The Carlson-Pólya theorem on rational functions

Aitor Iribar López

1 Introduction

Power series of the form

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{1}$$

have catched the interests of mathematicians since a long time ago. Eisenstein showed that if f is an algebraic function then there is some b such that $a_n b^{n+1} \in \mathbb{Z}$ for all n. Fatou proved in 1904 that if f is algebraic but not rational and the coefficients a_i are integers then f has a branch point inside the unit circle. During that time, it was also known that in the theory of elliptic functions, several power series with integers that cannot be extended beyond the unit circle had been found, such as

$$f(z) = \sum_{p \text{ prime}} z^p \,.$$

In 1894, Borel [1] proved that if a holomorphic function f is single valued and has only finitely many singularities in some disk $D(0, r)$ with $r > 1$ and in the expansion (1) the a_i are integers then f is rational, and Fatou [3] proved that in that case, if all the poles are outside the unit circle, then all the poles of f are roots of unity.

Moreover, Hausdorff showed later that there are only countable many power series with integer coefficients that can be extended beyond the unit circle. These considerations led Pólya to conjecture in 1916 [6] that if the power series (1) has radius of convergence 1, the a_i are integers and f can be extended to any point of the unit circle, then f is a rational function and, by Fatou's result, will have the form

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x^n - 1)^m} \,.$$

This result was proven in 1921 by Carlson [2], following some of the ideas of Borel. Some years later, Pólya proved a strengthening of Carlson's result [7].

In this note, we give a self-contained proof of the Theorems of Fatou and Carlson, presented in a modern way. We use the notion of transfinite diemeter, which was introduced by Fekete in 1923 [4]. The connection between Carlson's Theorem and the transfinite diameter was noticed by Polya in 1928 [8]. In the last section, we review the idea of the proof of Carlson's theorem. An appendix has been included, with an English translation of Carlson's original article [2].

2 Kronecker's result

The following result is due to Kronecker [5].

Theorem 1. *A power series $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ is a rational function if and only if for all n large enough, the determinant of the Hankel matrix*

$$\Delta(n) = \det(H_n)\,,\ H_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} \end{pmatrix}$$

vanishes.

Proof. First, suppose that all the Hankel determinants are 0. Then, from the shape of H_n we see successively that $a_0, \dots, a_{n-2} = 0$ and so $0 = \Delta(n) = (-1)^{n(n-1)} a_{n-1}^n$ implies that $a_{n-1} = 0$ and so on. Now, let r be the largest number such that $\Delta(r) \neq 0$. Then, one can solve the equation

$$H_r \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r \\ \vdots \\ a_{2r-1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

so that, if we define numbers b_i by the following rule:

$$\begin{aligned} b_k &= a_k && \text{for } k \leq 2r-1 \\ b_{2r+m} &= \sum_{k=0}^{r-1} c_k b_{r+m+k} && \text{for } m \geq 0 \end{aligned}$$

Then the equality

$$b_{m+r} = \sum_{k=0}^{r-1} c_k b_{m+k} \tag{3}$$

holds for all $m \geq 0$. If we iterate this equality n times, we find numbers $c_{k,n}$ such that

$$b_{m+r+n} = \sum_{k=0}^{r-1} c_{k,n} b_{m+k} \tag{4}$$

for all $m \geq 0$.
Claim: $b_i = a_i$ for all i. For that, suppose that this has been proven for $i = 2r, \dots, 2r + d - 1$, and consider the Hankel matrix H_{r+d+1}. We perform the following operation on the columns of H_{r+d+1}:

$$C_{r+1+n} \to C_{r+1+n} - \sum_{k=0}^{r-1} c_{k,n} C_{k+1}$$

for $n = 0, \dots, d$. By the formulas (4), and the assumption that $a_i = b_i$ for $i \leq 2r + d - 1$,

the resulting matrix has the following shape:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} H_r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline * & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n+d}-b_{2n+d} \\ * & 0 & 0 & \iddots & a_{2n+d}-b_{2n+d} & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ * & 0 & a_{2n+d}-b_{2n+d} & \iddots & * & * \\ * & a_{2n+d}-b_{2n+d} & * & \cdots & * & * \end{array}\right)$$

One can then expand the determinant and see that

$$0 = \Delta(r+d+1) = (-1)^{d(d-1)/2}(a_{2r+d}-b_{2r+d})^{d+1}\Delta(r)$$

so that $a_{2r+d} = b_{2r+d}$. This proves the claim.
If we defione $c_r = -1$ then, by (3) the relation

$$\sum_{k=0}^{r} c_k a_{m+k} = a_{m+r} \tag{5}$$

holds for all $m \geq 0$. If $Q(z) = \sum_{i=0}^{r} c_i z^i$, we have that

$$Q(1/z)f(z) = \sum_{m\geq -r}\left(\sum_k c_k a_{m+k}\right) z^m\,,$$

so by (5), $Q(1/z)f(z) \in \mathbb{Q}[1/z]$, and f is a rational function. For the other direction, if f is a rational function, then one can find constants $c_0, \dots, c_r$ such that (5) holds and $c_r \neq 0$. After dividing by $-c_r$, we get (3) and again, after iterating it, (4) holds, which implies, after the column operations, that $\Delta(r+1+d) = 0$ for all $d \geq 0$. □

3 Cauchy's Theorem and the transfinite diameter

If f is gives a meromorphic function and Γ is some path around 0 that computes the coefficients of f around 0. Then, by Cauchy's Theorem, we have that

$$\Delta(n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \dots \int_\Gamma \frac{f(z_1)}{z_1}\dots\frac{f(z_n)}{z_n^{n+1}} V(z_1,\dots,z_n)dz_1\dots dz_n\,, \tag{6}$$

where V is the van der Monde determinant

$$V(z_1,\dots,z_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1/z_1 & 1/z_2 & \dots & 1/z_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/z_1^{n-1} & 1/z_2^{n-1} & \dots & 1/z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(1/z_i - 1/z_j)\,.$$

Since the left hand side of (6) does not depend on the z_i, the right hand side is invariant under permutations of the z_i. If we take all possible permutations, and sum with the sign, the terms

$$\frac{1}{z_1^0}\cdots\frac{1}{z_n^{n-1}}$$

give the van der Monde determinant again, so

$$\Delta(n) = \frac{1}{n!(2\pi i)^n} \int_\Gamma \dots \int_\Gamma \frac{f(z_1)}{z_1} \dots \frac{f(z_n)}{z_n} V(z_1, \dots, z_n)^2 dz_1 \dots dz_n \,. \tag{7}$$

Give the expression for the van der Monde determinant, it makes sense to now consider

Definition 2. Let K be a compact subset of $\mathbb{C}$. The *transfinite diameter* of K is the real number

$$d(K) = \lim_{n\to\infty} d_n(K), \text{ where } d_n(K) = \sup\left\{ \left(\prod_{i<j} |z_i - z_j| \right)^{\frac{2}{n(n-1)}} : z_i \in K \right\}$$

So that, if f is bounded by M on Γ, and $\delta = \text{dist}(0, \Gamma)$ then

$$|\Delta(n)| \leq \frac{M^n \,\text{length}(\Gamma)^n}{n!(2\pi)^n \delta^n} d_n(\Gamma^{-1})^{n(n-1)}$$

Therefore, since all of the terms except for $(n!)^{-1} d_n(\Gamma^{-1})^{n(n-1)}$ grow like C^n, we obtain:

Theorem 3. *(Polya) Suppose that f is an analytic function on an open subset U that contains 0, and let*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$$

be its expansion at 0. Assume that all the a_i are integers[1]*, and that there is a cycle $\Gamma \subset U$ such that:*

- *Γ computes the expansions of f at 0, i.e. $\int_\Gamma f(z)dz/z^{n+1} = (2\pi i)a_n$*
- *The transfinite diameter of $\Gamma^{-1} = \{z^{-1} : z \in \Gamma\}$ is less than 1.*

Then f is a rational function.

Proof. By the assumptions, for some n_0, $d_n(\Gamma) \leq C < 1$ for $n > n_0$, so that the term

$$\frac{M^n \,\text{length}(\Gamma)^n}{n!(2\pi)^n \delta^n} d_n(\Gamma^{-1})^{n(n-1)}$$

converges to 0. But by the assumption on the a_i, $\Delta(n)$ is an integer. This is only possible if $\Delta(n) = 0$ for all sufficiently large n. □

4 The transfinite diameter of a bitten cookie

Carlson's Theorem applies to functions which are analytic on the disk $D(0,1)$, with singularities at points $p_1, \dots, p_k$ in the interior and admit some extension beyond the unit disk. We need to prove some paroperties of the transfinite diameter:

Theorem 4 (Fekete)**.** *The transfinite diameter has the following properties:*

[1] More generally, one can allow all the a_i to belong to some subring $A \subseteq \mathbb{C}$ such that 0 is an isolated point of A

a) The sequence $d_n(K)$ is decreasing; in particular, $d(K)$ always exists.

b) If $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ is a decreasing sequence of nested compact subsets of $\mathbb{C}$, $d(K) = \lim_{m\to\infty} d(K_m)$.

c) Suppose that $A = \{p_i\}_{i\in I}$ is a countable (possibly finite) collection of isolated points of $\mathbb{C}$, and let K be any compact subset of $\mathbb{C}$ that contains all the accumulation points of A in $\mathbb{P}^1$. Then $d(K \cup A) = d(K)$.

d) If K is compact and $\partial_e K$ is the boundary of the connected component of $\mathbb{P}^1 \setminus K$ containing ∞ then $d(K) = d(\partial_e K)$.

e) For all n, let $m_n(K)$ be the infimum, among monic polynomials $p(z)$ of degree n, of the quantity

$$\|p\|_K^{1/n} = \sup_{z\in K} |p(z)|^{1/n}.$$

Then, $d(K) = \lim_{n\to\infty} m_n(K)$.

