Wolfgang Gratzer/Otto Neumaier (Hg.): *Der Gordische Knoten. Lösungsszenarien in Wissenschaft und Kunst*, Wien–Münster: Lit, 2014, 55–72

DIE MATHEMATISCHE KNOTENTHEORIE UND IHRE AKTUELLEN ANWENDUNGEN

Meike Akveld/Otto Neumaier[1]

Wer von dem oder einem Gordischen Knoten spricht, denkt dabei im wörtlichen wie im übertragenen Sinne gewöhnlich an etwas, das es – nach dem Vorbild Alexanders des Großen – zu *lösen* oder zu *zerschlagen* gilt. Diese Vorstellung von einem Knoten als einem schwierigen Problem ist im alltäglichen Sprachgebrauch häufig zu finden; sie spiegelt sich etwa auch in der Rede davon, dass jemand, dem bei einer Sache nicht wohl ist, einen Knoten im Hals hat, oder dass uns ein Knoten aufgeht, wenn sich eine Blockade löst oder wir eine Angelegenheit verstehen.

Und doch ist ein Knoten nicht nur interessant als *Problem*, das es zu lösen gilt, sondern auch als etwas, das für sich bestimmte *Eigenschaften* und *Funktionen* hat: Auch der kunstvolle Knoten, mit dem der phrygische König Gordios (oder sein Sohn Midas) die Deichsel seines Wagens mit dem quergestellten Brustjoch für die beiden Zugochsen verbunden hatte, erfüllte zunächst *als solcher* seine Aufgabe. Ehe wir an das Lösen von Knoten denken, ist also zu überlegen, wie und warum Knoten geknüpft werden, sowie nicht zuletzt, was wir daraus lernen können.

Da Menschen in vielerlei Hinsicht auf Knoten angewiesen sind, haben sie für verschiedene Zwecke eine Vielfalt von jeweils angemessenen Knoten entwickelt: So ist z. B. uns allen das Knüpfen von Schuhbändern oder Krawatten vertraut, Segler können auf Knoten ebenso wenig verzichten wie Pfadfinder, und für Kletterer sind sie sogar überlebenswichtig. In der Schweiz, wo gebrauchte Zeitungen für die Altpapiersammlung in handlichen Einheiten zu bündeln sind, wetteifern schöpferische Geister etwa auch bei der Erfindung von ›Bündelknoten‹ bzw. ›Überhandknoten‹, die es erlauben, diese (nicht von allen geliebte) Pflicht rasch und sicher zu erfüllen.

Knoten sind also allgegenwärtig. Die Verwendung von Knoten scheint sogar eine der ältesten bekannten Kulturtechniken zu sein: Das 1913 vor dem damals finnischen Antrea (jetzt russisch Kammenogorsk) gefundene, etwa 27 x 1,3 m große Fischernetz aus Weidenrinde, dessen Maschen etwa 6 cm groß sind, wurde mit der Radiocarbonmethode als etwa 9300 Jahre alt bestimmt. Schon zu einer so frühen Zeit ihrer Geschichte beherrschten die Menschen also das Knüpfen komplexer Knoten.

1. In den vorliegenden Beitrag hat Meike Akveld ihre knotentheoretische Expertise eingebracht, während Otto Neumaier anhand ihrer Unterlagen die schriftliche Fassung erstellt hat.

Was aber hat die Mathematik mit Knoten zu tun? Die Antwort auf diese Frage liegt insofern nahe, als die Existenz von Knoten den Menschen als neugieriges bzw. nach Erkenntnis strebendes Wesen herausfordert zu überlegen, womit er es dabei überhaupt zu tun hat und ob in jedem Fall, in dem Fäden ineinander verschlungen sind, von einem Knoten zu sprechen ist. Dementsprechend ist auch die Beschäftigung mit solchen Fragen keineswegs neu.

1. Kurze Geschichte der mathematischen Knotentheorie

In mathematischem Zusammenhang werden Knoten (nach ›Vorahnungen‹ von Leibniz und Euler) im 18. Jahrhundert erstmals konkret angesprochen, und zwar vom französischen Mathematiker Alexandre-Théophile Vandermonde, der sich 1771 in einem Aufsatz darauf bezieht.[2] Ansätze zu einer Theorie der Knoten entwickelte dann bereits Carl Friedrich Gauss, der 1833 die heute als ›Gauss Linking Integral‹ bekannte *Verschlingungszahl* für die Anzahl der Windungen von Kurven umeinander, also von Knoten, angab.[3] Als eigentlicher Vater der Knotentheorie gilt aber der Physiker Sir William Thomson (Lord Kelvin), der – angeregt durch Helmholtz' Arbeit über Wirbelbewegung (1858) – 1867 die Hypothese aufstellte, dass Atome nichts anderes seien als stabile, verknotete Ätherwirbel, wobei die verschiedenen chemischen Elemente auf unterschiedlichen Formen der Knoten beruhten (vgl. Abb. 1).[4]

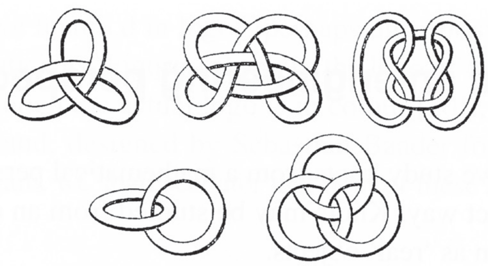

Abb. 1: Formen verknoteter Ätherwirbel, aus: William Thomson [Lord Kelvin], »On Vortex Motion« (1869), 244

2. Das eigentliche Problem, mit dem sich Vandermonde in seinem Aufsatz beschäftigt, ist der Bewegungsspielraum des Springers auf dem Schachbrett, der u. a. die Frage nach der Überschneidung der Kurven aufwirft, die durch die Bewegungen des Springers entstehen.
3. Vgl. Carl Friedrich Gauss, »Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen«, in: ders., *Mathematische Physik* (Werke 5), Nachdr. Hildesheim: Olms, 1973, 601–629 (Orig. 1833). Gauss' Schüler Johann Benedict Listing führte diesen Ansatz mit seinen »Vorstudien zur Topologie« (1847) weiter; er gab dieser mathematischen Disziplin nicht nur ihren Namen, sondern behandelte auch grundlegende Probleme wie das der Unterscheidung von Knoten.
4. Vgl. Sir William Thomson [Lord Kelvin], »On Vortex Motion«, in: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 25 (1869), 217–260, hier: 244; vgl. auch ders., »On Vortex Atoms«, in: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 6 (1867), 15–24 .

Zwar stellte sich Lord Kelvins Hypothese bald als falsch heraus, doch war das wissenschaftliche Interesse an Knoten nun endgültig geweckt. Der schottische Physiker Peter Guthrie Tait, der gemeinsam mit Lord Kelvin an einem *Treatise of Natural Philosophy* schrieb (von dem freilich nur der erste Band 1867 erschien) wandte sich auf Anregung seines Mentors der systematischen Untersuchung von Knoten und ihrer Klassifikation aufgrund der Zahl ihrer Kreuzungen zu. Sein Ziel war dabei die Bestimmung der so genannten *Primknoten*, die nicht aus anderen Knoten zusammengesetzt sind, aber ihrerseits zur Konstruktion beliebiger anderer Knoten dienen (genau so wie jede beliebige Zahl als Produkt von Primzahlen dargestellt werden kann).[5] Zusammen mit seinem Mitarbeiter C. N. Little, dem ersten amerikanischen Knotentheoretiker, bemühte er sich um eine Klassifikation aller möglichen Primknoten, von der ein Ausschnitt in Abb. 2 dargestellt ist.

