ETH Zürich

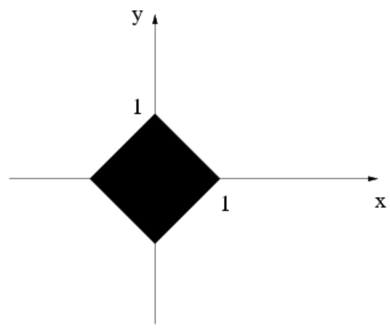
Analysis I Zwischenprüfung Winter 2014 – D-BAUG

Musterlösungen

Dr. Meike Akveld

Bitte wenden!

1. Die unten stehende Figur wird beschrieben durch . . .



√ (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Richtig!

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \leq 1\}$.

Nein, zum Beispiel ist der Punkt $(1, -1)$ nicht in der der skizzierten Menge, obwohl er diese Ungleichung erfüllt.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$.

Nein, zum Beispiel ist der Punkt $(1, 1)$ nicht in der skizzierten Menge, obwohl er diese Ungleichung erfüllt.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \min\{|x|, |y|\} \leq 1\}$.

Nein, zum Beispiel ist der Punkt $(1, 1)$ nicht in der skizzierten Menge, obwohl er diese Ungleichung erfüllt.

Siehe nächstes Blatt!

2. Die Punktemenge $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = \mathrm{Im}(z) + 1\}$ ist ...

(a) eine Gerade.

(b) eine Ellipse.

√ (c) eine Parabel.

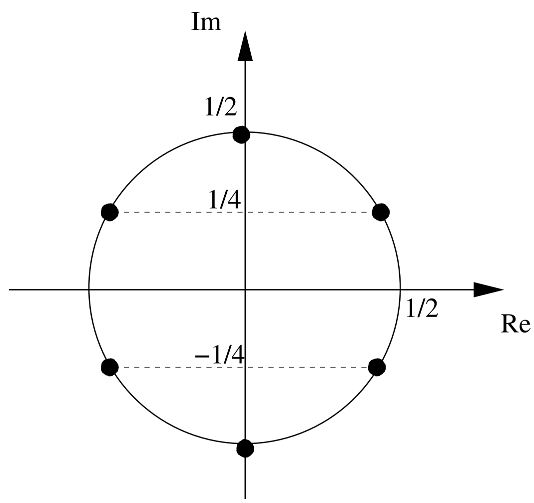
(d) eine Hyperbel.

Für $z = x + iy$ gilt $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\mathrm{Im}(z) + 1 = y + 1$. Die Menge ist also gegeben durch

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = y^2 + 2y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

Diese Gleichung beschreibt eine Parabel.

Bitte wenden!



3. Die schwarzen Punkte in der unten stehenden Figur entsprechen den Lösungen der Gleichung . . .

(a) $z^6 = \frac{1}{2}$.

Nein, der Kreis hat nicht Radius $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

(b) $z^6 = \frac{1}{64}$.

Nein, es gibt keine reelle Lösung in der Skizze.

√ (c) $z^6 = -\frac{1}{64}$.

Richtig!

(d) $z^8 = \frac{1}{256}$.

Nein, diese Gleichung hat 8 verschiedene Lösungen.

Siehe nächstes Blatt!

4. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{3} - i$ und $z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Welche Aussagen über $z = \frac{z_1}{z_2}$ sind korrekt?

(a) $|z| = 4$ und $\arg(z) = -\frac{5\pi}{6}$

√ (b) $|z| = 4$ und $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

(c) $|z| = 1$ und $\arg(z) = -\frac{5\pi}{6}$

(d) $|z| = 1$ und $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

(e) z ist nicht eindeutig bestimmt, da z_2 nicht reell ist.

Wir schreiben z_1 und z_2 in Polarform. Es gilt $\arg(z_1) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ und $|z_1| = 2$. Weiter sehen wir direkt, dass $\arg(z_2) = -\frac{2\pi}{3}$ und $|z_2| = \frac{1}{2}$. Damit folgt $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$ und $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 4$.

5. Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Die Summe zweier divergenter Folgen ist divergent.

$\surd$ (a) falsch

(b) richtig

Die Aussage ist falsch. Zu einer divergenten Folge x_n ist auch die Folge $-x_n$ divergent, jedoch ist $x_n + (-x_n) = 0$ die Nullfolge und damit konvergent.

Siehe nächstes Blatt!

6. Betrachten Sie die Folge

$$a_n = \left(\frac{(5+n)^{100}}{5^{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{5^n}{(4+n)^{100}}\right).$$

Bestimmen Sie den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

√ (a) $a = \frac{1}{5}$

(b) $a = 1$

(c) $a = \frac{5}{4}$

(d) $a = \left(\frac{5}{4}\right)^{100}$

(e) Diese Folge konvergiert nicht.

Wir rechnen

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{(5+n)^{100}}{5^{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{5^n}{(4+n)^{100}}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5+n}{4+n}\right)^{100} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5/n+1}{4/n+1}\right)^{100} \longrightarrow \frac{1}{5} \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

7. Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{Z}, k > 1$, so dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{kn}}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{4}\right)^n$$

beide konvergieren.

(a) $k = 2$

√ (b) $k = 3$

(c) $k = 4$

(d) $k = 2$ und $k = 3$

(e) $k = 3$ und $k = 5$

Die erste Reihe ist für gerade k die hamonische Reihe und damit divergent, für ungerade k als Leibniz-Reihe jedoch konvergent. Die zweite ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{k}{4}$ und konvergiert genau für $|q| < 1$ also $k = 2, 3$. Damit konvergieren beide Reihen genau für $k = 3$.

Siehe nächstes Blatt!

8. Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$\text{I.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}; \qquad \text{II.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}; \qquad \text{III.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

(a) keine einzige

√ (b) nur II

(c) nur III

(d) nur I und II

(e) nur I und III

Die Glieder von I bilden keine Nullfolge, also ist I divergent. II ist die Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ und damit konvergent. III ist die harmonische Reihe und divergent.

Bitte wenden!

9. Bestimmen Sie die Inverse von $f(x) = \frac{1}{1+ae^x}$ mit $a > 0$ und deren maximalen Definitionsbereich.

(a) $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in (0, \infty)$

(b) $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

$\checkmark$ (c) $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in (0, 1)$

(d) $f^{-1}(x) = 1 + ae^x$, $x \in \mathbb{R}$

Es gilt

$$y = \frac{1}{1+ae^x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = 1 + ae^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{y} - 1}{a} = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1-y}{ay}\right) = x,$$

also $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$. Der Definitionsbereich ergibt sich aus dem Definitionsbereich des natürlichen Logarithmus, dieser ist für positive Zahlen definiert. Also muss in unserem Fall $\frac{1-x}{ax} > 0$ gelten. Dies ist für $x = 0$ nicht definiert und für $x < 0$ nicht erfüllbar. Für $x > 0$ ist die Bedingung äquivalent zu $1 - x > 0$ und damit lautet der Definitionsbereich $(0, 1)$.

10. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen ist ***nicht*** hinreichend um zu garantieren, dass f eine Inverse hat?

(a) $f(x) = ax^3, a \neq 0.$

Die Inverse auf ganz $\mathbb{R}$ lautet $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{a}}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{\frac{|x|}{a}}, & x < 0 \end{cases}$.

(b) f ist streng monoton wachsend und surjektiv.

Streng monoton wachsende Funktionen sind invertierbar, die Surjektivität liefert $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich.

(c) f ist bijektiv.

Bijektive Funktionen sind immer invertierbar.

√ (d) f ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Dies ist im Allgemeinen nicht hinreichend. Ein Gegenbeispiel ist $f(x) = \sin x$.

Bitte wenden!

11. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$. Wir möchten die Nullstelle dieser Funktion mit Hilfe des Newton-Verfahrens bestimmen. Sei $x_0 \neq 0$ ein beliebiger Startwert des Newton-Verfahrens, so gilt für die Folge x_n, welche wir iterativ erhalten:

(a) Die Folge ist konstant gleich x_0.

