (b) 2. ✓ (c) π . (d) 2π .

Lösung: Richtig ist (c). Die Länge der Kurve berechnet sich wie folgt:

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta,$$

wobei $r(\theta) = \cos(\theta)$ ist. Somit ist

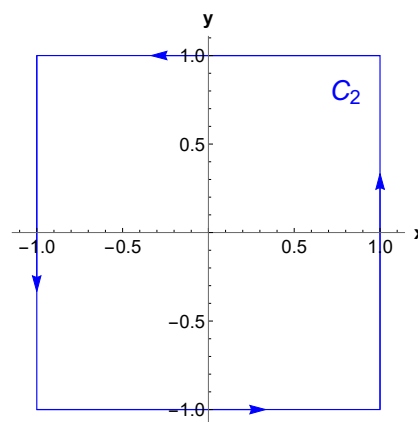
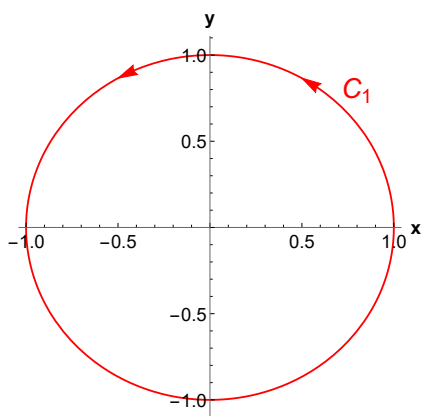
$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi,$$

denn $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

20. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{H}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

und die abgebildeten Kurven C_1 und C_2 :



Welche Aussage ist korrekt?

- ✓ (a) $\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} \neq 0$. (c) $\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0$.
- (b) $\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} = 2 \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} \neq 0$. (d) $\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} - 2 \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} \neq 0$.

Lösung: Wir erkennen, dass \vec{H} wirbelfrei auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist:

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

sind gleich. Sei A das Gebiet zwischen C_1 und C_2 . Mit dem Satz von Green erhalten wir:

$$\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_A 0 dx dy = 0.$$

Also ist $\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{r}$. Bemerke, dass das Gebiet A in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ liegt.

Wir parametrisieren C_1 durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0, 2\pi].$$

Mit $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{H}(\vec{r}(t)) \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

21. Welches ist eine Parametrisierung der Schnittkurve der Kugel

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$$

mit dem Kegel

$$z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}?$$

$$\checkmark \quad \text{(a)} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad \text{(c)} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos t \\ \sqrt{2} \sin t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$\text{(b)} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad \text{(d)} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos t \\ \sqrt{2} \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Lösung: Zuerst setzen wir die zweite Gleichung in die erste ein:

$$2 = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

Nun arbeiten wir mit Polarkoordinaten $x = r \cos(t)$, $y = r \sin(t)$. Wir erhalten

$$2 = 2x^2 + 2y^2 = 2r^2 \iff r = 1.$$

Also ist $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Damit ist eine Parametrisierung gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Parametrisierungen in (b), (c) und (d) erfüllen nicht die Gleichung des Kegels (und (b) und (d) auch nicht die Gleichung der Sphäre).

22. Was ist die Zirkulation des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 y^3 + y \\ x^3 y^2 - x \end{pmatrix}$$

entlang der Randkurve des Quadrats $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ im Uhrzeigersinn?

(a) -4 . (b) -2 . \checkmark (c) 2 . (d) 4 .

Lösung: Sei Q das gegebene Quadrat. Nach dem Satz von Green gilt (wir brauchen die Zirkulation im Uhrzeigersinn, darum gibt es ein Minuszeichen):

$$-\oint_{\partial Q} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\iint_Q \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = -\int_0^1 \int_0^1 -2 dx dy = 2.$$

23. Welches ist der Koeffizient von $\sin(2x)$ in der Fourierreihe von

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases} \quad ?$$

- (a) -1 . ✓ (b) 1 . (c) $-\frac{1}{2}$. (d) $\frac{1}{2}$.

Lösung: Der Koeffizient von $\sin(2x)$ ist

$$a_2 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

24. Was ist der Typ und Ordnung der folgenden partiellen Differentialgleichung?

$$u_{tt} = x^2 \cdot u_x + u$$

- ✓ (a) Linear von Ordnung 2. (c) Nicht-linear von Ordnung 2.
 (b) Linear von Ordnung 3. (d) Nicht-linear von Ordnung 3.

Lösung: Die Ordnung ist 2, da der Grad der höchsten auftretenden partiellen Ableitung zwei ist. Ausserdem ist die Gleichung linear.

Musterlösungen zu den MC-Aufgaben der Prüfung Mathematik I

5. Was ist der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} ?$$

- (a) $-\infty$. (c) 0 .
 ✓ (b) $\frac{1}{2}$. (d) $+\infty$.

Lösung: Wir können zwei Mal Bernoulli-de l'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

6. Auf welchem Intervall nimmt die Funktion

$$f(x) = (x - 1)^3(4 - x)^2$$

ein Extremum an?