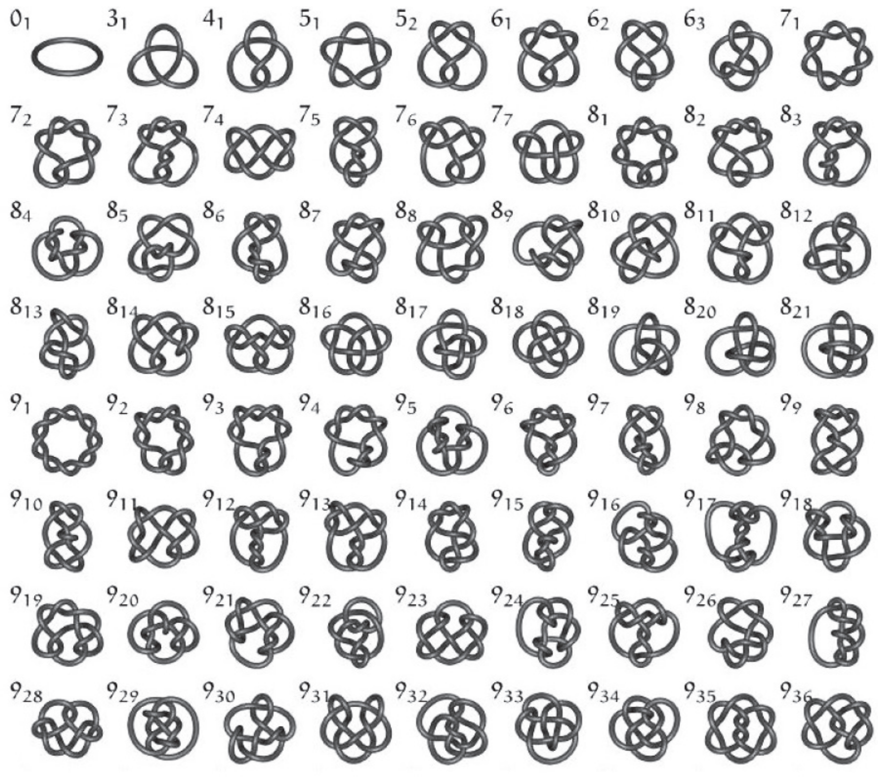

Abb. 2: Tabelle von Primknoten mit einer Kreuzungszahl kleiner als 10, nach Peter Guthrie Tait, »On Knots I–III« (1877–1885)

5. Vgl. dazu Peter Guthrie Tait, »Some Elementary Properties of Closed Plane Curves«, in: ders., *Scientific Papers*, vol. I, Cambridge: University Press, 1898, 270–272 (Orig. 1877); ders., »On Knots«, a. a. O., 273–317 (Orig. 1877); ders., »On Knots, part II«, a. a. O., 318–334 (Orig. 1884); ders., »On Knots, part III«, a. a. O., 335–347 (Orig. 1885).

Wenn wir diese Tabelle etwas genauer betrachten, stoßen wir sehr rasch auf einige Grundfragen der mathematischen Knotentheorie, z. B. die folgenden:

(i) Ist die Tabelle vollständig, d. h., sind darin keine der möglichen Primknoten übersehen worden?

(ii) Enthält die Tabelle andererseits keine ›Doppelgänger‹, d. h., besteht Gewissheit darüber, dass Knoten, die verschieden aussehen, auch tatsächlich verschieden sind?

(iii) Was aber ist schließlich überhaupt damit gemeint, dass Knoten gleich bzw. verschieden sind?

Natürlich haben die Knotentheoretiker die Tabellen von Tait und Little in Bezug auf eben diese Fragen untersucht. Dabei zeigte sich, dass sie sehr genau zusammengestellt, aber doch nicht völlig korrekt sind. Das heißt, es dauerte bis 1974, ehe der amerikanische Anwalt Kenneth Perko zwei auf den ersten Blick verschiedene, bei genauerem Betrachten aber gleiche Knoten mit der Kreuzungszahl 10 entdeckte[6], die seitdem als ›Perko-Paar‹ bekannt sind (vgl. Abb. 3).

Abb. 3: Das ›Perko-Paar‹ – zwei unterschiedlich aussehende, aber äquivalente Knoten; nach Kenneth A. Perko, »On the Classification of Knots« (1974), 263

Um die oben gestellten Fragen auf theoretisch saubere Weise zu beantworten, ist es freilich notwendig, zunächst zwei weitere, grundlegende Fragen zu beantworten, nämlich zum einen, wie zu definieren ist, was ein Knoten im mathematischen Sinne überhaupt ist, zum anderen aber, wie zu bestimmen ist, wann zwei Knoten gleich bzw. äquivalent sind.

6. Vgl. Kenneth A. Perko, »On the Classification of Knots«, in: *Proceedings of the American Mathematical Society* 45 (1974), 262–266. Ausgangspunkt für Perkos Überlegungen sind dabei die Tafeln VIII und IX von Peter Guthrie Tait, »On Knots, part III«, a. a. O. (Anm. 5), zwischen 346 und 347, wo die Möglichkeiten zehnfacher Verknotungen zum ersten Mal dargestellt sind, sowie die Tafeln I–III von C. N. Little, »Non-Alternate ± Knots«, in: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 39 (1900), 771–778, wo Taits Überlegungen systematisch fortgeführt werden. Eine ausführliche Geschichte der Knotentheorie bietet übrigens Moritz Epple, *Die Entstehung der Knotentheorie. Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Braunschweig–Wiesbaden: Vieweg, 1999.

2. Zur Definition eines mathematischen Knotens

Die Frage, was im mathematischen Sinne unter einem Knoten zu verstehen ist, lässt sich umgangssprachlich auf einfache Weise beantworten: Man nehme eine Schnur und verschlinge diese ganz nach Belieben. Sodann füge man die beiden Enden der Schnur so zusammen, dass nicht zu merken ist, dass die Schnur an dieser Stelle einmal unterbrochen war. Wenn wir uns nun die Schnur unendlich dünn vorstellen (so wie wir dies von einem mathematischen Kreis kennen), so haben wir damit auf praktische Weise einen Knoten im mathematischen Sinne bestimmt.

Auf ähnliche Art können wir auch verständlich machen, unter welchen Bedingungen zwei Knoten im mathematischen Sinne *äquivalent* sind: Dies ist dann der Fall, wenn sie sich durch ›Deformieren‹ *ineinander umformen* lassen, d. h., wenn wir – ohne eine Schere zur Hand zu nehmen – die Schnurstücke eines Knotens in ihrer Lage so verändern, dass seine Erscheinung in die des anderen Knotens übergeht.[7] Um herauszufinden, wie ein Knoten durch Deformation zu vereinfachen, in eine besser erkennbare Form zu bringen oder in einen anderen Knoten umzuformen ist, können wir verschiedene Strategien anwenden: Wir können zum einen *praktisch* vorgehen und ausprobieren, wie sich die Schnurstücke herumschieben lassen, wir können zum anderen aber auch dem Knotentheoretiker Kurt Reidemeister folgen und *systematisch* überlegen, wie viele verschiedene Deformierungsschritte überhaupt möglich sind. Dieser stellte dabei (wohl zu seiner eigenen Überraschung) fest, dass sich die Knotendiagramme von zwei äquivalenten Knoten mit nur drei Arten von Schritten, den so genannten *Reidemeister-Bewegungen*, ineinander überführen lassen, d. h. durch (I) Ent-/Verdrillung, (II) Ent-/Verhäkelung und (III) Verschiebung von Schnurstücken (vgl. Abb. 4).[8]

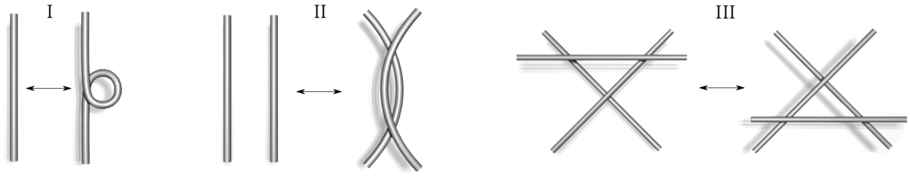

Abb. 4: Die drei Typen von Reidemeister-Bewegungen; modifiziert nach Meike Akveld/Peter Gallin, *Knoten in der Mathematik* (2007), 13

---

7. Wenn sich ein Knoten durch Deformieren in eine o-förmige Schlinge auflösen lässt, spricht man in der Mathematik auch von einem *Unknoten* (wie er in Abb. 2 zu Beginn dargestellt ist). In der Mathematik ist es also wichtig, auch die scheinbar trivialen Fälle zu benennen.
8. Vgl. dazu Kurt Reidemeister, »Elementare Begründung der Knotentheorie«, in: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 5 (1927), 24–32; vgl. auch ders., »Knoten und Gruppen«, a. a. O., 7–23, sowie ders., *Knotentheorie* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 1), Berlin: Springer, 1932. Dieses Buch war über Jahrzehnte das Standardwerk zu unserem Thema.

