D-ITET
Meike Akveld

Lösung: Komplexe Analysis

Aufgabe 1: Multiple Choice [*16 Punkte*]

(1.a) [*2 Punkte*] Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp\left(\frac{3}{4}\pi \mathrm{i}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \mathrm{i}b\right)$$

reell?

i. $b = 1$ ii. $b = 2$ iii. $b = 0$ iv. $b = \sqrt{2}$

(1.b) [*2 Punkte*] Seien $z = 2(\cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4))$ und $w = 4(\cos(\pi/6) + \mathrm{i}\sin(\pi/6))$. Was ist dann der Wert von zw^{-1}?

i. $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

iii. $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

ii. $8\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

iv. $8\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

(1.c) [*2 Punkte*] Welche Menge ist in Abbildung 1 grau gefärbt?

i. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| > 1 \text{ und } |z| < 1\}$

iii. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 1 \text{ und } 2|z| < 4\}$

ii. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-\mathrm{i}| > 1 \text{ und } 2|z| < 1\}$

iv. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| > 1 \text{ und } |z| < 2\}$

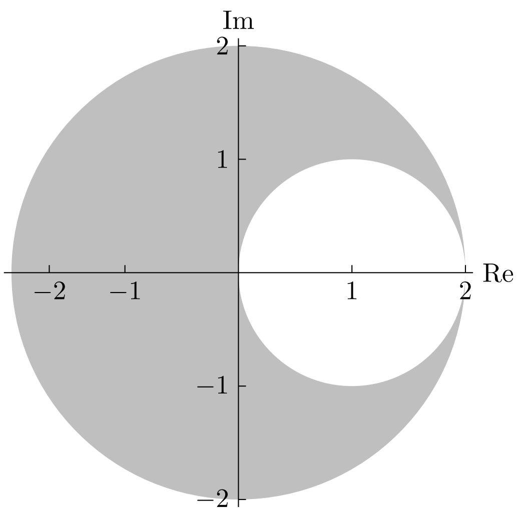

Abbildung 1: Eine graue Menge.

(1.d) [*2 Punkte*] Welche der folgenden Funktionen ist holomorph?

i. $f(x+\mathrm{i}y) = x^2 - 2\mathrm{i}xy + y^2$

iii. $f(x+\mathrm{i}y) = x^2 + y^2$

ii. $f(x+\mathrm{i}y) = y + \mathrm{i}x$

iv. $f(x+\mathrm{i}y) = -y + \mathrm{i}x$

(1.e) [*2 Punkte*] Was ist der Wert des Integrals

$$\int_\gamma \exp(z^3)\,\mathrm{d}z,$$

wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ den Einheitskreis mit negativer mathematischer Orientierung parametrisiert?

i. 1 ii. 0 iii. $-\mathrm{e}$ iv. $-3\mathrm{e}$

(1.f) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer Polstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ an $z_0 \in \mathbb{C}$. Was ist dann die Ordnung der Polstelle z_0 von f'?

i. $n+1$ ii. $n-1$ iii. n iv. $2n$

(1.g) [*2 Punkte*] Sei

$$f(t) := \begin{cases} \sin(t) & \text{wenn } t \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

i. $(f * f)(0) < 0$ iii. $(f * f)(0) = 0$

ii. $(f * f)(0) > 0$ iv. $(f * f)(0)$ konvergiert nicht

(1.h) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante, gerade Funktion mit kontinuierlicher Fouriertransformation $\widehat{f}$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

i. $\widehat{f}(s) \in \mathbb{R}$, $(f')^\frown(s) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$. iii. $\widehat{f}(s), (f')^\frown(s) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$.

ii. $\widehat{f}(s), (f')^\frown(s) \in \mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$. iv. $\widehat{f}(s) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, $(f')^\frown(s) \in \mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Residuensatz [*16 Punkte*] Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 6x + 10)^2}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Hinweis: Sollte ein Kurvenintegral gegen Null konvergieren in Ihrer Berechnung, so argumentieren Sie warum dies der Fall ist.

Lösung. Wir betrachten die Wege $\gamma_R^{(0)}, \gamma_R^{(1)} : [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\gamma_R^{(0)}(t) = 2Rt - R, \qquad \gamma_R^{(1)}(t) = R\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}, \qquad t \in [0,1].$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(0)}} \frac{1}{(z^2 - 6z + 10)^2}\,\mathrm{d}z &= \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{2R}{((2Rt-R)^2 - 12Rt + 6R + 10)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2 - 6x + 10)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 6x + 10)^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

mit der Substitution $x = 2Rt - R$. Ausserdem hatten wir in der Vorlesung gesehen, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(1)}} \frac{1}{(z^2 - 6z + 10)^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

gilt, da $(z^2 - 6z + 10)^{-2}$ sich schreiben lässt als $p(z)/q(z)$, mit $p(z) = 1$ und $q(z) = (z^2 - 6z + 10)^2$ zwei Polynomen, welche $\deg p + 2 = 2 < 4 = \deg q$ erfüllen. Wir werden im Folgenden den Residuensatz anwenden. Ist $R > \sqrt{10}$, so hat

$$\frac{1}{(z^2 - 6z + 10)^2} = \frac{1}{(z - 3 - \mathrm{i})^2 (z - 3 + \mathrm{i})^2}$$