Proof. a) Since K is compact, we can find points $z_1, \ldots, z_{n+1}$ such that $d_{n+1}(K)^{n(n+1)/2} = \prod_{1\le j<k\le n+1} |z_j - z_k|$. By omitting the point i, it is clear that

$$d_n(K)^{n(n-1)} \ge \prod_{\substack{1\le j<k\le n+1 \\ j,k\neq i}} |z_j - z_k|$$

and taking a product of these inequalities gives

$$(d_n(K)^{n(n-1)/2})^{n+1} \ge \prod_{1\le j<k\le n+1} |z_j - z_k|^{n-1} = (d_{n+1}(K))^{n(n-1)(n+1)/2}.$$

b) Since the function

$$f_n(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{1\le j<k\le n} (z_j - z_k) \tag{8}$$

is continous on $\mathbb{C}^n$, and K_m^n is a nested sequence of compact subsets with limit K^n, a simple compactness argument shows that

$$\lim_{m\to\infty} d_n(K_m)^{n(n-1)/2} = \lim_{m\to\infty} \sup_{\mathbf{z}\in K_m^n} \{|f_n(\mathbf{z})| : \mathbf{z} \in K_m^n\} = \sup_{\mathbf{z}\in K^n} \{|f_n(\mathbf{z})| : \mathbf{z} \in K^n\} = d_n(K)^{n(n-1)/2}$$

Since the sequence $\{d_n(K_m)\}$ is decreasing both in n, m, we can exchange the limits:

$$d(K) = \lim_{n\to\infty} d_n(K) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} d_n(K_m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} d_n(K_m) = \lim_{m\to\infty} d(K_m).$$

c) We first prove it when A is a finite set of m points. In this case, if $C = \max_{z\in A} \operatorname{dist}(z, K)$, it is clear that

$$d_{n+m}(K \cup A)^{(n+m)(n+m-1)/2} \le C^m d_n(A)^{n(n-1)/2}$$

and so

$$d(K \cup A) = \lim_{n\to\infty} d_{n+m}(K \cup A) \le \lim_{n\to\infty} C^{\frac{m}{(n+m)(n+m-1)}} d_n(K)^{\frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}} = d(K).$$

If A is infinite and $\varepsilon > 0$, by part b), we can find some compact subset K' such that K' contains an open neighbourhood of K and $d(K') \leq d(K) + \varepsilon$. Then, $A \setminus K'$ is a finite set, so

$$d(K \cup A) \leq d(K' \cup A) \leq d(K') \leq d(K) + \varepsilon \,.$$

Since ε was arbitrary, we conclude that $d(K \cup A) \leq d(K)$. The other inequality is obvious.

d) It is enough to show that $d(K) \leq d(\partial K)$, since $\partial_e K$ is the bounadry of a compact set that contains K. For that, assume that $z_1, \ldots, z_n$ are such that

$$d_n(K)^{n(n-1)/2} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} |z_j - z_k|$$

This means that $(z_1, \ldots, z_n)$ is a maximum of the function f_n from (8). But since f_n is holomorphic, we can apply the maximum principle, on each variable separately, to show that the maximum of f_n is attained when $z_1, \ldots, z_n \in \partial K$

e) Let $z_1, \ldots, z_n \in K$, be such that

$$d_n(K)^{n(n-1)/2} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} |z_j - z_k| \,,$$

and let $p(z) = (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$. Then, for any j, one ontains that

$$\prod_{k \neq j} |z - z_k| \leq \prod_{k \neq j} |z_j - z_k| \,,$$

and after multiplying all these inequalities, we see that

$$|p(z)|^{n-1} = \prod_{k=1,\ldots,n} |z - z_k|^{n-1} \leq \prod_{\substack{1 \leq j,k \leq n \\ j \neq k}} |z_i - z_j| = d_n(K)^{n(n-1)} \,.$$

This proves that $m_n(K) \leq d_n(K)$. For the reverse inequality, we first prove that the limit

$$\lim_{n \to \infty} m_n(K)$$

exists. Let $\alpha = \liminf_{n \to \infty} m_n(K)$, and given $\varepsilon > 0$, let p be a polynomial of degree n such that $\|p\|_K \leq \alpha + \varepsilon$. Moreover, let $C = \max\{1, \|z\|_K, \ldots, \|z^{n-1}\|_K\}$. Then, for any $0 \leq l \leq n-1$ we have that

$$|p(z)^k z^l| \leq C(\alpha + \varepsilon)^{nk+l} \,.$$

Any $N > n$ can be uniquely written as $nk + l$ in such way, so $m_N(K) \leq C^1/N(\alpha + \varepsilon)$ and so, $\limsup_{n \to \infty} m_n(K) \leq \alpha + \varepsilon$. Since ε was aribtrary, the superior and inferior limits agree.

Note that if $d_n(K)$ is 0 then K is finite and there is nothing to prove. Otherwise, for any positive integer n and any $\varepsilon > 0$, let p be a monic polynomial of degree n such that $\|p\|_K - m_n(K) < \frac{\varepsilon}{(n+1)d_n(K)^{n(n-1)/2}}$. For $z_1, \ldots, z_{n+1} \in K$ we have that

$$\prod_{1 \leq j < k \leq n+1} (z_j - z_k) = V(z_1, \ldots, z_k) = \det \begin{pmatrix} p(z_1) & z_1^{n-1} & \ldots & z_1^0 \\ p(z_2) & z_2^{n-1} & \ldots & z_2^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(z_{n+1}) & z_{n+1}^{n-1} & \ldots & z_{n+1}^0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} p(z_i) V(z_1, \ldots, \widehat{z_i}, \ldots, z_n) \,,$$

so, taking absolute values, and the maximum over $z_1, \dots, z_{n+1} \in K$ we obtain that

$$d_{n+1}(K)^{n(n+1)/2} \leq (n+1)\|p\|_K d_n(K)^{n(n-1)/2} \leq (n+1)m_n(K)^n d_n(K)^{n(n-1)/2} + \varepsilon\,.$$

Since ε was arbitrary, we conclude that

$$d_{n+1}(K)^{n(n+1)/2} \leq (n+1)m_n(K)^n d_n(K)^{n(n-1)/2}\,, \tag{9}$$

and, by succesive applications of (9), that

$$d_{n+1}(K) \leq (n+1)!^{2/n(n+1)} m_n(K)^{2n/n(n+1)} \dots m_2(K)^{4/n(n+1)} m_1(K)^{2/n(n+1)}\,. \tag{10}$$

By taking logarithms and through a Cesaro sum argument one can easily show that, since $\lim_{n\to\infty} m_n(K) = m(K)$ exists, one also has that

$$\lim_{n\to\infty} m_n(K)^{2n/n(n+1)} \dots m_2(K)^{4/n(n+1)} m_1(K)^{2/n(n+1)} = m(K)$$

as well. Combining this with (10), one obtains the reverse inequality $d(K) \leq m(K)$ □

Let $\delta > 0$, $R \geq 1 > r$ and consider the following subsets of $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} A(\delta, R, r) &= \{Re^{i\varphi} : |\varphi - \pi| \geq \delta\} \cup \{\varrho e^{i\varphi} : \varphi = \pi \pm \delta\,,\ r \leq \varrho \leq R\} \\ B(\delta, r) &= \{re^{i\varphi} : |\varphi - \pi| \leq \delta\} \\ \Omega(\delta, R, r) &= A(\delta, R, r) \cup B(\delta, r) \end{aligned} \tag{11}$$

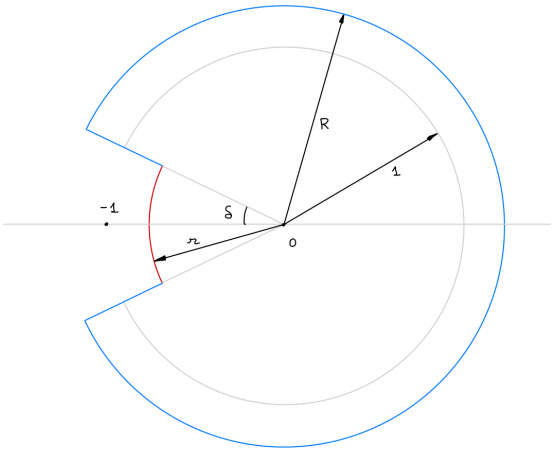

Figure 1: Image of the sets just defined. In red, B and in blue, A

Lemma 5 (Carlson)**.** *For any δ, r, transfinie diameter of $\Omega(\delta, 1, r)$ is less than* 1*.*

Proof. Consider the function $g(z) = \frac{1}{2(x+1/2)}$. It satisfies that $g(0) = 1$, and it is clear that there is some r_0 such that, if $1 > r \geq r_0$, $\|g\|_{A(\delta,1,r)} < 1$. Write $\|g\|_{A(\delta,1,r)} = 1 - 3c$. Since g is holomorphic outside of $z = -1/2$ and the complement of $A(\delta, 1, r) \cup \{0\}$ is

connected, we can apply Runge's approximation theorem, and there is a polynomial q of some degree m such that:

$$|q(0) - 1| \leq c\,,$$
$$\|q - g\|_{T(\delta,1,r)} \leq c\,.$$

Let $q_1(z) = z^m(q(1/z) - q(0) + 1)$. Then $q_1(z)$ is monic and for $z \in A(\delta, 1, r)$ we have that $|r(z)| \leq 1 - c$. Since $B(\delta, R)$ is a compact subset of points with $|z| < 1$, there is some n such that

$$\|z^n q_1(z)\|_{B(\delta,r)} \leq 1 - c\,.$$

Let $p(z) = z^n r(z)$ and $M = n + m$ its degree. Then $\|p\|_{\Omega(\delta,1,r)} \leq 1 - c$. Since the sequence $m_n(\Omega(\delta, 1, r))$ converges, we have that

$$d(\Omega(\delta, 1, r)) \leq \lim_{k\to\infty} \|p^k\|^{1/kM} \leq \lim_{k\to\infty} (1 - c)^{k/kM} = (1 - c)^{1/M} < 1\,.$$

On the other hand, for $r < r_0$ it is clear that $d(\Omega(\delta, 1, r)) \leq d(\Omega(\delta, 1, r_0))$ by b), d) in Theorem 4. □

5 The Theorems of Carlson and Fatou

Theorem 6 (Carlson)**.** *Let $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ be a power series such that:*

a) For any $r < 1$, $f(z)$ extends to an analytic function on $D(0, r)$ except for finitely many points in $D(0, r)$,

b) the function f admits an analytic extension to some neighbourhood of -1,

c) all the cofficients a_i are integers.

Then f is a rational function.