Es ist nicht allzu schwierig einzusehen, dass sich ein Knoten durch Anwendung der drei Arten von Reidemeister-Bewegungen nicht ändert. Überraschend ist jedoch, dass nur diese drei Arten von Bewegungen notwendig sind. Der Beweis ist nicht sehr kompliziert, aber ziemlich technisch. Selbst die präzise mathematische Definition eines Knotens ist genau genommen nicht besonders anspruchsvoll, auch wenn sie genauso etwas technisch klingt: Ein Knoten ist demnach die Einbettung eines Einheitskreises S^1 in den dreidimensionalen reellen Raum $\mathbb{R}^3$, wie dies graphisch in Abb. 5 dargestellt ist.

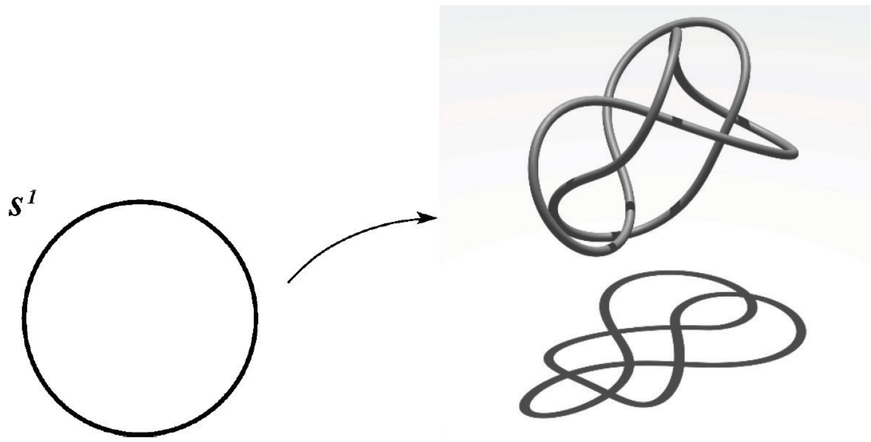

Abb. 5: Die Einbettung des Einheitskreises S^1 in den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit seinem Schatten; nach Meike Akveld/Andrew Jobbings, *Knots Unravelled* (2011), 9

Für eine Definition ist diese technischere Formulierung zwar besser geeignet, doch ließe sich zeigen, dass sie durchaus auch unserer alltäglichen Intuition entspricht. Die für uns interessantere Frage ist, ob bzw. wie entscheidbar ist, ob zwei gegebene Knoten äquivalent sind oder nicht. Wie erwähnt, können wir versuchen, auch auf diese Frage durch Herumprobieren eine Antwort zu geben. Zwar mag ein solches praktisches Vorgehen in etlichen Fällen zu einem einsichtigen Ergebnis führen, doch haben wir keine Garantie, dass es immer funktioniert. Wenn wir einen Knoten nicht derart umformen können, stehen wir jedoch vor der Frage, ob er aufgrund dessen eben *nicht* äquivalent mit einem anderen ist oder ob wir Pech gehabt bzw. es einfach nicht lange genug versucht haben.

Um solche Unwägbarkeiten zu vermeiden, bietet sich mit Bezug auf die Frage nach der Äquivalenz von Knoten ebenfalls ein eher theoretischer bzw. systematischer Ansatz an. Abstrakt formuliert gelten in diesem Sinne zwei Knoten K und K' als äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt, der K auf K' abbildet. Etwas weniger abstrakt und im Sinne des vorhin Gesagten stellen demnach zwei Knotendiagramme genau dann äquivalente Knoten dar, wenn man ein

Diagramm in das andere durch (unter Umständen auch mehrfache) Anwendung von Reidemeister-Bewegungen umformen kann.

Jede Eigenschaft eines Knotens, die nicht durch Reidemeister-Bewegungen verändert werden kann, heißt *Knoteninvariante*. Solche Invarianten dienen also zur Unterscheidung von Knoten. Alle Invarianten äquivalenter Knoten müssen übereinstimmen. Deshalb genügt es, eine Invariante (bzw. Eigenschaft) zu finden, die für zwei Knoten verschieden ist, um die Knoten zu unterscheiden. Betrachten wir zum besseren Verständnis dieser Überlegung etwa die in Abb. 6 dargestellten Knoten:

Abb. 6: Äquivalente und nicht-äquivalente Knoten; modifiziert nach Meike Akveld/Andrew Jobbings, *Knots Unravelled* (2011), 20f.

Es ist leicht zu erkennen, dass der linke und der mittlere Knoten nicht äquivalent sind, denn der eine zeigt drei Kreuzungen, der andere hingegen vier. Es ist mit anderen Worten nicht möglich, den linken und den mittleren Knoten durch Reidemeister-Bewegungen ineinander umzuformen. Wie verhält es sich jedoch mit dem Knoten auf der rechten Seite? Auf den ersten Blick zeigt auch dieser Knoten vier Kreuzungen, doch lässt sich relativ rasch einsehen, dass eine davon überflüssig ist und durch Entdrillen der oberen Schlaufe in den Knoten auf der linken Seite umgeformt werden kann. Obwohl die Knotendiagramme unterschiedlich aussehen, sind also der linke und der rechte Knoten miteinander äquivalent.

Demnach ist nicht entscheidend, wie viele Kreuzungen in einem Knotendiagramm *erscheinen*, sondern welche minimale Zahl von Kreuzungen für einen Knoten *notwendig* ist. Eine Möglichkeit zur Bestimmung eines Knotens ist also seine *Kreuzungszahl*. Die Kreuzungszahl $c(K)$ eines Knotens K wird wiederum definiert als die minimale Anzahl von Kreuzungen, die in einem Diagramm durch Deformieren des Knotens erreicht werden kann. Die in Abb. 6 dargestellten Knoten haben folglich die Kreuzungszahlen 3, 4 und wiederum 3.

Auch wenn die Kreuzungszahl eines Knotens eine *notwendige* Invariante für seine Klassifikation ist, stellt sich andererseits doch die Frage, ob sie dafür *hinreichend* ist. Diese Frage ist negativ zu beantworten, denn wir kennen Knoten mit der gleichen Kreuzungszahl, die offensichtlich nicht miteinander äquivalent sind. So haben beispielsweise beide der in Abb. 7 dargestellten Knoten die Kreuzungszahl 5, doch ist relativ leicht einzusehen, dass sie nicht äquivalent sind:

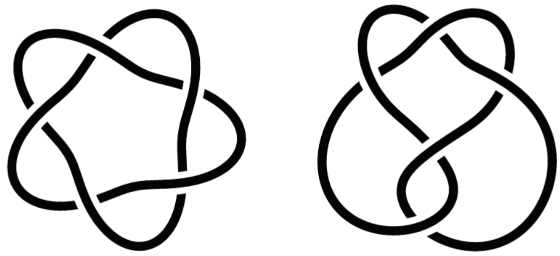

Abb. 7: Nicht-äquivalente Knoten mit gleicher Kreuzungszahl; nach Meike Akveld/Andrew Jobbings, *Knots Unravelled* (2011), 27

Als *Knoteninvariante* $i(K)$ eines Knotens K gilt jede Eigenschaft von K, die für jeden Repräsentanten einer Äquivalenzklasse den gleichen Wert annimmt, die sich also durch Anwendung der Reidemeister-Bewegungen nicht ändert. Ein Beispiel für eine Knoteninvariante ist dabei die Kreuzungszahl $c(K)$ eines Knotens K.