(b) Die Folge konvergiert nur, wenn man nahe genug bei der Nullstelle anfängt.

(c) Die Folge divergiert immer nach unendlich.

√ (d) Die Folge oszilliert zwischen x_0 und $-x_0$.

Für $x_0 > 0$ liefert der erste Schritt des Newton-Verfahrens

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^{1/2}}{1/2 \cdot x_0^{-1/2}} = x_0 - 2x_0 = -x_0.$$

Ebenso gilt für $x_0 < 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{(-x_0)^{1/2}}{1/2 \cdot (-x_0)^{-1/2} \cdot (-1)} = x_0 - 2x_0 = -x_0.$$

Siehe nächstes Blatt!

12. Betrachten Sie die Bernoulli'sche Spirale

$$r(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t\right) .$$

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Der Ortsvektor $r(t)$ eines Punktes auf der Spirale steht immer senkrecht auf seinem Tangentialvektor.

(a) wahr

√ (b) falsch

Es gilt $\dot{r}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$ und damit

$$\begin{aligned}
\langle r(t), \dot{r}(t)\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= e^{2t}(\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \sin(t)\cos(t)) \\
&= e^{2t} > 0, \text{ für alle } t.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

13. Betrachten Sie nochmals die Bernoulli'sche Spirale

$$r(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t\right).$$

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Der Quotient der x-Koordinaten zweier sukzessiver Schnittpunkte der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

√ (a) wahr

(b) falsch

Wir bestimmen zuerst die Schnittpunkte der Spriale mit der x-Achse, das sind alle Punkte mit y-Koordinate 0.

$$e^t \sin t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Die x-Koordinate dieser Punkte ist

$$e^{\pi k} \cos(\pi k) = \begin{cases} e^{\pi k} > 0,\ k \text{ gerade} \\ -e^{\pi k} < 0,\ k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Für gerade k haben wir also einen Schnittpunkt der Spirale mit der positiven x-Achse. Der Quotient der x-Koordinaten zweier aufeinanderfolgender solcher Schnittpunkte ist somit

$$\frac{e^{\pi(k+2)}}{e^{\pi k}} = e^{2\pi}.$$

Der Quotient hängt also nicht von k ab und ist damit konstant.

14. Sei $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$. Bestimmen Sie das Konvergenzintervall von $P(x)$

(a) $[1, 3)$

√ (b) $[1, 3]$

(c) $[-1, 1)$

(d) $[-2, 2]$

(e) $\mathbb{R}$

Das Entwicklungszentrum ist offensichtlich $x_0 = 2$ und der Konvergenzradius berechnet sich durch

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^2}{1} = 1.$$

Das Konvergenzintervall hat also die Randpunkte 1 und 3. Für $x = 1$ konvergiert die Reihe als Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ebenfalls. Für $x = 3$ ergibt sich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, welche ebenfalls konvergiert.

15. Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^2 in der Taylorreihe von $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ um $x_0 = 0$.

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) 1

√ (d) 3

(e) 6

Der Koeffizient ist $\frac{f''(0)}{2}$ und das kann man direkt berechnen. Alternativer Lösungsweg mit geometrischer Reihe:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2} &= \frac{1}{1-(-x)} \cdot \frac{1}{1-(-x)} = (1 - x + x^2 - \cdots) \cdot (1 - x + x^2 - \cdots) \\ &= 1 - 2x + 3x^2 - \cdots\end{aligned}$$

16. Sei $T_5(x) = 3x^2 - 5x^3 + 7x^4 + 3x^5$ das Taylorpolynom 5. Grades an der Stelle $x_0 = 0$ von f. Dann ist $f'''(0) = \ldots$

$\surd$ (a) $-30.$

(b) $-15.$

(c) $-5.$

(d) $-\frac{5}{6}.$

(e) $-\frac{1}{6}.$

Die dritten Ableitungen von T_5 und f stimmen bei $x_0 = 0$ überein. Also

$$f'''(0) = T_5'''(0) = -30.$$

Alternativ kann man auch den Koeffizienten von x^3 in der Taylorreihe von $f(x)$ betrachten, dieser lautet $\frac{f'''(0)}{6}$. Ein Koeffizientenvergleich mit T_5 ergibt ebenfalls die korrekte Lösung.