- (a) $]0, 1[$.
- (b) $]1, 2[$.
- ✓ (c) $]2, 3[$.
- (d) $]3, 4[$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x - 1)^2(4 - x)^2 - 2(4 - x)(x - 1)^3 \\ &= (x - 1)^2(4 - x)(3(4 - x) - 2(x - 1)) \\ &= (x - 1)^2(4 - x)(14 - 5x). \end{aligned}$$

Also sind die kritischen Punkte gegeben durch 1, 4 und $\frac{14}{5}$. Die einzig mögliche Antwort ist also c). Der Vollständigkeit halber prüfen wir noch nach, ob f bei $x = \frac{14}{5}$ tatsächlich ein Extremum annimmt. Wir haben

$$f''(x) = 2(x - 1)(10x^2 - 56x + 73).$$

Es gilt $f''\left(\frac{14}{5}\right) = -\frac{486}{25} < 0$. Also nimmt f bei $x = \frac{14}{5}$ ein Maximum an.

7. Die Differentialgleichung

$$f' = (f + 2)(f + 3)$$

ist

- ✓ (a) 1. Ordnung und nicht linear.
- (b) 1. Ordnung und linear homogen.
- (c) 2. Ordnung und nicht linear.
- (d) 2. Ordnung und linear homogen.

Lösung: Da nur die erste Ableitung in der Differentialgleichung vorkommt, ist sie von erster Ordnung. Da auch f^2 vorkommt, ist die Differentialgleichung nicht linear.

8. Eine Kurve mit Messdaten habe in doppelt logarithmischer Darstellung (d.h. statt x und y sind $a = \log_{10} x$ und $b = \log_{10} y$ auf den Achsen aufgetragen) die Form der Geraden $b = \frac{2}{3}a$. Welche Funktion $y = f(x)$ stellt diese Kurve dar?

$$\checkmark \quad (\text{a}) \quad y = x^{\frac{2}{3}}.$$

$$(\text{c}) \quad y = 10^{\frac{3x}{2}}.$$

$$(\text{b}) \quad y = x^{\frac{3}{2}}.$$

$$(\text{d}) \quad y = 10^{\frac{2x}{3}}.$$

Lösung: Wir ersetzen a durch $\log_{10}(x)$ und b durch $\log_{10}(y)$ und erhalten:

$$b = \frac{2}{3}a \iff \log_{10}(y) = \frac{2}{3}\log_{10}(x) \iff \log_{10}(y) = \log_{10}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) \iff y = x^{\frac{2}{3}}.$$

9. Der Ausdruck

$$\frac{-i - 7}{2 + i}$$

lässt sich umformen zu:

$$(\text{a}) \quad -3 - i.$$

$$(\text{c}) \quad 3 - i.$$

$$\checkmark \quad (\text{b}) \quad -3 + i.$$

$$(\text{d}) \quad 3 + i.$$

Lösung: Wir rechnen:

$$\frac{-i - 7}{2 + i} = \frac{(-i - 7)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{i^2 - 14 + 5i}{4 - i^2} = \frac{-15 + 5i}{5} = -3 + i.$$

10. Die Nullstellen des Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 8$$

sind

- (a) $-2, 2i, -2i.$
- (b) $-2, \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$
- (c) $-2, 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, 2e^{i\frac{4\pi}{3}}.$
- ✓ (d) $-2, 2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$

Lösung 1: Gesucht sind die dritten Wurzeln von -8 . Diese sind gegeben durch $re^{i\theta}$, wobei $\theta = \frac{\pi+2k\pi}{3}$ (mit $k \in \mathbb{N}$) und $r = \sqrt[3]{8} = 2$ ist. Also sind die Nullstellen gegeben durch $2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{i\pi} = -2$ und $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Lösung 2: Wir setzen die Antwortmöglichkeiten in die Gleichung ein. Es gilt:

$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 8 = 0, \\ p(2e^{i\frac{\pi}{3}}) &= 2^3 e^{i\pi} + 8 = 8(\cos(\pi) + i \sin(\pi)) + 8 = 0 \text{ und} \\ p(2e^{i\frac{5\pi}{3}}) &= 2^3 e^{i5\pi} + 8 = 8(\cos(5\pi) + i \sin(5\pi)) = 0. \end{aligned}$$

Also ist d) die richtige Lösung.

Lösung 3: Alternativ können wir die Nullstellen wie folgt berechnen:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4).$$

Mit der Mitternachtsformel können wir die Nullstellen von $\lambda^2 - 2\lambda + 4$ bestimmen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}.$$

Es gilt $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $1 - i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Die Nullstellen sind also $-2, 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

11. Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

(a) -3 . (c) 2 .

✓ (b) -2 . (d) 3 .

Lösung: Wir machen eine Laplace-Entwicklung entlang der dritten Spalte:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: I$$

Nun machen wir eine weitere Laplace-Entwicklung entlang der dritten Spalte und benutzen dann die Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 5 + 0 \cdot 2 \cdot 6 - (0 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 1)) = 2(3 - 4) = -2. \end{aligned}$$

12. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- (a) Die Matrix A ist diagonalisierbar.
- (b) Die Matrix A besitzt zwei verschiedene Eigenwerte.
- (c) Die Spalten von A bilden eine Basis von \mathbb{R}^2 .
- ✓ (d) Die Spalten von A bilden eine Eigenbasis für A .

Lösung: Die Eigenwerte von A sind 2 und 4. Also ist die Aussage b) wahr. Da A zwei verschiedene Eigenwerte hat, ist A auch diagonalisierbar. Da die beiden Spalten von A linear unabhängig sind und $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ist, bilden die Spalten von A eine Basis des \mathbb{R}^2 . Also ist auch c) wahr. Falsch ist also d). In der Tat ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ kein Eigenvektor von A , denn

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.