Wenn zwei Knoten äquivalent sind, so heißt das, dass ihnen dieselben Invarianten eigen sind, während umgekehrt aus der Existenz verschiedener Knoteninvarianten die Nicht-Äquivalenz von Knoten folgt – oder etwas technischer formuliert:

$$K_1 = K_2 \Rightarrow i(K_1) = i(K_2) \text{ und}$$
$$i(K_1) \neq i(K_2) \Rightarrow K_1 \neq K_2$$

Wie die beiden Knoten in Abb. 7 zeigen, folgt andererseits daraus, dass zwei Knoten eine bestimmte Knoteninvariante wie z. B. eine bestimmte Kreuzungszahl gemeinsam haben, noch nicht, dass die Knoten äquivalent sind:

$$i(K_1) = i(K_2) \not\Rightarrow K_1 = K_2$$

Das bedeutet mit anderen Worten, dass für die Definition und Klassifikation von Knoten weitere Invarianten notwendig sind. Tatsächlich ist ein Gutteil der knotentheoretischen Forschung seit Reidemeister der Suche nach solchen Knoteninvarianten gewidmet und ist es auch (mit zunehmendem theoretischem Aufwand) gelungen, weitere Invarianten zu bestimmen wie z. B. die *Dreifärbbarkeit* eines Knotens (die gegeben ist, wenn es möglich ist, das entsprechende Knotendiagramm nach bestimmten Regeln mit drei Farben zu färben), die *Windungszahl* (für die auch die *Orientierung* von Knoten zu berücksichtigen ist, d. h., um diese Invariante zu bestimmen, ist auch relevant, welche Durchlaufrichtung die Komponenten eines Knotens an einem Kreuzungspunkt aufweisen) oder die *Entknotungszahl* (d. h. die minimale Anzahl der »Kreuzungswechsel«, also der lokalen Änderung einer Überkreuzung zu einer Unterkreuzung bzw. umgekehrt, die notwendig ist, um einen Knoten in einen Unknoten zu überführen).[9]

Für unsere Zwecke mögen diese Überlegungen genügen. Es ist weder notwendig noch möglich, alle denkbaren Knoteninvarianten zu erläutern, allein schon deshalb, weil die in der mathematischen Knotentheorie bis heute entdeckten Knoteninvarianten zwar *notwendig*, aber *nicht hinreichend* sind, um die nicht-äquivalenten Knoten voneinander zu unterscheiden. Die Suche nach Knoteninvarianten geht also weiter, wobei derzeit offen ist, ob es *eine* Invariante gibt, die erlaubt, alle Knoten zu klassifizieren, oder ob zumindest die gesamte *Menge* der Invarianten dafür hinreicht. Wir sind also immer noch auf der Suche nach einer Knoteninvariante, welche die Äquivalenz von Knoten garantiert, oder nach jener Menge, die dies leistet, so dass also gilt:

$$i(K_1) = i(K_2) \Leftrightarrow K_1 = K_2 \text{ oder}$$
$$i_1(K_1) \,\&\, i_2(K_1) \,\&\, \ldots \,\&\, i_n(K_1) = i_1(K_2) \,\&\, i_2(K_2) \,\&\, \ldots \,\&\, i_n(K_2) \Leftrightarrow K_1 = K_2$$

Die exakte Bestimmung jener (Menge von) Invariante(n), die für zwei Knoten genau dann identisch ist, wenn die zwei Knoten äquivalent sind, ist wohl noch für einige Zeit ein wichtiges Ziel der knotentheoretischen Forschung.

3. Aktuelle Anwendungen der mathematischen Knotentheorie

Wie im historischen Abriss der mathematischen Knotentheorie erwähnt, ging diese aus Überlegungen zu nicht-mathematischen Problemen (wie der Elektrodynamik oder Atomtheorie) hervor. Da diese rasch zu mathematischen Grundlagenfragen führten, entwickelte die Theorie ein starkes Eigenleben, so dass die theoretische Beschäftigung mit Knoten lange Zeit als Spielfeld für eine kleine Gruppe von Spezialisten galt. Mittlerweile wurden jedoch wichtige Anwendungen der Knotentheorie entdeckt, die sie für einen größeren Kreis von Menschen wieder attraktiver macht.[10]

9. Wenn die Orientierung von Kreuzungen berücksichtigt wird, ergibt sich übrigens ein anderer Begriff der Äquivalenz von Knoten, als wenn das nicht geschieht. Weitere Beispiele von Knoteninvarianten sind Polynome, z. B. das Alexander-Polynom, das Jones-Polynom, das Kauffman-Polynom oder das HOMFLY-Polynom. Auf alle diese Möglichkeiten einzugehen, würde hier zu weit führen. Vgl. dazu Meike Akveld/Peter Gallin, *Knoten in der Mathematik. Ein Spiel mit Schnüren, Bildern und Formeln*, Zürich: Orell-Füssli, 2007, sowie Meike Akveld/Andrew Jobbings, *Knots Unravelled. From String to Mathematics*, Shipley: Arbelos, 2011.

10. Ähnliches gilt für die fraktale Geometrie, mit der zu beschäftigen der Mathematiker Gaston Maurice Julia seinem Schüler Benoît Mandelbrot abriet, die seit den 1980er Jahren jedoch eine Fülle faszinierender Anwendungen gefunden hat, von denen die geometrische Darstellung natürlicher Objekte wohl die bekannteste ist; vgl. dazu Benoît Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, übers. v. Reinhild u. Ulrich Zähle, Basel: Birkhäuser, 1987 (engl. Orig. 1983).

Die Knotentheorie findet inzwischen nicht nur in benachbarten Gebieten der Mathematik wie z. B. der hyperbolischen Geometrie (einer Form von nicht-euklidischer Geometrie) Anwendung, sondern auch in spezifischen Bereichen der Physik, Chemie und Biologie, und zwar (genauer gesagt) immer dann, wenn es auf bestimmte topologische Eigenschaften von etwas ankommt, von Quarks über Moleküle bis zu noch komplexeren Substanzen.[11]

3.1. Knoten in den physikalischen Grundlagen

Der Umstand, dass sich die Knotentheorie für die Lösung physikalischer Probleme als fruchtbar erwiesen hat, erscheint nicht allzu überraschend, wenn wir bedenken, dass einer ihrer Ursprünge die Beschäftigung mit physikalischen Fragen war, nicht zuletzt der Elektrodynamik, die (wie erwähnt) Carl Friedrich Gauss zur Bestimmung der »Verschlingungszahl« in sich geschlossener Kurven führte. Bezeichnenderweise sind es auch eben diese Versuche, physikalische Probleme mit Hilfe der Mathematik exakt zu formulieren und zu lösen, an die heute wieder angeknüpft wird. Gauss versuchte ja u. a. die Frage zu beantworten, welche Arbeit aufzuwenden ist, um einen magnetischen Pol entlang einer geschlossenen Kurve in Verbindung mit einer geschlossenen Leiterschleife zu bewegen. Wie Gauss bemerkte, kommt es in diesem Zusammenhang darauf an, »die Umschlingungen zweier geschlossener unendlicher Linien zu zählen«, und er beantwortete jene Frage durch Angabe eines Integrals, in dem diese ›Gauss'sche Verschlingungszahl‹ als Invariante vorkommt.[12]

Die Überlegungen von Gauss erwiesen sich in der Folge als fruchtbar in mehreren Bereichen der Physik, z. B. zur Berechnung von Magnetfeldlinien, die nur in Spezialfällen wie etwa bei einem Stabmagneten wohlgeordnet sind, im Allgemeinen aber als unendlich lange, ineinander verschlungene ›Fäden‹ vorzustellen sind, die in ein elektrisch leitfähiges Plasma eingebettet sind, das sich »wie alle Flüssigkeiten und Gase beliebig verformen [kann], was auch für alle darin eingefrorenen Magnetfelder gilt. Die Magnetfeldlinien sind also wie Spaghetti, die in der Strömung des Plasmas – des Wassers im Kochtopf – mitschwimmen können, ohne dabei zu zer-

11. Da wir nur jeweils für unser Fach kompetent sind, können wir über die folgenden Anwendungen der Knotentheorie bloß aufgrund von Lektüre berichten. Vgl. dazu z. B. De Witt L. Sumners (Hg.), *New Scientific Applications of Geometry and Topology*, Providence/RI: American Mathematical Society, 1992, Kenneth C. Millett/De Witt Sumners (Hg.), *Random Knotting and Linking*, Singapore–River Edge/NJ: World Scientific Publ., 1994, Renzo L. Ricca (Hg.), *Lectures on Topological Fluid Mechanics*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2009, und Markus Banagl/Denis Vogel (Hg.), *The Mathematics of Knots. Theory and Application*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2011.