Bitte wenden!

17. Betrachten Sie die Obersumme O_n und die Untersumme U_n zur Bestimmung der Fläche unter dem Funktionsgraph der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Was ist der kleinste Wert von $n \in \mathbb{N}$, so dass $O_n - U_n \leq 0.1$ gilt?

(a) 5

$\surd$ (b) 10

(c) 11

(d) 20

(e) 21

Da f auf $[0, 1]$ streng monoton wachsend ist, unterscheidet sich die Obersumme von der Untersumme genau um den letzten Summanden, bzw. die Fläche des letzten Balken. Dieser Balken hat Breite $1/n$ und Höhe 1, also Fläche $1/n$. Die Ungleichung lautet also $1/n \leq 0.1$, was umgeformt $10 \leq n$ ergibt. Damit ist $n = 10$ die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft.

18. Wenn das bestimmte Integral von -1 bis 1 der Funktion $f(x) = \cos x \cdot e^{-x^2}$ gleich k ist, so ist das bestimmte Integral von -1 bis 0 der Funktion $f(x) = \cos x \cdot e^{-x^2}$ gleich ...

(a) $-2k$.

(b) $-k$.

(c) $-\frac{k}{2}$.

√ (d) $\frac{k}{2}$.

(e) $2k$.

Es gilt

$$f(-x) = \cos(-x) \cdot e^{-(-x)^2} = \cos x \cdot e^{-x^2} = f(x),$$

der Funktionsgraph von f ist also symmetrisch bezüglich der y-Achse, es folgt also

$$k = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

und damit $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{k}{2}$.

Bitte wenden!

19. Sei $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t$. Welche der folgenden Aussagen ist ***falsch***?

(a) $f(0) = 0$

$f(0) = \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t = 0.$

(b) $f(1) > 0$

$f(1) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t > 0$, da der Integrand auf $(0,1)$ positiv ist.

(c) $f(-1/2) < 0$

$f(-1/2) = \int_0^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1/2}^0 \frac{1}{\sqrt{t^3+2}} < 0$, da der Integrand auf $(-1/2,0)$ positiv ist.

√ (d) $f(-1) > 0$

$f(-1) = \int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{t^3+2}} < 0$, da der Integrand auf $(-1,0)$ positiv ist.

Siehe nächstes Blatt!

20. Sei $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t$. Welche der folgenden Aussagen über $f'(1)$ ist richtig?

(a) $f'(1)$ kann man nicht bestimmen, weil man die Stammfunktion nicht kennt.

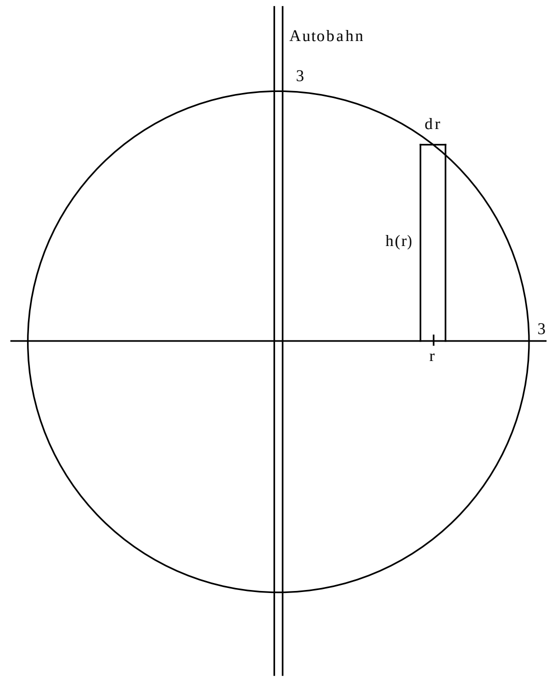
√ (b) $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(d) $f'(1) = \operatorname{arsinh}(1)$

Das ist eine Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, es gilt $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+2}}$. Damit gilt $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bitte wenden!