Proof. Let δ be such that f is holomorphic on the set

$$\{\varrho e^{i\varphi} : |\varphi - \pi| \leq \delta, 1 \leq \varrho \leq \varrho_0\}$$

Let $r_0 = 1/\varrho_0$. Then by b), d) in Theorem 4,

$$\lim_{R\to 1} d(\Omega(\delta, R, r_0)) = d(\Omega(\delta, 1, r_0)) < 1$$

so there is some $R_0 > 1$ with $d(\Omega(\delta, R, r)) < 1$. By assumption, the singularities of f in $D(0, 1/R_0)$ are at finitely many points $w_1, \ldots, w_k \in D(0, 1/R_0)$. Let $D_1, \ldots, D_k$ be small disks around the w_i^{-1} that are disjoint from each other, disjoint from $\Omega(\delta, R_0, r_0)$ and such that

$$d(\Omega(\delta, R_0, r_0) \cup \partial D_1 \cup \ldots \cup \partial D_k) < 1$$

This can be done, again, because $d(\Omega(\delta, R_0, r_0) \cup \{w_1^{-1}, \ldots, w_k^{-1}\}) < 1$ by c) in Theorem 4. Consider the path

$$\Gamma = (\Omega(\delta, R_0, r_0) \cup \partial D_1 \cup \ldots \cup \partial D_k)^{-1}\,.$$

By construction, Γ computes the expansions of f at 0, so by Theorem 3, f is rational. □

Theorem 7 (Fatou)**.** *Let $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n + \ldots$ be the expansion at 0 of a rational function. If all the a_i are integers and f has convergence radius 1 then all the poles of f are roots of unity.*

Proof. Write $f(z) = P(z)/Q(z)$, where $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ are coprime over $\mathbb{Q}$ and if $Q(z) = c_0 + \ldots + c_r z^r$, $\gcd(c_0, \ldots, c_r) = 1$. The greatest common divisor of the coefficients of Q is 1. We can write

$$PP_1 + QQ_1 = N$$

for some $P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}[x]$ and $N \in \mathbb{Z}$, and so

$$\frac{N}{Q(z)} = P_1(z)f(z) + Q_1(z) = b_0 + b_1 z + \ldots . \tag{12}$$

with $b_i \in \mathbb{Z}$. Since $N = c_0 b_0$, we can assume that the greatest common divisor of all the b_i is 1, and otherwise divide (12) until it is the case. Assume that p divides c_0, and let b_n be such that p divides $b_0, \ldots, b_{n-1}$ but not b_n. If we look at (12) modulo p we obtain the following system of equations:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv c_0 b_n \,, \\
0 &\equiv c_1 b_n + c_0 b_{n+1} \,, \\
&\ldots \\
0 &\equiv c_r b_n + c_{r-1} b_{n+1} \ldots + c_0 b_{n+r} \,.
\end{aligned}$$

From this it follows recursively that $c_1 \equiv \ldots \equiv c_r \equiv 0$, contradicting the hypothesis that the c_i are coprime. Therefore $c_0 = 1$. Let $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ be the roots of $Q(z)$. Since

$$\left|\frac{1}{c_r}\right| = \left|\frac{c_0}{c_r}\right| = |\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_r| \geq 1 \,,$$

the only possibility is that $c_r = \pm 1$ and all the λ_i have absolute value 1. We can assume that $c_r = 1$. Let M be the companion matrix of Q:

$$M = \begin{pmatrix}
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
-c_0 & -c_1 & \ldots & -c_{r-2} & -c_{r-1}
\end{pmatrix},$$

so that $M = UDU^{-1}$ with $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. If $|A| = \operatorname{tr}(AA^\dagger)$ then it is clear that, since all the λ_i have absolute value 1, $|M^n| = |UD^n U^{-1}| = |M|$ for all n, and the set $\{M^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ is bounded and therefore finite. In particular, there is some n such that $M^m = 1$, and so $D^m = 1$. □

6 The orginial proof by Carlson

The original proof by Carlson uses similar ideas to the ones explained before, but since the transfinite diameter had not been introduced then, the whole proof is more messy and technical.

Instead of Kronecker's Theorem 1, he uses the following remark by Borel: given a power series

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots ,$$

consider the numbers

$$A_p^{(q)} = \begin{vmatrix} a_q & \ldots & a_{q+p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q+p-1} & \ldots & a_{q+2p-2} \end{vmatrix}$$

Since all the minors of H_∞ of size p have are of the above form, H_∞ has finite rank (which is clearly equivalent to the rationality of f) if and only if $A_p^{(q)} = 0$ for all sufficiently high p. As remarked in Carlson's paper, the relations

$$\Delta_p^{(q-1)}\Delta_{p+2}^{(q-1)} - \Delta_p^{(q)}\Delta_{p+2}^{(q-2)} = \left(\Delta_{p+1}^{(q-1)}\right)^2$$

imply that it is enough to show that $\Delta_p^{(p)} = \Delta_p^{(p+1)}$ for all p sufficiently large. We illustrate Carlson's original proof in the case where there are no poles inside the unit circle.

Let T be the union of the arc $re^{i\varphi}$, $|\varphi - \pi| \geq \delta$ and the segments $\varrho e^{i(-\pi\pm\delta)}$, $r \leq \varrho \leq 1$, and S be the arc $Re^{i\varphi}$, $|\varphi - \pi| \leq \delta$ (Note that these are inverses of the paths A, B defined in (11)). Let Q be a polynomial with $Q(0) = 1$ and such that $\|Q\|_T = \mu_2(r, R) < 1$, which exists by Lemma 5. Let $\mu_1(R) = \|Q\|_S > 1$. If $l = \deg(Q)$ and $m \geq 0$ is arbitrary, define numbers $\gamma_i^{(m)}, b_n^{(m)}$ by the rules

$$Q(z)^m = 1 + \sum_{i=1}^{ml} \gamma_i^{(m)} z^i ,$$

$$f(z)Q(z)^m = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(m)} z^n$$

for some $\gamma_i^{(m)}$. By Cauchy's Theorem we have that

$$|b_n^{(m)}| \leq M \left(\frac{\mu_1(R)^m}{R^n} + \frac{\mu_2(r,R)^m}{r^n} \right)$$

for some constant M. Since $b_n^{(m)} = a_n + \gamma_1 a_{n-1} + \ldots + \gamma_{ml}^{(m)} a_{n-ml}$, then whenever $p+q-ml \geq p$, the last $(p-q)$ columns of the matrix defining $\Delta_p^{(p)}$ can be exhchanged by $b_i^{(m)}$:

$$\Delta_p^{(p)} = \begin{vmatrix} a_p & \ldots & a_{p+q-1} & b_{p+q}^{(m)} & \ldots & b_{2p-1}^{(m)} \\ a_{p+1} & \ldots & a_{p+q} & b_{p+q+1}^{(m)} & \ldots & b_{2p}^{(m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2p-1} & \ldots & a_{2p+q-1} & b_{2p+q}^{(m)} & \ldots & b_{3p-2}^{(m)} \end{vmatrix}$$

For p large enough, $|a_n| < 2^n$ for all $n \geq p$ because f converges on the unit disk, and so

$$|\Delta_p^{(p)}| \leq p! 2^{pq} M^{p-q} \left(\frac{\mu_1(R)^m}{R^n} + \frac{\mu_2(r,R)^m}{r^n} \right)^{p-q} \tag{13}$$

Then, Carlson explains how one can choose m, q and r so that, from the bound (13) one obtains

$$\limsup_{p\to\infty} |\Delta_p^{(p)}|^{1/p^2} < 1 ,$$

which shows that, since the a_i are integers, eventually $\Delta_p^{(p)} = 0$, and the same argument works for $\Delta_p^{(p+1)}$.

References

[1] E. Borel. Sur une application d'un théorème de m. hadamard. *Bulletin des Sciences Math.*, 18(2):22–25, 1894.

[2] F. Carlson. Über potenzreihen mit ganzzahligen koeffizienten. *Mathematische Zeitschrift*, 9(1):1–13, 1921.

[3] P. Fatou. Sur les séries entières à coefficients entiers. *Comptes Rendus, Paris*, 138(1):342–344, 1904.

[4] M. Fekete. Über die verteilung der wurzeln bei gewissen algebraischen gleichungen mit ganzzahligen koeffizienten. *Mathematische Zeitschrift*, 17(1):228–249, 1923.

[5] L. Kronecker. Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen. *Berl. Monatsber.*, 1881:535–600, 1881.

[6] G. Pólya. Über potenzreihen mit ganzzahligen koeffizienten. *Mathematische Annalen*, 77(4):497–513, 1916.

[7] G. Pólya. Sur les séries entières à coefficients entiers. *Journal of the London Mathematica Society*, pages 22–38, 1923.

[8] G. Pólya. Über gewisse notwendige determinantenkriterien für die fortsetzbarkeit einer potenzreihe. *Mathematische Annalen*, 99:687–706, 1928.

Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten

Von Fritz Carlson in Upsala

The well-known theorem of Eisenstein[1] about the power series expansion of an algebraic function may be considered the first general example of the connection between the arithmetic properties of the coefficients and the analytic nature of the function defined by the series. A complement to this theorem was given by Mr. Fatou[2], when he showed that a power series in x with integer coefficients can represent an algebraic but non-rational function only if it possesses a branch point within the unit circle $|x| < 1$. That the branch point lying closest to the origin can, however, move arbitrarily near to the unit circle is shown by the function

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x^m}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{mn},$$

where the positive integer m may be chosen arbitrarily. Accordingly, Fatou's theorem admits no sharpening in the direction that the unit circle could be replaced by a smaller circle. On the other hand, one could drop the condition that the function should be algebraic, and in general consider those non-rational functions which possess only finitely many singularities within the unit circle. If, in order to orient oneself concerning this question, one seeks out those such functions whose behavior for $|x| \leq 1$ is already known, it turns out that they either have a branch point within the unit circle, or also that they cannot be continued beyond this circle[3].

Mr. Fatou emphasizes those power series convergent in the unit circle which one encounters in the theory of elliptic functions and in applications of analysis to number theory. With these series it is the case that they are either not continuable beyond the unit circle, or else their behavior on this circle is up to now unknown[4].

[1] Eisenstein, Monatshefte d. Akad. d. Wiss. zu Berlin, July 1852, p. 441 – Heine, Crelle's Journal, 45 (1853), p. 285–302; Crelle's Journal, 48 (1854), p. 267–257; Handbuch d. Kugelfunktionen, I (1878), p. 50–53. – Hermite, London Math. Society, Proceedings, VII (1876), p. 173–175; Cours (lithographié) de la Faculté des Sciences de Paris, edited by M. Andoyer (Paris 1891), p. 195–196.

[2] Fatou, *Sur les séries entières à coefficients entiers*, C. R. Paris, 138 (1904,1), pp. 342–344.

[3] In the work of Mr. Pólya cited under [5], one will find noted some examples on pp. 509–510.

[4] Indeed, there is no difficulty in giving examples of the latter category. For conditions have indeed been established for when the circle of convergence is a singular line, but these conditions can only be applied in very special cases, and in general it will then be immaterial whether the coefficients are integers or not. Mr. Fatou mentions (loc. cit.) the series (where p runs through the prime numbers)

$$x^2 + x^3 + x^5 + \ldots = \sum_p x^p.$$

By means of number-theoretical considerations Mr. Fatou proved that this series cannot be continued beyond

Through Mr. Fatou's remarks, as also emphasized by Mr. Pólya[5], the question is suggested whether there actually exist such continuable series which do not represent rational functions. A contribution to the answering of this question was recently given by Mr. Hausdorff[6], when he showed that there exist only countably many power series with integer coefficients, convergent in the unit circle, which can be continued beyond this circle.

According to what has been stated above, it would not be unfounded to raise the question whether the non-rational functions represented by a power series with integer coefficients, which possess only finitely many singularities within the unit circle, either have a branch point within this circle, or else are not continuable beyond it.

If one bases the consideration on a circle with radius > 1, then the question has already been answered through the investigations of Messrs. Borel[7] and Pólya [5]. A function meromorphic in such a circle, whose expansion about $x = 0$ has integer coefficients, must be a rational function. This theorem proved by Mr. Borel was generalized by Mr. Pólya to the effect that it still remains valid if one assumes that the function is single-valued in the mentioned circle and there has only finitely many singularities.

I will now show in the following that the above-raised question is to be answered in the affirmative, by proving the theorem:

If the non-rational function $f(x)$ has within the unit circle only finitely many singularities and in the neighborhood of $x = 0$ can be represented by a power series

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

with integer coefficients, then the function $f(x)$ must either have a branch point within the unit circle, or it cannot be continued beyond this circle.