12. Den Überlegungen von Gauss, »Zur Electrodynamik«, a. a. O. (Anm. 3), 605, zufolge ist die Verschlingungszahl insofern invariant, als ihr Wert »gegenseitig« ist, d. h., »er bleibt derselbe, wenn beide Linien gegen einander umgetauscht werden.« Vgl. dazu auch Oliver Wetzel, *Feynman-Diagramme, Knotentheorie und das Kontsevich-Integral* (Dipl.-Arb.), Mainz 1998, 79 f.

reißen. Jegliche Verschlingung oder Verknotung der Feldlinien bleibt erhalten. Dies sind ›topologische‹ Eigenschaften des Magnetfeldes«, die durch Anwendung der Knotentheorie erklärt werden können.[13]

Wie sich zeigte, tragen die in Anlehnung an Gauss errechneten Verknüpfungsintegrale für Magnetfeldlinien auch zu einem besseren Verständnis des Aufbaus der Materie bei, wie dies etwa in der Quantenfeldtheorie versucht wird. Insbesondere Edward Witten leistete wesentliche Beiträge zu deren Fortschritt, indem er Knoteninvarianten wie das Jones-Polynom als Quantenzahlen und die Knotentheorie allgemein »als maskierte Form der Quantenfeldtheorie« interpretierte.[14] Davon ausgehend fand die Knotentheorie eine weitere physikalische Anwendung durch die Idee der ›Loop-Quantengravitation‹, die auf der Annahme eines ›körnigen‹ Raumes beruht, der aus »Knoten mit einem Durchmesser von ungefähr 10–35 Metern« besteht, »die miteinander verbunden sind«, wobei »die Feinstrukturen solcher Ketten sehr komplex werden können, je nachdem, welche Verknotungen und Verflechtungen die Verbindungen untereinander haben.«[15] Bei dieser Theorie kommen Verkettungen von Knoten, so genannte Zöpfe[16], ins Spiel. Solche Zöpfe erwiesen sich jedoch wieder als theoretisch fruchtbar, als Sundance Bilson-Thompson im Jahr 2004 entdeckte, »dass sich aus einigen dieser Zöpfe gerade die Kombinationsregeln für Quarks ableiten lassen. Die elektrische Ladung des Quarks wäre dann eine topologische Eigenschaft des zugehörigen Zopfes, und die Kombinationsregeln fol-

13. Vgl. Gunnar Hornig, »Magnetes Geheimnis«, in: *Rubin. Wissenschaftsmagazin der Ruhr-Universität Bochum* 11 (2001) Nr. 2, 6–10, hier: 7 ff.

14. Vgl. Ian Stewart, *Die Macht der Symmetrie. Warum Schönheit Wahrheit ist*, übers. von Thomas Filk, Berlin–Heidelberg: Springer, 2008, 255. Vgl. dazu auch Edward Witten, »Quantum Field Theory and the Jones Polynomial«, in: *Communications in Mathematical Physics* 121 (1989), 351–399. Wie Wetzel in diesem Zusammenhang bemerkt, sind Invarianten, wie sie aus der Knotentheorie bekannt sind, »in der Physik in Form von Erhaltungsgrößen und Quantenzahlen von Bedeutung. [...] Entwicklungen in der Quantenfeldtheorie [stehen also] in enger Beziehung zu abstrakten Fragestellungen der [...] Topologie [...]. So lassen sich verschiedene geometrische, topologische und algebraische Invarianten physikalisch relevanter Räume in einer geeigneten Theorie als Quantenzahlen interpretieren«; vgl. Wetzel, *Feynman-Diagramme*, a. a. O. (Anm. 12), 2. Übrigens leistete Edward Witten neben grundlegenden Beiträgen zur Physik (nicht zuletzt zur String- und Superstringtheorie) auch solche zur Mathematik. Aufgrund seiner Expertise in beiden Disziplinen erkannte Witten nicht nur die Notwendigkeit einer exakten Formulierung der Quantenfeldtheorie in Form der »Topologischen Quantenfeldtheorien«, sondern wurde er auch zum bislang einzigen Physiker, dem die Fields-Medaille, die höchste Auszeichnung für Leistungen auf dem Gebiete der Mathematik, verliehen wurde.

15. Stewart, *Die Macht der Symmetrie*, a. a. O. (Anm. 14), 266.

16. Die Theorie der Zöpfe wurde (nach Vorarbeiten von Adolf Hurwitz) von Emil Artin entwickelt; vgl. Emil Artin, »Theorie der Zöpfe«, in: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 4 (1925), 47–72. Vgl. dazu auch Epple, *Die Entstehung der Knotentheorie*, a. a. O. (Anm. 6), bes. 68–74, 314–320.

gen aus einfachen geometrischen Operationen mit solchen Zöpfen. […] Sollte Bilson-Thompson Recht behalten, wäre Materie eine verdrillte Raumzeit.«[17]

Selbst Kelvins Atomtheorie erfährt durch die neuen Entwicklungen bis zu einem gewissen Grad ihre Rehabilitierung: Er wollte ja »verschiedene Atome als unterschiedliche Knoten von Wirbellinien in einem idealen, nicht zähen (dissipationsfreien) Fluid – dem Äther – erklären«, wobei er »die Stabilität der Atome […] auf den ›Helmholtzschen Wirbelsatz‹ (1858) zurück [führte], der zeigt, dass Wirbellinien in einer idealen Flüssigkeit erhalten bleiben. Die Wirbellinien sind wie Magnetfeldlinien die Feldlinien eines divergenzfreien Feldes.«[18] Kelvins Theorie krankt daran, dass er sich Atome als verknotete Ätherwirbel vorstellte, so dass sein Atommodell obsolet wurde, als sich zeigte, dass die beobachtbaren physikalischen Phänomene ohne die Annahme des Äthers besser erklärt werden können. Durch die Anwendung der Knotentheorie in den Topologischen Quantenfeldtheorien Edward Wittens sowie zur Erklärung der Quantengravitation könnte sich Kelvins Idee aber »über Umwege doch noch bestätigen: zumindest in dem Sinne, dass im Aufbau der Materie letztendlich Knoten eine zentrale Rolle spielen.«[19]

3.2. Die fabelhafte Welt der Polymere

Es ist eine Sache zu *vermuten*, dass Knoten beim Aufbau der Materie »eine zentrale Rolle spielen«, eine andere aber, sich mit Gegenständen zu beschäftigen, die für unser Leben auf unterschiedliche Weise wesentlich sind und für deren Struktur und Funktion Knoten *erwiesenermaßen* von großer Bedeutung sind, wie dies etwa für Polymere gilt. Darunter werden chemische Verbindungen verstanden, die durch eine Verkettung kleinerer Einheiten gebildet werden, die freilich ihrerseits komplex