21. Betrachten Sie eine kreisförmige Stadt, die von einer geraden Autobahn durchquert wird, welche genau durchs Stadtzentrum geht. Der Radius der Stadt ist 3 Kilometer und die Bevölkerungsdichte (Anzahl Personen pro Quadratkilometer) ist gegeben durch

$$f(r) = 12000 - 2000r,$$

wobei r die Distanz zur Autobahn in Kilometern ist. Welche der folgenden Formeln berechnet die Einwohnerzahl der Stadt?

(a) $\int_0^3 (12000 - 2000r)\,\mathrm{d}r$

(b) $2\int_0^3 (12000 - 2000r)\sqrt{9 - r^2}\,\mathrm{d}r$

√ (c) $4\int_0^3 (12000 - 2000r)\sqrt{9 - r^2}\,\mathrm{d}r$

(d) $\int_0^3 2\pi r(12000 - 2000r)\,\mathrm{d}r$

Siehe nächstes Blatt!

(e) $2\int_0^3 2\pi r(12000-2000r)\,\mathrm{d}r$

Wie in der Skizze nehmen wir an, dass die Autobahn die y-Achse ist. Wir betrachten infinitesimal dünne Balken mit Breite $\mathrm{d}r$ und Höhe $h(r)$, wobei $h(r) = \sqrt{9-r^2}$. Da die Bevölkerungsdichte nur von der Distanz zur Autobahn abhängt, ist diese auf einem solchen dünnen Balken nahezu konstant. Die Einwohnerzahl auf dem Balken beträgt also $h(r)\cdot \mathrm{d}r \cdot f(r)$. Aufsummieren dieser Balken im ersten Quadranten ergibt schliesslich $\int_0^3 (12000-2000r)\sqrt{9-r^2}\,\mathrm{d}r$ und die Gesamtbevölkerung beträgt

$$4\int_0^3 (12000-2000r)\sqrt{9-r^2}\,\mathrm{d}r.$$

22. Für $0<a<b$ und $0<c<d$ sei $f:[a,b]\to[c,d]$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende und surjektive Funktion mit Umkehrfunktion f^{-1}. Dann ist $\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = \dots$

(a) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

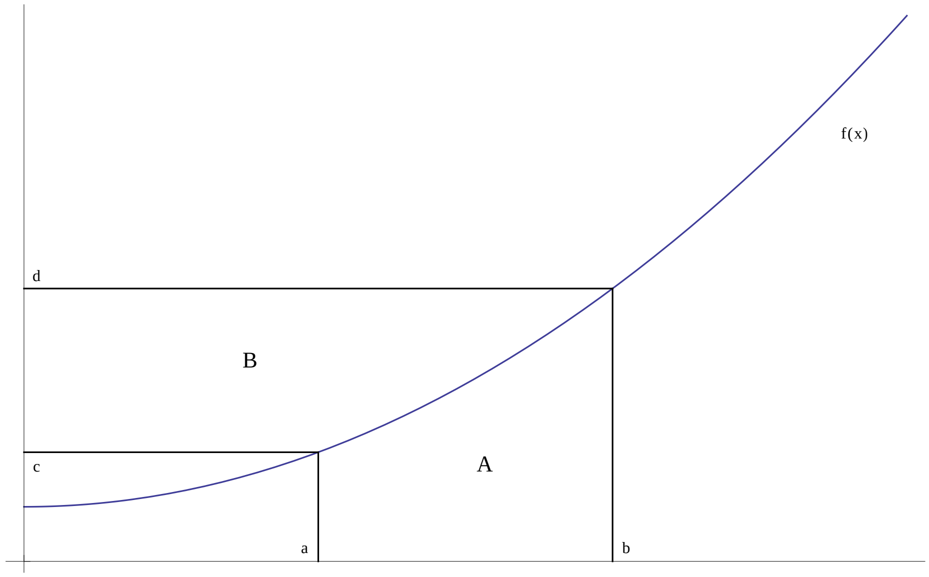
√ (b) $bd-ac-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) $\frac{1}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$.