Now Mr. Fatou has proved[8], that every rational function which can be represented by a power series with integer coefficients convergent in the unit circle must be of the form

$$\frac{P(x)}{(1 - x^p)^q}$$

where $P(x)$ is a polynomial and p, q are integers. Accordingly, one obtains in particular for the series regular in the unit circle:

---

the circle of convergence. To this I would like to remark that this fact in essence has nothing to do with the coefficients being integers. For the same holds for any series

$$\sum_p a_p x^p,$$

no matter how the coefficients a_p are chosen. Indeed, the number of nonzero coefficients whose indices $\leq n$ is always $\leq \pi(n)$ and thus of the form $n \cdot \varepsilon(n)$, where $\lim \varepsilon(n) = 0$. One then has only to apply the following theorem:

If, for each n, the number of nonzero coefficients of a power series whose indices $\leq n$ is equal to $n \cdot \varepsilon(n)$, then the series cannot be continued beyond its circle of convergence.

[5]Pólya, *Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Math. Ann., 77 (1916), pp. 497–513.

[6]Hausdorff, *Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen*, *Diese Zeitschrift*, 4 (1919), pp. 98–103.

[7]Borel, *Sur une application d'un théorème de M. Hadamard*, Bull. Sciences Math., 2ème Série, XVIII (1894), pp. 22–25.

[8]See [2] or also Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Math., 30 (1906), pp. 368–371

The function represented by a power series with integer coefficients, convergent in the unit circle, is either a rational function or it is not continuable beyond the unit circle. In the former case it must be of the form

$$\frac{P(x)}{(1-x^p)^q}\,.$$

§1

The condition for a power series

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

to represent a rational function was formulated by Mr. Borel [7] as follows. If one sets

$$\Delta_p^{(q)} = \begin{vmatrix} a_p & a_{p+1} & \ldots & a_{p+q-1} \\ a_{p+1} & a_{p+2} & \ldots & a_{p+q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p+q-1} & a_{p+q} & \ldots & a_{p+2q-2} \end{vmatrix},$$

then it is necessary and sufficient that there exists a q such that

$$\Delta_p^{(q)} = 0 \quad \text{for } p > p_0.$$

This occurs, as one finds using the relation

$$\Delta_p^{(q-1)}\Delta_{p+2}^{(q-1)} - \Delta_p^{(q)}\Delta_{p+2}^{(q-2)} = \left(\Delta_{p+1}^{(q-1)}\right)^2 {}^5,$$

among other cases, when

$$\Delta_p^{(p)} = \Delta_p^{(p+1)} = 0 \quad \text{for } p > p_0\,. \tag{2}$$

Now if the a_n are integers, or more generally if $a_n\varepsilon^n$, where

$$|\varepsilon| = 1\,,$$

are integers, then $|\Delta_p^{(q)}|$ are nonnegative rational integers, and from the inequalities

$$|\Delta_p^{(p)}| < 1, \quad |\Delta_p^{(p+1)}| < 1 \quad \text{for } p > p_0 \tag{3}$$

there then follow (2). Now, in order to obtain (3), in $\Delta_p^{(q)}$ certain columns are replaced by linear combinations with the preceding ones, so that an element a_n is replaced by

$$b_n = a_n + \gamma_1 a_{n-1} + \gamma_2 a_{n-2} + \ldots + \gamma_v a_{n-v} \quad (n - v \geq p).$$

One can evidently interpret this in such a way that in the formation of $\Delta_p^{(q)}$ instead of $f(x)$ the series

$$P(x)f(x) = \sum b_n x^n$$

is taken as the basis. That this procedure, applied by Mr. Borel and later also by Mr. Pólya, leads to the goal, depends entirely on the choice of the polynomial $P(x)$. The point is to choose $P(x)$ so that for b_n one obtains an upper bound sufficiently small to lead to the inequalities (3) by a direct estimation of the determinants. In the case considered by Mr. Borel one can simply set

$$P(x) = \prod_{i=1}^{v} \left(1 - \frac{x}{e_i}\right)^m ,$$

when $e_1, e_2, \ldots, e_v$ are the poles of $f(x)$ for $|x| \leq 1$. For if the positive integer m is sufficiently large, then $P(x)f(x)$ is regular for $|x| \leq 1$, and then for sufficiently large n the b_n satisfy an inequality

$$|b_n| < \delta^n, \quad \delta < 1 ,$$

which suffices to secure the inequalities (3). In the case considered by Mr. Pólya, however, $P(x)$ cannot be chosen so that $P(x)f(x)$ becomes regular for $|x| \leq 1$, i.e. one cannot with a *fixed* $P(x)$ achieve that the inequalities $|b_n| < \delta^n$ with some $\delta < 1$ are satisfied for *all* sufficiently large n. This is also not necessary, for $P(x)$ need only be fixed for the elements of one and the same column, and therefore it becomes possible to choose m in the above polynomial so that for the elements of a sufficiently large number of columns in $\Delta_p^{(p)}$ and $\Delta_p^{(p+1)}$ an inequality of the indicated type is obtained. In the case, however, where, for example, the function $f(x)$ is assumed regular in $|x| < 1$, but with respect to its behavior on $|x| = 1$ nothing is assumed, then the choice of $P(x)$ must be made from other points of view. One is then led to the search for the polynomials denoted in §2 by $P_\delta(x)$.

Since, when $a_n\varepsilon^n$ are integers, the equalities (2) follow from the inequalities (3), the asserted theorem will be proved simultaneously with the following:

If the series (1) *represents a function that is single-valued within the unit circle, that there has only finitely many singularities, and that is still regular at* $x = 0$ *and* $x = -1$*, then*

$$\limsup_{p\to\infty} |\Delta_p^{(q)}|^{\frac{1}{p^2}} < 1 \tag{a}$$

for $q = p, p + 1$.

The task of the following paragraphs is therefore to demonstrate the validity of (a) under the stated assumptions.

§2

Let $P(x)$ be an arbitrary polynomial of degree n

$$P(x) = 1 + g_1x + g_2x^2 + \ldots + g_nx^n, \quad n > 0$$

with $P(0) = 1$. If we consider its values on the unit circle $|x| = 1$, then there are always points where $|P(x)| > 1$. If the degree n is kept fixed, then the sum of those arcs where $|P(x)| < 1$ has an upper bound Θ_n. It holds that

$$\Theta_1 \leq \Theta_2 \leq \Theta_3 \leq \ldots ,$$

so that $\lim \Theta_n$ exists. If one seeks to determine the value of Θ_n for general n, it is natural to consider the curve $|P(x)| = 1$ and to determine its intersection points with the unit circle. For $n = 1$ the curve $|P(x)| = 1$ is the circle

$$\left| \frac{1}{g_1} + x \right| = \frac{1}{|g_1|},$$

and since this always passes through the origin, it encloses from the unit circle an arc which is always less than π, but which can be brought arbitrarily close to π if $|g_1|$ is chosen sufficiently small. Thus $\Theta_1 = \pi$. For $n = 2$ the curve $|P(x)| = 1$ is a Cassini oval, and it follows that $\Theta_2 = \frac{4\pi}{3}$. For larger values of n the corresponding considerations become complicated, and I therefore take another approach, in order to show that *the sequence* Θ_n *has the limit value* 2π. One is thus to prove the existence of polynomials $P(x)$ with $P(0) = 1$ for which the sum of the arcs in question deviates only little from 2π. For the applications in what follows the degree of $P(x)$ is immaterial; what is of essential importance, however, is that $P(x)$ can be chosen so that the arcs in question are connected. I will therefore show:

Let $\delta > 0$ be arbitrary. Then there exists a polynomial $P_\delta(x)$ with the following properties:

$$\begin{gathered} P_\delta(0) = 1, \\ |P_\delta(e^{i\varphi})| < 1 \quad \text{for } -\pi + \delta \le \varphi \le \pi - \delta. \end{gathered} \tag{4}$$

Proof: It holds that

$$|1 + 2x| = 2\left|\tfrac{1}{2} + x\right| > 1$$

at every point of the unit circle with the exception of $x = -1$, and thus, if one sets

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + 2x},$$

then $|\varphi(x)| < 1$ on the entire unit circle $|x| = 1$ with the exception of $x = -1$. Moreover, we can write

$$|\varphi(x)| \le 1 - \sigma, \quad \sigma > 0$$

for

$$x = e^{i\varphi}, \quad |\varphi| \le \pi - \delta \tag{5}$$

if one sets

$$\left| \frac{1}{1 - 2e^{i\delta}} \right| = 1 - \sigma.$$

If we cut the x-plane along the negative real axis from $-\frac{1}{2}$ to $-\infty$, then $\varphi(x)$ can be expanded into a series of polynomials,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\,,$$

which converges uniformly in every finite region whose boundary does not contain a point of the boundary of the just-constructed "star." Let G be such a domain, containing $x = 0$ and

the arc (5) in its interior. Then, for every $\varepsilon > 0$, we can choose N so that

$$\left| \varphi(x) - \sum_{n=0}^{N} p_n(x) \right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

for all points of G. Let us assume

$$0 < \varepsilon < \sigma$$

and write

$$\sum_{n=0}^{N} p_n(x) = R(x),$$
$$P_\delta(x) = R(x) - R(0) + 1\,,$$

then $P_\delta(0) = 1$, and for all points of the arc (5),

$$\begin{aligned} |P_\delta(x)| &\le |R(x)| + |R(0) - 1| \\ &< 1 - \sigma + \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= 1 - \sigma + \varepsilon < 1\,. \end{aligned}$$

Thus P_δ has the properties required in (4).

The polynomial under consideration can furthermore be required to vanish at prescribed points. For if

$$x = e_k \quad (k = 1, 2, \ldots, v)$$

are these points, which are of course all different from 0, then one forms the polynomial

$$Q_\delta(x) = (P_\delta(x))^g \prod_{k=1}^{v} \left(1 - \frac{x}{e_k}\right)\,.$$

Let m be the maximum of $|P_\delta(x)|$ on the arc (5), and M the maximum of

$$\prod_{k=1}^{v} \left| 1 - \frac{x}{e_k} \right|$$

on the same arc. Since $m < 1$, the positive integer g can be chosen so large that

$$m^g M < 1$$

and consequently

$$|Q_\delta(x)| < 1$$

on the arc (5). Clearly $Q_\delta(0) = 1$.