17. Stewart, *Die Macht der Symmetrie*, a. a. O. (Anm. 14), 266.

18. Hornig, »Magnetes Geheimnis«, a. a. O. (Anm. 13), 10.

19. Ebd. Wie Moffat argumentiert, hat Kelvin – durchaus in Anschluss an Helmholtz – mit seinen Überlegungen in jedem Fall einen entscheidenden Beitrag zur Hydrodynamik geleistet: »I propose to argue that, had Kelvin conceived of the ether as a perfectly conducting fluid medium supporting a tangle of magnetic flux tubes rather than as an ideal (inviscid) medium supporting a tangle of vortex filaments, then his theory would have been much more robust, and the development of natural philosophy (i. e. physics) in the early twentieth century might have followed a very different course«; vgl. Keith Moffat, »Vortex Dynamics: The Legacy of Helmholtz and Kelvin«, in: Alexey V. Borisov/Valery V. Kozlov/Ivan S. Mamaev/Mikhail A. Solokovskiy (Hg.), *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence*, Dordrecht: Springer, 2008, 1–10, hier: 3 f. Damit ist aber wiederum die Brücke zum Magnetismus und zur Elektrodynamik geschlagen, worauf bereits Helmholtz hingewiesen hat; vgl. Hermann Helmholtz, »Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen«, in: *Journal für Mathematik* 55 (1858), 25–55, hier: 25 f. Vgl. dazu auch Renzo L. Ricca, »Applications of Knot Theory in Fluid Mechanics«, in: *Banach Center Publications* 42 (1998), 321–346.

verzweigte Makromoleküle sein können, letztlich aber aus gleichen oder gleichartigen Einheiten, den so genannten Monomeren, bestehen. Wenn wir im Alltag von Polymeren sprechen, denken wir in der Regel an Kunststoffe wie Polyamid, Polyäthylen, Polyester oder Polyvinylchlorid, also an organische Verbindungen (die Kohlenstoffatome enthalten), doch sind auch anorganische Polymere wie z. B. Polyphosphate und Polysulfide bekannt, von denen jene etwa als Stabilisatoren in Lebensmitteln oder auch als Wasserenthärter Verwendung finden.

Mathematisch gesehen ist ein Polymer »ein eindimensionales Objekt, eingebettet in einen dreidimensionalen Raum.«[20] Diese Definition erinnert uns bereits an jene von Knoten. Und in der Tat ist für Polymere charakteristisch, dass ihre Monomere nicht linear aufgefädelt sind, sondern an vielen Stellen Knäuel bzw. Knoten bilden, welche ihre physikalischen und chemischen Eigenschaften beeinflussen. Auch wenn Polymere vor allem als chemische Substanzen betrachtet werden, sind sie also immer auch physikalisch relevant, denn »die Monomere eines Polymers bestehen meist aus einer Vielzahl von Atomen, die über ihre Wechselwirkungen zu räumlich benachbarten Atomen den Gesetzen der Physik unterliegen. Diese Wechselwirkungen beinhalten auch eine wechselseitige Abstoßung der Atome. Über die chemischen Bindungen der Atome führt dies dazu, dass sich benachbarte Ketten nicht gegenseitig durchdringen können. [...] Die Mathematik bietet mit der Knotentheorie ein sehr exaktes Mittel, die räumliche Konformation von paarweise disjunkten ringförmigen Strukturen zu analysieren.«[21]

Polymere enthalten praktisch immer verknotete Monomere, wobei die »Zahl und Komplexität der Verschlingungen von der Länge der Ausgangsketten« abhängt.[22] Wenn ein Polymer zumindest *einen* nicht-trivialen Knoten enthält, dann naheliegenderweise dessen einfachste Form, also den Dreifach- oder Kleeblattknoten, der in Abb. 6 auf der linken Seite dargestellt ist. Der Grad und die Art der Verknotung wirken sich auf die physikalischen Eigenschaften von Polymeren (z. B. ihre Elastizität und Reißfestigkeit[23]) ebenso aus wie auf ihre chemische Bindungsfähigkeit und

20. Vgl. Michael Lang, *Bildung und Struktur von polymeren Netzwerken* (Diss.), Regensburg 2004, 139 (URL: www.opus-bayern.de/uni-regensburg/volltexte/2005/430/index.html; zuletzt abgerufen am 17.09.2013).

21. Ebd. Wasserman und Cozzarelli sprechen in diesem Zusammenhang von »biochemischer Topologie«; vgl. Steven A. Wasserman/Nicholas R. Cozzarelli, »Biochemical Topology: Applications to DNA Recombination and Replication«, in: *Science* 232 (1986), 951–960.

22. Lang, *Polymere Netzwerke*, a. a. O. (Anm. 20), 147. Vgl. dazu auch Michael Brill/Philipp M. Diesinger/Dieter W. Heermann, »Knots in Macromolecules in Constraint Space« [2008], URL: arxiv.org/pdf/cond-mat/0507020v1.pdf (zuletzt abgerufen am 17.09.2013).

23. Zur Untersuchung physikalischer Eigenschaften von Polymeren mit Hilfe der Knotentheorie vgl. etwa Ralf Everaers, *Elastische Eigenschaften von Polymernetzwerken* (Berichte des Forschungszentrums Jülich, H. 3040), Jülich 1995, Wolfgang Michalke, *Computersimulationen zu energetischen und topologischen Effekten bei polymeren Netzwerken* (Diss.), Regensburg

Wirkungsweise. Spätestens hier zeigt sich, dass Polymere keineswegs bloß künstlich erzeugte Substanzen sind, sondern dass natürliche biologische Makromoleküle wie z. B. Proteine oder DNA wissenschaftlich noch viel bedeutsamer sind: »Tatsächlich wurden verschiedene Arten von Knoten in DNA und Proteinen gefunden, und es wurde vorgeschlagen, dass ihre ausgeprägte Starrheit und Chiralität zu ungewöhnlichen biochemischen Aktivitäten im Vergleich zu ihren linearen Analoga führen könnte. Zwei Beispiele von natürlichen Makromolekülen, die Knoten enthalten, sind das Lactoferrinprotein und die Ascorbinsäureoxidase, die eine bemerkenswerte Fähigkeit zum Transport von Eisen(III)-Ionen bzw. zur enzymatischen Oxidation besitzen. Andere geknotete Moleküle wie Circulin A und B (geknotete Proteine) und Cyclotide (geknotete Peptide) zeigen antivirale Aktivität gegen HIV.«[24] Andererseits erscheint es wenig überraschend, dass verknotete Makromoleküle, die natürlich vorkommen, wegen solcher Eigenschaften »eine echte Herausforderung an die Synthesestrategien und die Fähigkeiten von Chemikern« darstellen, spezifische molekulare Knoten *synthetisch* herzustellen, die ähnlich ›interessante‹ Eigenschaften für die biologische bzw. medizinische Forschung aufweisen.[25]

2002 (URL: www.bibliothek.uni-regensburg.de/opus/volltexte/2002/105/pdf/dr.pdf; zuletzt abgerufen am 17.09.2013), sowie Daniel Reith, *Computersimulationen zum Einfluss topologischer Beschränkungen auf Polymere* (Diss.), Mainz 2011 (URL: nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:77-30862; zuletzt abgerufen am 17.09.2013).

24. Camille Romuald/Frédéric Coutrot, »Bildung von Knoten mithilfe aktiver Metalltemplate: Zusammenspiel von Koordinationschemie und Katalyse, in: *Angewandte Chemie* 124 (2012), 2594–2595, hier: 2594. Selbst in der Tagespresse ist zu lesen, dass die Art, wie ein Molekül verknotet ist, sich darauf auswirkt, »welche Bindungen es eingehen kann. Zum Beispiel bei Prionen: Je nachdem, wie sich diese Proteine verknoten, sind sie wasserlöslich, leicht im Organismus abbaubar und harmlos – oder aber sie sind wasserunlöslich, schwer abbaubar und Auslöser der Creutzfeldt-Jakob-Krankheit«, vgl. Andreas Loos, »Der beste Weg, einen Knoten zu lösen«, in: *Berliner Zeitung* 22.12.2004 (URL: www.berliner-zeitung.de/10810590,10242366.html; zuletzt abgerufen am 17.09.2013). Als Chiralität (wörtlich: ›Händigkeit‹) eines Knotens wird übrigens der Umstand bezeichnet, dass er nicht an einer Achse so gespiegelt werden kann, dass das Spiegelbild identisch erscheint; dies trifft z. B. auf den Kleeblattknoten zu, in dessen Spiegelbild die Über- und Unterkreuzungen einen anders gerichteten Knoten ergeben. Die Chiralität ist also eine Knoteninvariante. Im Unterschied zum Kleeblattknoten ist beispielsweise der Achter- oder Listingknoten, der vier Kreuzungen aufweist, achiral (oder amphichiral). Die Chiralität oder Achiralität von Molekülen ist aber wiederum von großer Bedeutung für deren physikalische und chemische Eigenschaften; vgl. dazu etwa auch Ross S. Forgan/Jean-Pierre Sauvage/J. Fraser Stoddart, »Chemical Topology: Complex Molecular Knots, Links, and Entanglements«, in: *Chemical Reviews* 111 (2011), 5434–5464.