(d) $bd-ac-\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

Da f streng monoton wachsend und surjektiv ist, gilt $f(a)=c$ und $f(b)=d$, sh. Skizze. Den Graphen von f^{-1} sehen wir, wenn wir die Rollen der x- und y-Achse vertauschen, es gilt also $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$ und $\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = B$. Die korrekte Beziehung lässt sich nun einfach aus der Skizze ablesen.

Bitte wenden!



23. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 0.05W - 200$$

lautet . . .

(a) $W(t) = Ae^{t} + 4000$ für $A \in \mathbb{R}$.

(b) $W(t) = Ae^{-10t}$ für $A \in \mathbb{R}$.

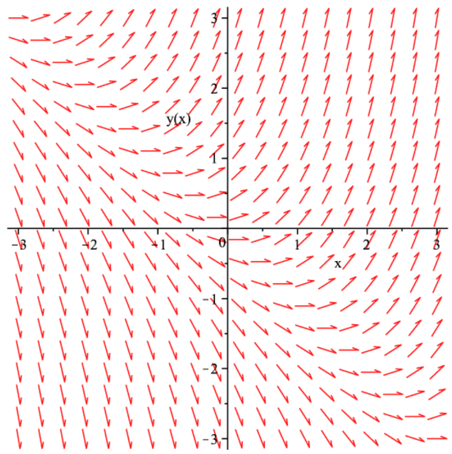
(c) $W(t) = \frac{Ae^{0.05t}}{0.05}$ für $A \in \mathbb{R}$.

√ (d) $W(t) = Ae^{0.05t} + 4000$ für $A \in \mathbb{R}$.

Die homogene Gleichung lautet $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} - 0.05W = 0$ und hat das charakterische Polynom $\lambda - 0.05 = 0$. Die allgemeine homogene Lösung lautet somit $Ae^{0.05t}$. Für die partikuläre Lösung wählen wir den konstanten Ansatz $q(t) = B$, wenn wir diesen in die inhomogene Gleichung einsetzen, dann ergibt sich $B = 4000$. Die allgemeine inhomogene Lösung ist die Summe der allgemeinen homogenen Lösung und der partikulären Lösung.

Siehe nächstes Blatt!

24. Zu welcher Differentialgleichung gehört dieses Richtungsfeld?



(a) $y' = y - x$

Auf der Diagonalen $y = x$ gilt nicht $y' = 0$.

√ (b) $y' = y + x$

Richtig!

(c) $y' = x - y$

Auf der Diagonalen $y = x$ gilt nicht $y' = 0$.

(d) $y' = xy$

Bitte wenden!

Auf der x- und der y-Achse gilt nicht $y' = 0$.

(e) $y' = \frac{x}{y}$

Auf der y-Achse gilt nicht $y' = 0$.

25. Bestimmen Sie die Form der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 16y(x) = e^{3x}.$$

√ (a) $y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{25}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{5}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(d) $y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{4x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(e) $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{5}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Die homogene Gleichung lautet $y''(x) + 16y(x) = 0$ und hat das charakterische Polynom $\lambda^2 + 16 = 0$ mit den Lösungen $\lambda = \pm 4i$. Die allgemeine homogene Lösung lautet somit $c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$. Für die partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz $q(x) = Be^{3x}$, wenn wir diesen in die inhomogene Gleichung einsetzen, dann ergibt sich $9Be^{3x} + 16Be^{3x} = e^{3x}$ und daraus $B = \frac{1}{25}$. Die allgemeine inhomogene Lösung ist die Summe der allgemeinen homogenen Lösung und der partikulären Lösung.