Let $Q_\delta(x)$ be such a polynomial, fixed once and for all. Then r_0, R_0

$$r_0 < 1, \quad R_0 > 1$$

can be determined so that

$$|Q_\delta(x)| < 1$$

in the region

$$x = \varrho e^{i\varphi}, \quad r_0 \le \varrho \le R_0, \quad |\varphi| \le \pi - \delta\,.$$

Let the maximum of $|Q_\delta(x)|$ in this region be $\mu_2(r_0, R_0)$, so that

$$\mu_2(r_0, R_0) < 1$$

for $r_0 \le \varrho \le R \le R_0$. The maximum of $|Q_\delta(x)|$ on the arc

$$x = Re^{i\varphi}, \quad |\varphi| \ge \pi - \delta$$

shall be $\mu_1(R)$; then

$$\mu_1(R) > 1$$

for $1 \le R \le R_0$, and the quantity

$$\alpha_0(R) = \frac{\log R}{\log \mu_1(R)} \tag{6}$$

is consequently > 0 for $1 < R \le R_0$, and

$$\lim_{R\to 1} \alpha_0(R) = 0\,. \tag{7}$$

We prove the following, which we wish to designate by **(A)**:

(A) *For every R in the interval*

$$1 < R \le R_0 \tag{8}$$

one can determine an α in the interval

$$0 < \alpha \le \alpha_0 \tag{9}$$

and an r in the interval

$$r_0 \le r < 1 \tag{10}$$

such that

$$\mu_2(r, R) < \left(\frac{r^3}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \mu_1(R)\,. \tag{11}$$

Indeed, if $\alpha < \alpha_0$, but chosen sufficiently close to α_0, then

$$\frac{\mu_1(R)}{R^{\frac{1}{\alpha}}}$$

can be made arbitrarily close to 1 and in particular can be made $> \mu_2(r_0, R_0)$. Then one can determine an $r < 1$ such that the right-hand side of (11) also becomes $> \mu_2(r_0, R_0)$. For this r, (11) is certainly satisfied. The quantity

$$h = \frac{\mu_1(R)^\alpha}{R} \tag{12}$$

is always < 1, when R and α lie in (8) and (9) respectively.

From the power series

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

it is assumed: it represents a single-valued function in the unit circle, which has there the only singularities

$$\begin{aligned} x &= e_k \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, v) \\ 0 < |e_1| \leq &|e_2| \leq \ldots \leq |e_v| < 1 \end{aligned}$$

and which is still regular at the point $x = -1$. From this it follows first that the series converges for $|x| < |e_1|$, so that the inequality

$$|a_n| < \left|\frac{2}{e_1}\right|^n \tag{13}$$

holds for sufficiently large n, furthermore that the numbers R^*, δ

$$R^* > 1, \quad \delta > 0$$

can be determined so that $f(x)$ is regular in the region

$$x = \varrho e^{i\varphi}, \quad 1 \leq \varrho \leq R^*, \quad |\varphi| \geq \pi - \delta$$

[9].

With the e_k and δ introduced here a polynomial $Q_\delta(x)$ is now formed. Let l be the degree of $Q_\delta(x)$. Then the quantities R_0, r_0 considered in are chosen so that

$$\begin{aligned} &1 < R_0 \leq R^*, \quad |e_v| < r_0 < 1, \\ &4l\alpha_0(R) < 1 \quad \text{for } 1 < R \leq R_0 \end{aligned} \tag{14}$$

and so that the conditions imposed in on these numbers are fulfilled. This is possible.

If the arc

$$x = Re^{i\varphi}, \quad |\varphi| \geq \pi - \delta$$

is denoted by S, and the path formed by the arc

$$x = re^{i\varphi}, \quad |\varphi| \leq \pi - \delta$$

and the straight segments

$$x = \varrho e^{+i(\pi-\delta)}, \quad r \leq \varrho \leq R$$

is denoted by T, then for all R, α, r chosen according to 1, $f(x)$ is regular on $S + T$ and at the same time (11) is satisfied.

This determination of the quantities R, α, r will be maintained in the following.

[9]The arguments are always to be chosen in the interval $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Let now C be the maximum of

$$\left| \frac{Q_\delta(x)}{x - e_k} \right| \quad (k = 1, 2, \ldots, v)$$

in the unit circle, and e_0 the smallest distance between two points e_k. Then the positive quantity η is chosen so that

$$\begin{gathered} \eta \leq \frac{e_0}{2}, \quad \eta < \frac{|e_1|}{2}, \quad \eta < r_0 - |e_v|, \\ \eta < \frac{\mu_1(R)}{2C} \left| \frac{e_1^3}{8R} \right|^{1/\alpha} . \end{gathered} \tag{15}$$

Around e_k as center we draw a circle c_k with radius η and denote by M the maximum of $f(x)$ on $S + T$, and by K the maximum of $|f(x)|$ on $c_1 + c_2 + \ldots + c_v$. Then we can write

$$\begin{aligned} (Q_\delta(x))^m f(x) &= \sum_0^\infty b_n^{(m)} x^n \,, \\ (Q_\delta(x))^m &= 1 + \gamma_1^{(m)} x + \gamma_2^{(m)} x^2 + \ldots + \gamma_{ml}^{(m)} x^{ml} \,, \\ b_n^{(m)} &= a_n + \gamma_1^{(m)} a_{n-1} + \gamma_2^{(m)} a_{n-2} + \ldots + \gamma_{ml}^{(m)} a_{n-ml}, \\ b_n^{(m)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_S + \frac{1}{2\pi i} \int_T + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{v} \int_{c_k} f(x)(Q_\delta(x))^m \frac{dx}{x^{n+1}} \,, \end{aligned}$$

when m is a positive integer and a_n is set $= 0$ for $n < 0$, and obtain

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_S f(x)(Q_\delta(x))^m \frac{dx}{x^{n+1}} \right| &< M \cdot \frac{\mu_1(R)^m}{R^n} \,, \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_T f(x)(Q_\delta(x))^m \frac{dx}{x^{n+1}} \right| &< 2M \cdot \frac{\mu_2(r, R)^m}{r^n} \,, \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} f(x)(Q_\delta(x))^m \frac{dx}{x^{n+1}} \right| &< K \cdot \frac{C^m \eta^m}{\left| \frac{e_1}{2} \right|^n} \,, \end{aligned}$$

From now on we assume

$$m = [\alpha s] + 1, \quad s \leq n \leq 3s \,, \tag{16}$$

where s is a certain integer. Then

$$M \cdot \frac{\mu_1^m}{R^n} < M\mu_1 \cdot \mu_1^{\alpha s} R^s = M\mu_1 \cdot h^s \,.$$

According to (11) it holds that

$$M \cdot \frac{\mu_2^m}{r^n} < M \cdot \frac{\mu_2^{\alpha s}}{r^{3s}} = M \left(\frac{\mu_2^\alpha}{r^3} \right)^s < Mh^s \,.$$

[10] One can assume that $R_0 < 2r_0$.

Because, according to (15),

$$K\frac{C^m\eta^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^n} < K\cdot\frac{C^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^{3s}}\cdot\frac{\mu_1^m\left|\frac{e_1}{2}\right|^{\frac{3m}{\alpha}}}{2^m C^m R^{\frac{m}{\alpha}}}$$
$$< \frac{K\mu_1}{2^m}\cdot h^s\,,$$

the inequality

$$v\cdot K\frac{C^m\eta^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^n} < M\mu_1 h^s$$

certainly holds for sufficiently large m, thus for $m > m^{(0)}$. We can therefore assert:
(B) *If R, α, r are stipulated as in* (1) *and $m > m^{(0)}$ is chosen, then for all m, n satisfying* (16)*, the inequality holds*

$$|\,b_n^{(m)}| < N\left(\frac{\mu_1(R)^\alpha}{R}\right)^s = Nh^s \quad (N = 4M\mu_1(R))\,. \tag{17}$$

§4

With the coefficients a_n of the power series considered in **??**, the determinant $\Delta_p^{(p)}$ is formed,

$$\Delta_p^{(p)} = \begin{vmatrix} a_p & a_{p+1} & \dots & a_{2p-1} \\ a_{p+1} & a_{p+2} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2p-1} & a_{2p} & \dots & a_{3p-2} \end{vmatrix}.$$

Since $\gamma_0^{(m)} = 1$, we can replace the elements a_n of one column in $\Delta_p^{(p)}$ by $b_n^{(m)}$. It is only required that m has the same value for all elements of the column under consideration, and furthermore it must hold that

$$n - ml \geq p \tag{18}$$

when a_n is the element in the first row. We carry out this substitution in the following way. If we set

$$\chi = \frac{\alpha l}{1-\alpha l}, \tag{19}$$

then because of (14)

$$0 < \chi < 1,$$

and

$$q = \left\lfloor \chi p + \frac{\chi}{\alpha}\right\rfloor + 1 \tag{20}$$

is certainly $< p$, when p is sufficiently large. The integer s, which was introduced in (16), is then determined by

$$s = p + q. \tag{21}$$

If we consider the elements a_n which occur in the last $p-1$ columns of $\Delta_p^{(p)}$, then for these it always holds that

$$s \leq n < 3s,$$

and if in particular a_n is the element in the first row and the $(q+1)$-th column, then n has the value $p+q$, so that

$$\begin{aligned} n - ml &= p + q - l(\alpha[p+q] + 1) \\ &> p + q - l\alpha(p+q) - 1 \\ &= p + q(1 - \alpha l) - p\alpha l - l \\ &> p\,. \end{aligned}$$

For the elements a_n of the last $(p-q)$ columns the conditions (16) and (18) are therefore satisfied, and hence they can be replaced by $b_n^{(m)}$. According to (2), inequality (17) is then also satisfied.

The quantity R is, however, arbitrary in the interval $1 < R \leq R_0$, and it is therefore at our disposal to assign R different values. We shall denote these by $R_1, R_2, \ldots$ and the corresponding quantities α, χ, q, s, etc. in a consistent manner. First, an R_1 is chosen, and $b_n^{(m)}$ is introduced in the $(p-q_1)$ last columns, as has just been established. The $b_n^{(m)}$ of these columns satisfy, for $m > m_1^{(0)}$,

$$|\, b_n^{(m)}| < N_1 h_1^{p+q_1}\,. \tag{22}$$

If we set

$$d = \left|\, \frac{2}{e_1} \,\right|, \tag{23}$$

then, according to (19), a β can be determined such that

$$d^{(2+\chi_1)\chi_1} h_1^{1-\chi_1^2} < 1$$

for $0 < \alpha \leq \beta$. According to (7) it is then possible to choose an R_2 such that

$$1 < R_2 \leq R_0, \quad \alpha_0(R_2) \leq \beta,$$

so that consequently

$$d^{(2+\chi_2)\chi_2} h_1^{1-\chi_1^2} < 1\,. \tag{24}$$

By determining m and q always according to (16), (20) and (21), we introduce, with $\alpha = \alpha_2$, the quantities $b_n^{(m)}$ into the columns with the order numbers λ

$$q_2 < \lambda \leq q_1.$$

For these $b_n^{(m)}$, (17) always holds, so that

$$|\, b_n^{(m)}| < N_2 h_2^{p+q_2},$$

or, what suffices for our purpose,

$$|\, b_n^{(m)}| < N_2 \quad (m > m_2^{(0)})\,. \tag{25}$$

The elements a_n of the first q_2 columns we leave unchanged. They always satisfy, because of (23) and (13), for sufficiently large n,

$$|\,a_n| < d^n,$$

and hence also

$$|\,a_n| < d^{2p+q_2-2}\,. \tag{26}$$

Now $\Delta_p^{(p)}$ is expanded; one obtains $p!$ terms, and for each term an upper bound results from the product of $(p-q_1)$ factors (22), (q_1-q_2) factors (25), and q_2 factors (26). This yields

$$\limsup_{p\to\infty} |\Delta_p^{(p)}|^{\frac{1}{p^2}} < d^{(2+\chi_2)\chi_2} h_1^{1-\chi_1^2}\,,$$

therefore, according to (24),

$$\limsup_{p\to\infty} |\Delta_p^{(p)}|^{\frac{1}{p^2}} < 1\,.$$

In a similar way,

$$\limsup_{p\to\infty} |\Delta_p^{(p+1)}|^{\frac{1}{p^2}} < 1\,.$$

is proved. With this, the correctness of (a), p. 5, under the assumptions stated there, is established.

Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Von

Fritz Carlson in Upsala.

Der bekannte Eisensteinsche[1]) Satz über die Potenzreihenentwicklung einer algebraischen Funktion dürfte das erste allgemeinere Beispiel sein von dem Zusammenhange zwischen den arithmetischen Eigenschaften der Koeffizienten und der analytischen Natur der durch die Reihe definierten Funktion. Ein Komplement zu diesem Satze wurde von Herrn Fatou[2]) geliefert, indem er zeigte, daß eine Potenzreihe in x mit ganzzahligen Koeffizienten nur dann eine algebraische und nicht rationale Funktion darstellen kann, wenn diese innerhalb des Einheitskreises $|x|<1$ einen Windungspunkt besitzt. Daß der dem Nullpunkte am nächsten liegende Windungspunkt übrigens beliebig nahe an den Einheitskreis rücken kann, zeigt die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x^m}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^{mn},$$

wo die ganze positive Zahl m beliebig gewählt werden kann. Demnach läßt der Fatousche Satz keine Verschärfung in der Richtung zu, daß der Einheitskreis durch einen kleineren Kreis ersetzt werden könnte. Dagegen könnte man die Bedingung weglassen, daß die Funktion algebraisch sein soll, und überhaupt diejenigen nicht rationalen Funktionen betrachten, die innerhalb des Einheitskreises nur endlich viele Singularitäten aufweisen.

[1]) Eisenstein, Monatshefte d. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Juli 1852, S. 441. — Heine, Crelles Journal, **45** (1853), S. 285–302; Crelles Journal, **48** (1854), S. 267–275; Handbuch d. Kugelfunktionen, **I** (1878), S. 50–53. — Hermite, London Math. Society, Proceedings, **VII** (1876), S. 173–175; Cours (lithographié) de la Faculté des Sciences de Paris, rédigé par M. Andoyer (Paris 1891), S. 195–196.

[2]) Fatou, Sur les séries entières à coefficients entiers, C. R. Paris, **138** (1904, 1), S. 342–344.

Wenn man, um sich über diese Frage zu orientieren, diejenigen derartigen Funktionen aufsucht, deren Verhalten für $|x| \leqq 1$ schon bekannt ist, so zeigt sich, daß sie entweder innerhalb des Einheitskreises einen Verzweigungspunkt haben, oder auch daß sie über diesen Kreis hinaus nicht fortgesetzt werden können[3]). Herr Fatou hebt die im Einheitskreise konvergenten Potenzreihen hervor, denen man in der Theorie der elliptischen Funktionen und in Anwendungen der Analysis auf die Zahlentheorie begegnet. Mit diesen Reihen verhält es sich so, daß sie entweder über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar sind, oder auch ist ihr Verhalten auf diesem Kreise bisher unbekannt[4]). Durch die Bemerkungen des Herrn Fatou ist, wie auch von Herrn Pólya[5]) hervorgehoben wurde, die Frage nahegelegt, ob es wirklich derartige fortsetzbare Reihen gibt, die nicht rationale Funktionen darstellen. Ein Beitrag zur Beantwortung dieser Frage wurde neulich von Herrn Hausdorff[6]) geliefert, indem er zeigte, daß es nur abzählbar viele im Einheitskreise konvergente Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, die über diesen Kreis hinaus fortgesetzt werden können.

Nach dem, was oben angeführt wurde, würde es nicht unbegründet sein, die Frage zu stellen, ob die durch eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellten nicht rationalen Funktionen, die innerhalb des Einheitskreises nur endlich viele Singularitäten besitzen, entweder einen

[3]) In der unter [5]) angeführten Arbeit von Herrn Pólya wird man S. 509—510 einige Beispiele notiert finden.

[4]) Es hat ja keine Schwierigkeiten, Beispiele der letzteren Kategorie anzugeben. Denn zwar sind Bedingungen dafür aufgestellt worden, daß der Konvergenzkreis eine singuläre Linie sei, aber diese Bedingungen lassen sich nur in ganz speziellen Fällen anwenden, und im allgemeinen wird es dann belanglos sein, ob die Koeffizienten ganze Zahlen sind oder nicht.

Herr Fatou erwähnt (l. c.) die Reihe (p durchläuft die Primzahlen)

$$x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + \ldots = \sum_p x^p.$$

Mit Hilfe zahlentheoretischer Betrachtungen hat Herr Fatou bewiesen, daß diese Reihe über den Konvergenzkreis nicht fortgesetzt werden kann. Hierzu möchte ich bemerken, daß diese Tatsache im Grunde genommen nichts damit zu tun hat, daß die Koeffizienten ganze Zahlen sind. Denn dasselbe gilt für jede Reihe

$$\sum_p a_p x^p,$$

wie auch die Koeffizienten a_p gewählt sind. In der Tat, die Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten, deren Indizes $\leqq n$ sind, ist immer $\leqq \pi(n)$ und also von der Form $n \cdot \varepsilon(n)$, wo $\lim \varepsilon(n) = 0$. Man hat dann nur den folgenden Satz anzuwenden:

Wenn, für jedes n, die Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten einer Potenzreihe, deren Indizes $\leqq n$ sind, gleich $n \cdot \varepsilon(n)$ ist, so kann die Reihe über den Konvergenzkreis hinaus nicht fortgesetzt werden.

Verzweigungspunkt innerhalb dieses Kreises haben oder auch darüber hinaus nicht fortsetzbar sind.

Legt man der Betrachtung einen Kreis mit einem Halbmesser > 1 zugrunde, so ist die Frage schon durch die Untersuchungen der Herren Borel[7]) und Pólya[5]) beantwortet. Eine in einem solchen Kreise meromorphe Funktion, deren Entwicklung um $x = 0$ ganzzahlige Koeffizienten hat, muß eine rationale Funktion sein. Dieser von Herrn Borel bewiesene Satz wurde von Herrn Pólya dahin verallgemeinert, daß er noch gültig bleibt, wenn man voraussetzt, daß die Funktion im erwähnten Kreise eindeutig ist und dort nur endlich viele Singularitäten hat.

Ich werde nun im folgenden zeigen, daß die oben gestellte Frage bejahend zu beantworten ist, indem ich den Satz beweise:

Wenn die nicht rationale Funktion $f(x)$ innerhalb des Einheitskreises nur endlich viele Singularitäten hat und in der Umgebung von $x = 0$ durch eine Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt werden kann, so muß die Funktion $f(x)$ entweder einen Verzweigungspunkt innerhalb des Einheitskreises haben, oder sie kann über diesen Kreis hinaus nicht fortgesetzt werden.

Nun hat Herr Fatou bewiesen[8]), daß jede rationale Funktion, die durch eine im Einheitskreise konvergente Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt werden kann, von der Form

$$\frac{P(x)}{(1-x^p)^q}$$

sein muß, wo $P(x)$ ein Polynom ist und p, q ganze Zahlen sind. Demgemäß ergibt sich speziell für die im Einheitskreise regulären Reihen:

Die durch eine im Einheitskreise konvergente Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellte Funktion ist entweder eine rationale Funktion oder sie ist über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar. Im ersteren Falle muß sie die Form

$$\frac{P(x)}{(1-x^p)^q}$$

haben.

---

[5]) Pólya, Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Ann., 77 (1916), S. 497–513.

[6]) Hausdorff, Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen, diese Zeitschrift, 4 (1919), S. 98–103.

[7]) Borel, Sur une application d'un théorème de M. Hadamard, Bull. Sciences Math., 2e Série, **XVIII** (1894), S. 22–25.

[8]) S. [2]) oder auch Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., **30** (1906), S. 368–371.

§ 1.

Die Bedingung dafür, daß eine Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

eine rationale Funktion darstellt, hat Herr Borel[7]) folgendermaßen formuliert. Wird

$$\Delta_p^{(q)} = \begin{vmatrix} a_p, & a_{p+1}, \ldots, & a_{p+q-1} \\ a_{p+1}, & a_{p+2}, \ldots, & a_{p+q} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{p+q-1}, & a_{p+q}, \ldots, & a_{p+2q-2} \end{vmatrix}$$

gesetzt, so ist es notwendig und hinreichend, daß es ein q gibt derart, daß

$$\Delta_p^{(q)} = 0 \quad \text{für} \quad p > p_0.$$

Dies tritt, wie man unter Anwendung der Relation

$$\Delta_p^{(q-1)} \Delta_{p+2}^{(q-1)} - \Delta_p^{q} \Delta_{p+2}^{(q-2)} = \left(\Delta_{p+1}^{(q-1)}\right)^2$$

findet[5]), u. a. dann ein, wenn

$$\Delta_p^{(p)} = \Delta_p^{(p+1)} = 0 \quad \text{für} \quad p > p_0. \tag{2}$$

Wenn nun die a_n ganze Zahlen sind oder allgemeiner, wenn $a_n \varepsilon^n$, wo

$$|\varepsilon| = 1,$$

ganze Zahlen sind, so sind $|\Delta_p^{(q)}|$ nicht negative ganze rationale Zahlen, und aus den Ungleichungen

$$|\Delta_p^{(p)}| < 1, \quad |\Delta_p^{(p+1)}| < 1 \quad \text{für} \quad p > p_0 \tag{3}$$

folgen dann (2). Um nun zu (3) zu gelangen, werden in $\Delta_p^{(q)}$ gewisse Kolonnen durch lineare Kombinationen mit den vorhergehenden ersetzt, so daß ein Element a_n durch

$$b_n = a_n + \gamma_1 a_{n-1} + \gamma_2 a_{n-2} + \ldots + \gamma_\nu a_{n-\nu} \qquad (n - \nu \geqq p)$$

ersetzt wird. Man kann dies offenbar so deuten, daß bei der Bildung von $\Delta_p^{(q)}$ statt $f(x)$ die Reihe

$$P(x) f(x) = \sum b_n x^n$$

zugrunde gelegt wird. Daß dies Verfahren, das von Herrn Borel und dann auch von Herrn Pólya angewendet wurde, zum Ziele führt, hängt vollständig von der Wahl des Polynoms $P(x)$ ab. Es kommt darauf an, $P(x)$ so zu wählen, daß für b_n eine obere Schranke erhalten wird, die hinreichend klein ist, um zu den Ungleichungen (3) durch eine direkte Abschätzung der Determinanten zu führen. In dem von Herrn Borel betrachteten Falle kann ganz einfach