25. Vgl. dazu Jonathon E. Beves/Barry A. Blight/Christopher J. Campbell/David A. Leigh/Roy T. McBurney, »Strategien und Taktiken für die metallgesteuerte Synthese von Rotaxanen, Knoten, Catenanen und Verschlingungen höherer Ordnung«, in: *Angewandte Chemie* 123 (2011), 9428–9499, hier: 9477; der Aufsatz enthält ein langes Kapitel über »Knoten und Verschlingungen höherer Ordnung« (ebd., 9476–9484). Dieser Bereich der Biochemie scheint

Die topologischen Eigenschaften von biologischen Makromolekülen sind nicht erst durch die synthetische Biologie und die damit verknüpften Versuche der künstlichen Gensynthese wissenschaftlich bedeutsam geworden; vielmehr hängt bereits die Entdeckung der DNA-Struktur unmittelbar mit Beobachtungen über die räumliche Anordnung ihrer Komponenten zusammen.[26] Wie später Manfred Eigen betonte, konnten biologische Makromoleküle bzw. lebende Organismen nur unter ganz bestimmten Voraussetzungen entstehen, wozu neben den Bindungseigenschaften ganz bestimmter Kernsäuren und Proteine auch deren räumliche Strukturierung gehört.[27] Als Eigen seine Studie veröffentlichte, waren aber bereits in der DNA verkettete Ringe sowie bald darauf auch Kleeblattknoten entdeckt worden; kein Wunder, dass in weiterer Folge »a wealth of highly complex knotted DNA architectures, including composite knots, were discovered and imaged (Figure 3 [Abb. 8 auf der folgenden Seite]) by electron microscopy. Gel electrophoresis has also proven to be a remarkably useful tool in separating these entities as a result of the differences in compactness of knots as they become more complex. DNA topoisomerases, the enzymes that are responsible for the formation of these topological constructs, have been studied intensively and extensively; faulty versions are implicated in many forms of cancer.«[28]

sich enorm schnell zu entwickeln. Während Beves et al. (a. a. O.) schreiben, »von den 249 Primknoten mit drei bis zehn Überkreuzungspunkten« sei bis 2011 »nur eine Art, der Dreifachknoten, durch Totalsynthese hergestellt« worden, schreiben Engelhard et al. ein Jahr später: »Wichtige, in den letzten Jahren synthetisierte Vertreter umfassen die Hopf-Verschlingung (2-Catenan), den Kleeblattknoten (›trefoil knot‹), den Salomonischen Knoten, den fünffach verschlungenen Knoten (›pentafoil knot‹) sowie die Borromäischen Ringe«; vgl. David M. Engelhard/Sabrina Freye/Kristof Grohe/Michael John/Guido J. Clever, »NMR-spektroskopische Strukturaufklärung eines verflochtenen Koordinationskäfigs mit der Form eines doppelten Kleeblattknotens«, in: *Angewandte Chemie* 124 (2012), 4828–4832, hier: 4828.

26. Vgl. dazu James D. Watson, *Die Doppelhelix. Ein persönlicher Bericht über die Entdeckung der DNS-Struktur*, übers. von Vilma Fritsch, Reinbek: Rowohlt, 1969 (Orig. 1968). Da für die Entdeckung der DNA-Struktur die Röntgenkristallographie eine wesentliche Rolle spielte, erhielt denn auch Maurice Wilkins 1962 gemeinsam mit Watson und Francis Crick den Nobelpreis.
27. Vgl. dazu Manfred Eigen, »Selforganization of Matter and the Evolution of Biological Macromolecules«, in: *Die Naturwissenschaften* 58 (1971), 465–523.
28. Forgan et al, »Chemical Topology«, a. a. O. (Anm. 24), 5436. Wie Wasserman und Cozzarelli bereits bemerkten, ermöglicht die Anwendung der Knotentheorie auf die Untersuchung der Struktur von biologischen Makromolekülen »to distinguish between models by revealing which of an often astronomic number of possible linked forms arise as products. For example, [...] recombination mediated by the bacteriophage lambda Int (integrase) system should yield a particular class of knotted products. When 48 molecules were examined by electron microscopy, all were of the predicted class; included were two knots with 19 crossings, for which the correctly predicted structure represents only one of 10^8 possible forms!«; vgl. Wasserman/Cozzarelli, »Biochemical Topology«, a. a. O. (Anm. 21), 952.

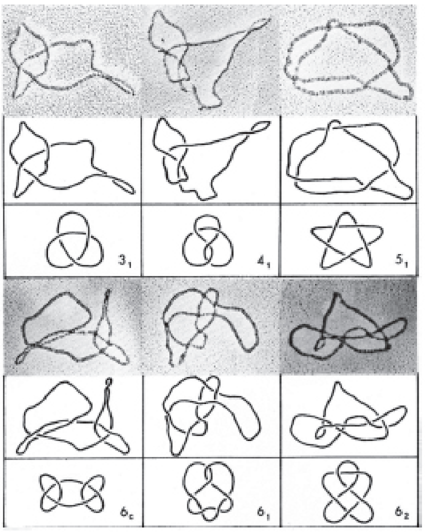

Abb. 8: Verschiedene Knotenformen, die in der DNA entdeckt worden sind; nach Forgan et al., »Chemical Topology« (2011), 5436, Abb. 3

Die Annahme, dass die für die Übertragung der genetischen Information wesentliche DNA eine Vielfalt von Knäueln, Knoten und Verkettungen aufweist, liegt allein schon deshalb nahe, weil sie in den Körperzellen keinen Platz fände, wenn sie einfach aufgefädelt wäre.[29] Wie wir heute wissen, müssen diese Körperzellen immer wieder erneuert werden[30] – und das heißt, dass auch die genetische Information durch Reduplikation der DNA immer wieder erneuert werden muss (wobei sie durchaus auch Veränderungen ausgesetzt ist). Für die Rekombination der DNA spielen Enzyme als Katalysatoren eine entscheidende Rolle. Die so genannten Rekombinasen steuern die Spaltung und Neuverknüpfung von DNA-Abschnitten auf eine Weise, die zum einen die genetische Diversität bewirkt, zum anderen aber auch die Reparatur mutierter DNA.

Da die Wirkung solcher Enzyme auf die DNA nicht direkt beobachtet werden kann, liegt nahe, für das bessere Verständnis der Enzymmechanismen die durch sie bewirkten topologischen Veränderungen der Kernsäuren zu studieren, und zwar mittels der so genannten Gelelektrophorese (vgl. Abb. 9). Die Form eines Knotens hat nämlich »Einfluss darauf, wie schnell der Knoten in der Elektrophorese wan-

29. Würde eine menschliche Körperzelle zu einem Basketball vergrößert, so würde die darin verschlungene und verknotete DNA eine Länge von über 200 km erreichen.