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{e_i}\right)^m$$

gesetzt werden, wenn $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ die Pole von $f(x)$ für $|x| \leqq 1$ sind. Denn ist die positive ganze Zahl m genügend groß, so ist $P(x)f(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär, und dann erfüllen die b_n für hinreichend große n eine Ungleichung

$$|b_n| < \delta^n, \quad \delta < 1,$$

was genügt, um die Ungleichungen (3) zu sichern. In dem von Herrn Pólya betrachteten Falle kann zwar $P(x)$ nicht so gewählt werden, daß $P(x)f(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär wird, d. h. man kann nicht mit einem *festen* $P(x)$ erreichen, daß die Ungleichungen $|b_n| < \delta^n$ mit einem $\delta < 1$ für *alle* hinreichend große n erfüllt werden. Dies ist auch nicht notwendig, denn es braucht $P(x)$ nur für die Elemente einer und derselben Kolonne fest zu sein, und deshalb wird es möglich, m in dem obigen Polynome so zu wählen, daß für die Elemente einer hinreichend großen Anzahl Kolonnen in $\Delta_p^{(p)}$ und $\Delta_p^{(p+1)}$ eine Ungleichung der angegebenen Art erhalten wird. In dem Falle aber, wo z. B. die Funktion $f(x)$ in $|x| < 1$ regulär angenommen wird, aber bezüglich ihres Verhaltens auf $|x| = 1$ nichts vorausgesetzt wird, muß die Wahl von $P(x)$ von anderen Gesichtspunkten aus getroffen werden. Man wird dann zur Aufsuchung der in § 2 mit $P_\delta(x)$ bezeichneten Polynome geführt.

Weil, wenn $a_n \varepsilon^n$ ganze Zahlen sind, die Gleichheiten (2) aus den Ungleichungen (3) folgen, so wird der behauptete Satz gleichzeitig mit dem folgenden bewiesen:

Wenn die Reihe (1) *eine innerhalb des Einheitskreises eindeutige Funktion darstellt, die dort nur endlich viele Singularitäten besitzt, und die noch in* $x = 0$ *und* $x = -1$ *regulär ist, so ist*

$$\text{(a)} \qquad \limsup_{p=\infty} |\Delta_p^{(q)}|^{\frac{1}{p^2}} < 1$$

für $q = p,\ p+1$.

Die Aufgabe der folgenden Paragraphen ist daher, die Richtigkeit von (a) unter den angegebenen Voraussetzungen nachzuweisen.

§ 2.

Es sei $P(x)$ ein beliebiges Polynom vom Grade n

$$P(x) = 1 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_n x^n, \quad n > 0$$

mit $P(0) = 1$. Betrachten wir dessen Werte auf dem Einheitskreise $|x| = 1$, so gibt es dort immer Stellen, wo $|P(x)| > 1$. Wird die Grad-

zahl n festgehalten, so hat die Summe derjenigen Bogen, wo $|P(x)|<1$, eine obere Grenze Θ_n. Es ist

$$\Theta_1 \leqq \Theta_2 \leqq \Theta_3 \leqq \ldots,$$

so daß $\lim \Theta_n$ existiert. Sucht man den Wert von Θ_n für allgemeines n zu bestimmen, so liegt es nahe, die Kurve $|P(x)|=1$ zu betrachten und deren Schnittpunkte mit dem Einheitskreise zu ermitteln. Für $n=1$ ist die Kurve $|P(x)|=1$ der Kreis

$$\left|\frac{1}{g_1}+x\right|=\frac{1}{|g_1|},$$

und weil dieser immer durch den Nullpunkt geht, schließt er vom Einheitskreise einen Bogen ein, der stets kleiner als π ist, aber beliebig nahe an π gebracht werden kann, wenn $|g_1|$ hinreichend klein gewählt wird. Es ist also $\Theta_1=\pi$. Für $n=2$ ist die Kurve $|P(x)|=1$ ein Cassinisches Oval, und es ergibt sich $\Theta_2=\frac{4\pi}{3}$. Für größere Werte von n werden die entsprechenden Betrachtungen kompliziert, und ich schlage daher einen anderen Weg ein, um zu zeigen, daß *die Θ_n-Folge den Grenzwert 2π hat.* Man soll also die Existenz von Polynomen $P(x)$ mit $P(0)=1$ beweisen, deren absolute Beträge <1 sind auf Bögen, deren Summe beliebig wenig von 2π abweicht. Für die Anwendungen im folgenden ist der Grad von $P(x)$ belanglos; dagegen ist es von wesentlicher Bedeutung, daß $P(x)$ so gewählt werden kann, daß die fraglichen Bögen zusammenhängen. Ich werde also zeigen:

$\delta>0$ sei beliebig. Dann gibt es ein Polynom $P_\delta(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$P_\delta(0)=1$$
$$|P_\delta(e^{i\varphi})|<1 \quad \text{für} \quad -\pi+\delta \leqq \varphi \leqq \pi-\delta. \tag{4}$$

Beweis: Es ist

$$|1+2x|=2\left|\frac{1}{2}+x\right|>1$$

in jedem Punkte des Einheitskreises mit Ausnahme von $x=-1$, und also, wenn

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+2x}$$

gesetzt wird, $|\varphi(x)|<1$ auf dem ganzen Einheitskreise $|x|=1$ mit Ausnahme von $x=-1$. Übrigens können wir

$$|\varphi(x)| \leqq 1-\sigma, \quad \sigma>0$$

für

$$x=e^{i\varphi}, \quad |\varphi| \leqq \pi-\delta \tag{5}$$

schreiben, wenn

$$\left| \begin{matrix} 1 \\ 1-2e^{i\delta} \end{matrix} \right| = 1 - \sigma$$

gesetzt wird. Schneiden wir die x-Ebene längs der negativen reellen Achse von $-\frac{1}{2}$ bis $-\infty$ auf, so läßt sich $\varphi(x)$ in eine Reihe von Polynomen entwickeln,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x),$$

die gleichmäßig konvergiert in jedem endlichen Bereiche, dessen Begrenzung keinen Punkt vom Rande des soeben konstruierten „Sternes" enthält. Es sei G ein solches Gebiet, das $x = 0$ und den Bogen (5) im Innern enthält. Dann können wir, für jedes $\varepsilon > 0$, N so wählen, daß

$$|\varphi(x) - \sum_{n=0}^{N} p_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle Punkte von G. Nehmen wir

$$0 < \varepsilon < \sigma$$

an und schreiben

$$\sum_{n=0}^{N} p_n(x) = R(x),$$

$$P_\delta(x) = R(x) - R(0) + 1,$$

so ist $P_\delta(0) = 1$ und, für alle Punkte vom Bogen (5),

$$\begin{aligned} |P_\delta(x)| &\leqq |R(x)| + |R(0) - 1| \\ &< 1 - \sigma + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 1 - \sigma + \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

$P_\delta(x)$ hat also die in (4) verlangten Eigenschaften.

Dem betrachteten Polynome kann noch die Bedingung auferlegt werden, in vorgegebenen Punkten zu verschwinden. Denn sind

$$x = e_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

diese Punkte, die selbstverständlich alle von 0 verschieden sind, so bilde man das Polynom

$$Q_\delta(x) = (P_\delta(x))^g \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{e_k}\right).$$

Es sei m das Maximum von $|P_\delta(x)|$ auf dem Bogen (5), M das Maximum von

$$\prod_{k=1}^{\nu} \left|1 - \frac{x}{e_k}\right|$$

auf demselben Bogen. Weil $m < 1$, so kann die rationale ganze Zahl g so groß gewählt werden, daß

$$m^g M < 1$$

und daß folglich

$$|Q_\delta(x)| < 1$$

auf dem Bogen (5). Offenbar ist $Q_\delta(0) = 1$.

Es sei $Q_\delta(x)$ ein derartiges Polynom, das fest bleibt. Dann lassen sich r_0, R_0

$$r_0 < 1, \quad R_0 > 1$$

so bestimmen, daß

$$|Q_\delta(x)| < 1$$

im Gebiete

$$x = \varrho e^{i\varphi}, \quad r_0 \leqq \varrho \leqq R_0, \quad |\varphi| \leqq \pi - \delta.$$

Das Maximum von $|Q_\delta(x)|$ in diesem Gebiete sei $\mu_2(r_0, R_0)$, so daß also

$$\mu_2(r, R) < 1$$

für $r_0 \leqq r \leqq R \leqq R_0$. Das Maximum von $|Q_\delta(x)|$ auf dem Bogen

$$x = Re^{i\varphi}, \quad |\varphi| \geqq \pi - \delta$$

sei $\mu_1(R)$; dann ist

$$\mu_1(R) > 1$$

für $1 \leqq R \leqq R_0$, und die Größe

$$\alpha_0(R) = \frac{\log R}{\log \mu_1(R)} \tag{6}$$

ist folglich > 0 für $1 < R \leqq R_0$ und

$$\lim_{R=1} \alpha_0(R) = 0. \tag{7}$$

Wir beweisen folgendes, was wir mit (A) bezeichnen wollen:

(A) *Zu jedem R im Intervalle*

$$1 < R \leqq R_0 \tag{8}$$

läßt sich ein α im Intervalle

$$0 < \alpha < \alpha_0 \tag{9}$$

und ein r im Intervalle

$$r_0 \leqq r < 1 \tag{10}$$

so bestimmen, daß

$$\mu_2(r, R) < \left(\frac{r^8}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \mu_1(R). \tag{11}$$

In der Tat, wird $\alpha < \alpha_0$, aber hinreichend nahe an α_0 gewählt, so kann

$$\frac{\mu_1(R)}{R^{1/\alpha}}$$

beliebig nahe an 1 gebracht werden und kann speziell $> \mu_2(r_0, R_0)$ gemacht werden. Es läßt sich dann ein $r < 1$ bestimmen derart, daß die rechte Seite von (11) auch $> \mu_2(r_0, R_0)$ wird. Für dies r ist (11) sicher erfüllt. Die Größe

$$h = \frac{\mu_1(R)^\alpha}{R} \tag{12}$$

ist immer < 1, wenn R und α in (8) bzw. (9) liegen.

§ 3.

Von der Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

wird vorausgesetzt: Sie stellt eine im Einheitskreise eindeutige Funktion dar, die dort die einzigen Singularitäten

$$x = e_k \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu)$$

$$0 < |e_1| \leqq |e_2| \leqq \ldots \leqq |e_\nu| < 1$$

hat, und die noch im Punkte $x = -1$ regulär ist. Zunächst ergibt sich hieraus, daß die Reihe für $|x| < |e_1|$ konvergiert, so daß die Ungleichung

$$|a_n| < \left|\frac{2}{e_1}\right|^n \tag{13}$$

für hinreichend großes n gilt, ferner, daß die Zahlen R^*, δ

$$R^* > 1, \quad \delta > 0$$

so bestimmt werden können, daß $f(x)$ im Bereiche

$$x = \varrho e^{i\varphi}, \quad 1 \leqq \varrho \leqq R^*, \quad |\varphi| \geqq \pi - \delta$$

regulär ist[9]). Mit den hier eingeführten e_k und δ wird nun ein Polynom $Q_\delta(x)$ gebildet. Es sei l der Grad von $Q_\delta(x)$. Dann werden die in § 2 betrachteten Größen R_0, r_0 so gewählt, daß

$$1 < R_0 \leqq R^*, \quad |e_\nu| < r_0 < 1$$

$$4 l \alpha_0(R) < 1 \quad \text{für} \quad 1 < R \leqq R_0 \tag{14}$$

und daß die in § 2 diesen Zahlen auferlegten Bedingungen erfüllt sind. Dies ist möglich. Wird der Bogen

$$x = R e^{i\varphi}, \quad |\varphi| \geqq \pi - \delta$$

[9]) Die Argumente sind stets im Intervalle $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$ zu wählen.

mit S, derjenige Weg, der vom Bogen

$$x = re^{i\varphi}, \quad |\varphi| \leqq \pi - \delta$$

und von den geradlinigen Stücken

$$x = \varrho e^{+i(\pi-\delta)}, \quad r \leqq \varrho \leqq R$$

gebildet ist, mit T bezeichnet, so ist für alle R, α, r, die nach (A) gewählt sind, $f(x)$ auf $S+T$ regulär und gleichzeitig (11) erfüllt.

Diese Bestimmung der Größen R, α, r wird im folgenden festgehalten.

Es sei nun C das Maximum von

$$\left|\frac{Q_\delta(x)}{x-e_k}\right| \qquad (k=1, 2, \ldots, \nu)$$

im Einheitskreise, e_0 der kleinste Abstand zwischen zwei Punkten e_k. Dann wird die positive Größe η so gewählt, daß

$$\eta < \frac{e_0}{2}, \qquad \eta < \frac{|e_1|}{2}, \qquad \eta < r_0 - |e_\nu|,$$

$$\eta < \frac{\mu_1(R)}{2C}\left|\frac{e_1^3}{8R}\right|^{1/\alpha}. \tag{15}$$

Um e_k als Mittelpunkt legen wir einen Kreis c_k mit dem Halbmesser η und bezeichnen mit M das Maximum von $f(x)$ auf $S+T$, mit K das Maximum von $|f(x)|$ auf $c_1+c_2+\ldots+c_\nu$. Dann können wir schreiben

$$(Q_\delta(x))^m f(x) = \sum_0^\infty b_n^{(m)} x^n,$$

$$(Q_\delta(x))^m = 1 + \gamma_1^{(m)} x + \gamma_2^{(m)} x^2 + \ldots + \gamma_{ml}^{(m)} x^{ml},$$

$$b_n^{(m)} = a_n + \gamma_1^{(m)} a_{n-1} + \gamma_2^{(m)} a_{n-2} + \ldots + \gamma_{ml}^{(m)} a_{n-ml},$$

$$b_n^{(m)} = \frac{1}{2\pi i}\int_S + \frac{1}{2\pi i}\int_T + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\nu}\int_{c_k} f(x)(Q_\delta(x))^m \frac{dx}{x^{n+1}},$$

wenn m eine positive ganze rationale Zahl ist und $a_n = 0$ für $n < 0$ gesetzt wird, und erhalten

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_S f(Q_\delta)^m \frac{dx}{x^{n+1}}\right| < M \cdot \frac{\mu_1(R)^m}{R^n},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_T f(Q_\delta)^m \frac{dx}{x^{n+1}}\right| < 2M \cdot \frac{\mu_2(r,R)^m}{r^n}\ ^{10}),$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k} f(Q_\delta)^m \frac{dx}{x^{n+1}}\right| < K \cdot \frac{C^m \eta^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^n}.$$

[10]) Man kann annehmen, daß $R_0 < 2r_0$ ist.

Von jetzt ab wird

$$m = [\alpha s] + 1, \quad s \leqq n \leqq 3s, \tag{16}$$

wo s eine gewisse ganze Zahl ist, angenommen. Dann ist

$$M \cdot \frac{\mu_1^m}{R^n} < M\,\mu_1 \cdot \frac{\mu_1^{\alpha s}}{R^s} = M\,\mu_1 \cdot h^s.$$

Nach (11) ist

$$M \cdot \frac{\mu_2^m}{r^n} < M \cdot \frac{\mu_2^{\alpha s}}{r^{3s}} = M\left(\frac{\mu_2^{\alpha}}{r^3}\right)^s < M\,h^s.$$

Weil, nach (15),

$$K\,\frac{C^m \eta^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^n} < K \cdot \frac{C^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^{3s}} \cdot \frac{\mu_1^m \left|\frac{e_1}{2}\right|^{\frac{3m}{\alpha}}}{2^m C^m R^{\frac{m}{\alpha}}}$$

$$< \frac{K\mu_1}{2^m} \cdot h^s,$$

so gilt die Ungleichung

$$\nu \cdot K\,\frac{C^m \eta^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^n} < M\,\mu_1\,h^s$$

sicher für hinreichend großes m, also für $m > m^{(0)}$. Wir können folglich behaupten:

(B) *Wenn R, α, r wie in* (A) *stipuliert ist und $m > m^{(0)}$ gewählt sind, so gilt für alle m, n, die* (16) *erfüllen, die Ungleichung*

$$|b_n^{(m)}| < N\left(\frac{\mu_1 (R)^{\alpha}}{R}\right)^s = N\,h^s \qquad (N = 4\,M\,\mu_1(R)). \tag{17}$$

§ 4.

Mit den Koeffizienten a_n der in § 3 betrachteten Potenzreihe wird die Determinante $\Delta_p^{(p)}$ gebildet,

$$\Delta_p^{(p)} = \begin{vmatrix} a_p, & a_{p+1}, & \cdots & a_{2p-1} \\ a_{p+1}, & a_{p+2}, & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{2p-1}, & a_{2p}, & \cdots & a_{3p-2} \end{vmatrix}.$$

Weil $\gamma_0^{(m)} = 1$ ist, können wir die Elemente a_n einer Kolonne in $\Delta_p^{(p)}$ durch $b_n^{(m)}$ ersetzen. Es muß nur dabei m denselben Wert haben für alle Elemente der betrachteten Kolonne, und ferner muß

$$n - ml \geqq p \tag{18}$$

sein, wenn a_n das Element in der ersten Zeile ist. Wir führen diese Substitution in folgender Weise aus. Wird

$$\varkappa = \frac{\alpha l}{1 - \alpha l} \tag{19}$$

gesetzt, so ist wegen (14)

$$0 < \varkappa < 1,$$

und

$$q = \left| \varkappa p + \frac{\varkappa}{\alpha} \right| + 1 \tag{20}$$

ist sicher $< p$, wenn p genügend groß ist. Die ganze Zahl s, die in (16) eingeführt wurde, wird dann aus

$$s = p + q \tag{21}$$

bestimmt. Betrachten wir die Elemente a_n, die in den $p - q$ letzten Kolonnen von $\Delta_p^{(p)}$ auftreten, so ist immer für diese

$$s \leqq n < 3s,$$

und wenn speziell a_n das Element in der ersten Zeile und der $(q+1)$-ten Kolonne ist, so hat n den Wert $p + q$, so daß

$$\begin{aligned} n - ml &= p + q - l(\alpha[p+q] + 1) \\ &> p + q - l\alpha(p+q) - l \\ &= p + q(1 - \alpha l) - p\alpha l - l \\ &> p. \end{aligned}$$

Für die Elemente a_n der $(p - q)$ letzten Kolonnen sind also die Bedingungen (16) und (18) erfüllt, und sie können mithin durch $b_n^{(m)}$ ersetzt werden. Nach (B) ist dann auch die Ungleichung (17) erfüllt.

Die Größe R ist aber im Intervalle $1 < R \leqq R_0$ beliebig, und es steht uns somit frei, R verschiedene Werte zuzuteilen. Wir wollen diese mit $R_1, R_2, \ldots$ und die entsprechenden Größen $\alpha, \varkappa, q, s$ usw. in übereinstimmender Weise bezeichnen. Zuerst wird ein R_1 gewählt, und $b_n^{(m)}$ in den $(p - q_1)$ letzten Kolonnen, wie soeben festgelegt wurde, eingeführt. Die $b_n^{(m)}$ dieser Kolonnen genügen für $m > m_1^{(0)}$

$$|b_n^{(m)}| < N_1 h_1^{p+q_1}. \tag{22}$$

Wird

$$d = \left| \frac{2}{e_1} \right| \tag{23}$$

gesetzt, so kann nach (19) ein β so bestimmt werden, daß

$$d^{(2+\varkappa)\varkappa} h_1^{1-\varkappa_1^2} < 1$$

wird für $0 < \alpha \leqq \beta$. Nach (7) ist es dann möglich, ein R_2 so zu wählen, daß

$$1 < R_2 \leqq R_0, \qquad \alpha_0(R_2) \leqq \beta,$$

so daß also

$$d^{(2+\varkappa_2)\varkappa_2} h_1^{1-\varkappa_1^2} < 1. \tag{24}$$

Indem m und q immer nach (16), (20) und (21) bestimmt werden, führen wir mit $\alpha = \alpha_2$ die Größen $b_n^{(m)}$ in die Kolonnen mit den Ordnungsnummern λ

$$q_2 < \lambda \leqq q_1$$

ein. Für diese $b_n^{(m)}$ gilt immer (17), so daß

$$|b_n^{(m)}| < N_2 h_2^{p+q_2}$$

oder, was für unsern Zweck hinreicht,

$$|b_n^{(m)}| < N_2 \qquad (m > m_2^{(0)}). \tag{25}$$

Die Elemente a_n der q_2 ersten Kolonnen lassen wir stehen. Sie genügen immer, wegen (23) und (13), für hinreichend große n

$$|a_n| < d^n,$$

also auch

$$|a_{n_k}| < d^{2p+q_2-2}. \tag{26}$$

Nun wird $\Delta_p^{(p)}$ entwickelt; man erhält $p!$ Glieder und für jedes Glied eine obere Schranke aus dem Produkte von $(p - q_1)$ Faktoren (22), $(q_1 - q_2)$ Faktoren (25) und q_2 Faktoren (26). Das liefert

$$\limsup_{p=\infty} |\Delta_p^{(p)}|^{\frac{1}{p^2}} < d^{(2+\varkappa_2)\varkappa_2} h_1^{1-\varkappa_1^2},$$

also, nach (24),

$$\limsup_{p=\infty} |\Delta_p^{(p)}|^{\frac{1}{p^2}} < 1.$$

In ähnlicher Weise wird

$$\limsup_{p=\infty} |\Delta_p^{(p+1)}|^{\frac{1}{p^2}} < 1$$

bewiesen. Damit ist die Richtigkeit von (a), S. 5, unter den dort angegebenen Voraussetzungen nachgewiesen.

(Eingegangen am 20. Oktober 1919.)