30. Anscheinend bildet unser Körper in jeder Sekunde rund 50 Millionen seiner 100 Billionen Zellen neu, damit er seine Lebensfunktionen aufrecht erhalten kann (was andererseits bedeutet, dass ebenso viele Zellen in jeder Sekunde ›absterben‹); vgl. Joachim Schüring, »Wie viele Zellen hat der Mensch«; URL: www.spektrum.de/alias/naklar/wie-viele-zellen-hat-der-mensch/620672 (zuletzt abgerufen am 17.09.2013).

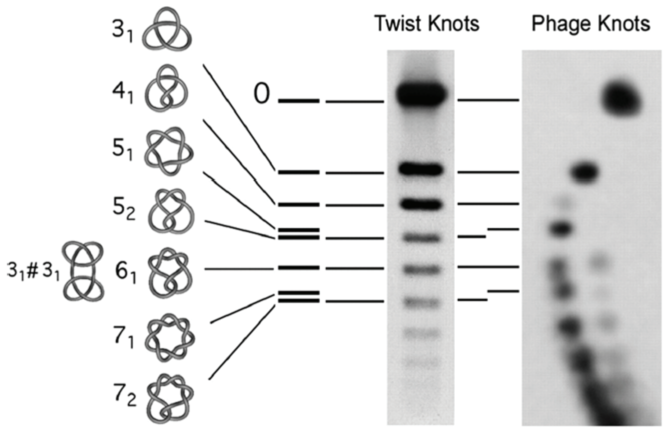

Abb. 9: Identifikation spezifischer Knotentypen durch ihre Identifikation im Gel; nach Arsuaga et al., »DNA Knots Reveal a Chiral Organization of DNA« (2005), 9167, Abb. 2

dert.«[31] Um beispielsweise herauszufinden, wie das Enzym *Tn*3 Resolvase auf die DNA wirkt, hat man kleine kreisförmige DNA-Moleküle (also ohne echte Knoten, sondern nur mit ›Unknoten‹) in vitro mit dem Enzym versetzt und beobachtet, welche Verknotungen es bewirkt: die Hopf-Verschlingung, den Achterknoten oder die Whitehead-Verschlingung (vgl. den linken Teil von Abb. 10 auf der folgenden Seite). In Kenntnis dieser Veränderungen lässt sich mathematisch ein Knoten-Gleichungssystem formulieren, um die Struktur des aktiven DNA-Protein-Komplexes ebenso herauszufinden wie die Änderungen, die durch den Enzymmechanismus bewirkt werden können (vgl. dazu den rechten Teil von Abb. 10, in dem S, R und T jeweils Knäuel bezeichnen).[32] Kann dieses Gleichungssystem für S, R und T gelöst werden? Wie Ernst und Sumners gezeigt haben, existiert tatsächlich eine eindeutige Lösung (vgl. dazu Abb. 11 auf der folgenden Seite). Somit wurde durch knotentheoretische Analyse die Wirkung des Enzyms bewiesen.

---

31. Andrew Read/Dian Donnai, *Angewandte Humangenetik*, übers. von Susanne Kuhlmann-Krieg, Kurt Beginnen, Sebastian Vogel und Sigrid Kontz, Berlin–New York: de Gruyter, 2008, 119 (Orig. 2007); andererseits hängt die Form der Knoten von der Sequenz der Basenpaare ab. Vgl. dazu auch Javier Arsuaga/Mariel Vazquez/Paul McGuirk/Sonia Trigueros/De Witt Sumners/Joaquim Roca, »DNA Knots Reveal a Chiral Organization of DNA in Phage Capsids«, in: *Proceedings of the National Academy of Science* 102 (2005), Nr. 26, 9165–9169.

32. Die Pionierarbeiten in diesem bis heute expandierenden Forschungsbereich stammen von Steven A. Wasserman/Nicholas R. Cozzarelli, »Determination of the Stereostructure of the Product of *Tn*3 Resolvase by a General Method«, in: *Proceedings of the National Academy of Science* 82 (1985), 1079–1083, und Claus Ernst/De Witt Sumners, »A Calculus for Rational Tangles: Applications to DNA Recombination«, in: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 108 (1990), 489–515. Zu den knotentheoretischen Gleichungen vgl. etwa auch De Witt Sumners, »DNA, Knots and Tangles«, in: Banagl/Vogel (Hg.), *The Mathematics of Knots*, a. a. O. (Anm. 11), 327–353.

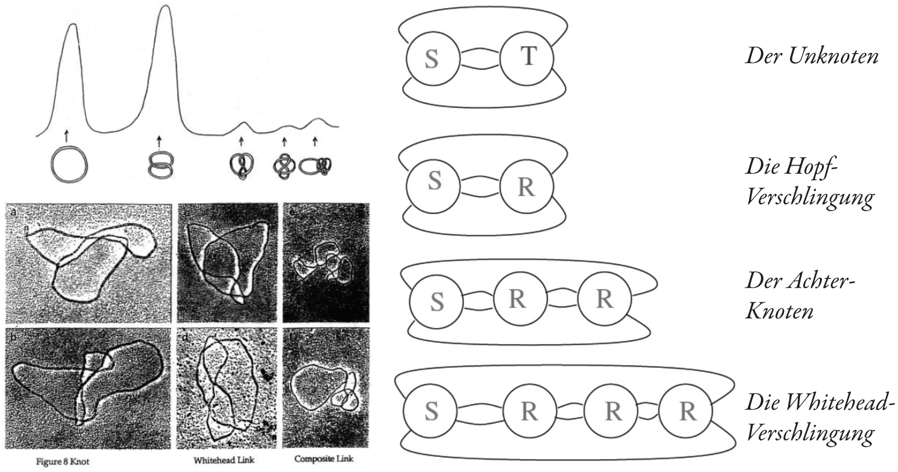

Abb. 10: Verschiedene Knotentypen, die in der DNA durch *Tn*3 Resolvase bewirkt werden; nach Ernst/Sumners, »A Calculus for Rational Tangles« (1990)

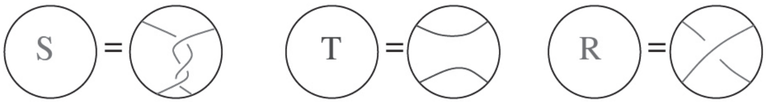

Abb. 11: Knoten und ihre Zuordnung zu den Elementen der theoretischen Rekonstruktion, nach Ernst/Sumners, »A Calculus for Rational Tangles« (1990)

4. Schluss

Obwohl die geschildeten Beispiele nur skizzenhaft wiedergegeben sind und keineswegs alle Anwendungsmöglichkeiten repräsentieren, sollte zumindest klar geworden sein, dass eine abstrakte mathematische Theorie wie die Knotentheorie tatsächlich dazu beitragen kann, Probleme in anderen Wissenschaftsbereichen zu lösen.[33] Der Umstand, dass Knoten im mathematischen (anders als im physikalischen) Sinne stets in sich geschlossene Strukturen sind, zeigt jedoch zudem, dass die Lösung von Problemen tatsächlich nicht immer analog zur Lösung (oder Zerschlagung[34]) von Knoten zu sehen ist; vielmehr können wir wichtige theoretische und praktische Probleme eben dadurch lösen, dass wir die Struktur von Knoten *untersuchen*.

---

33. Das heißt natürlich nicht, dass damit alle Probleme lösbar sind. Selbst in der Polymerforschung werden inzwischen derart komplexe Strukturen untersucht, dass die Knotentheorie dafür als Grundlage nicht mehr ausreicht; vgl. dazu etwa Ralf Everaers/Sathish K. Sukumaran/Gary S. Grest/Carsten Svaneborg/Arvind Sivasubramanian/Kurt Kremer, »Rheology and Microscopic Topology of Entangled Polymeric Liquids«, in: *Science* 303 (2004), 823–826.

34. Anscheinend *musste* Alexander den Gordischen Knoten zerschlagen, da dieser als *geschlossener* Knoten konstruiert war; vgl. Piotr Pieranski/Sylwester Przybyl/Andrzej Stasiak, »Gordian Unknots« [2008], URL: arXiv:physics/0103080v1 (zuletzt abgerufen am 17.09.2013).