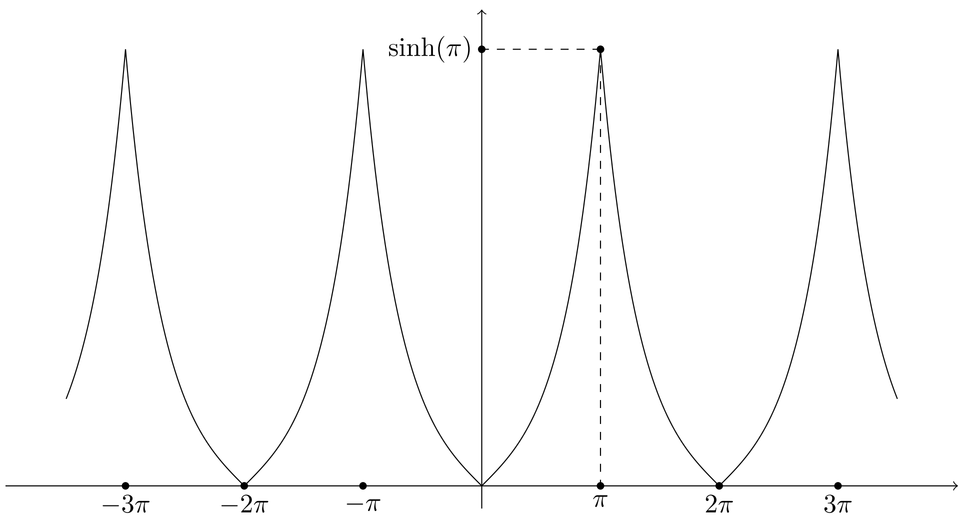

Abbildung 2: Die Funktion f.

innerhalb des Weges $\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}$ nur eine Singularität: Einen Pol zweiter Ordnung an der Stelle $z_0 = 3 + \mathrm{i}$. Wir berechnen das Residuum an z_0 mit der aus der Übung bekannten Formel

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2-6z+10)^2}, z_0\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z_0} \frac{1}{(z-3+\mathrm{i})^2} = \frac{-2}{(2\mathrm{i})^3} = \frac{1}{4\mathrm{i}}.$$

Damit gilt laut dem Residuensatz, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-6x+10)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}} \frac{1}{(z^2-6z+10)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2-6z+10)^2}, z_0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 3: Fourierreihe [*16 Punkte*] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die **gerade 2π-periodische Funktion**, die durch

$$f(t) = \sinh(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2},$$

für $t \in [0, \pi]$, gegeben ist.

(3.a) [*4 Punkte*] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(3.b) [*10 Punkte*] Weisen Sie nach, dass die Koeffizienten a_n der reellen Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

von f gegeben sind durch

$$a_n = \frac{2(-1)^n \cosh(\pi) - 2}{\pi(n^2+1)}, \qquad n \geq 0.$$

Hinweis: Es gilt

$$\cosh(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(3.c) [*2 Punkte*] Berechnen Sie nun auch die Koeffizienten b_n.

Lösung. (3.a) Wir zeichnen die Skizze in Abbildung 2.

(3.b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \sinh(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi \left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi \left(\mathrm{e}^{t+\mathrm{i}nt} - \mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}nt} + \mathrm{e}^{t-\mathrm{i}nt} - \mathrm{e}^{-t-\mathrm{i}nt}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{t+\mathrm{i}nt}}{1+\mathrm{i}n}\Bigg|_0^\pi + \frac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}nt}}{1-\mathrm{i}n}\Bigg|_0^\pi + \frac{\mathrm{e}^{t-\mathrm{i}nt}}{1-\mathrm{i}n}\Bigg|_0^\pi + \frac{\mathrm{e}^{-t-\mathrm{i}nt}}{1+\mathrm{i}n}\Bigg|_0^\pi \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{\pi+\pi\mathrm{i}n} - 1}{1+\mathrm{i}n} + \frac{\mathrm{e}^{-\pi+\pi\mathrm{i}n} - 1}{1-\mathrm{i}n} + \frac{\mathrm{e}^{\pi-\pi\mathrm{i}n} - 1}{1-\mathrm{i}n} + \frac{\mathrm{e}^{-\pi-\pi\mathrm{i}n} - 1}{1+\mathrm{i}n} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi} - 1}{1+\mathrm{i}n} + \frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi} - 1}{1-\mathrm{i}n} + \frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi} - 1}{1-\mathrm{i}n} + \frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi} - 1}{1+\mathrm{i}n} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^n\cosh(\pi) - 1}{1+\mathrm{i}n} + \frac{(-1)^n\cosh(\pi) - 1}{1-\mathrm{i}n} \right) = \frac{2(-1)^n\cosh(\pi) - 2}{\pi(1+n^2)},
\end{aligned}$$

für $n \geq 0$.

(3.c) Da f gerade ist, folgt, dass $b_n = 0$, für $n \geq 1$.

Aufgabe 4: Laplacetransformation [*16 Punkte*] Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = 1 - t^2, \qquad t > 0,$$
$$\dot{y}(0) = -1, \qquad y(0) = 1.$$

Hinweis: Sind $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, mit $\operatorname{Re} s > 0$, und

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}](s) = \frac{1}{s-a},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, mit $\operatorname{Re} s > a$.

Lösung. Sei $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$. Laut dem Differentiationssatz aus der Vorlesung gilt

$$\mathcal{L}[\dot{y}](s) = s\mathcal{L}[y](s) - y(0) = sY(s) - 1$$

und

$$\mathcal{L}[\ddot{y}](s) = s\mathcal{L}[\dot{y}](s) - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - s + 1.$$

Mit diesen Berechnungen und mit Hilfe des Hinweises oben, berechnen wir

$$s^2Y(s) - s + 1 + sY(s) - 1 - 2Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} = \frac{s^2-2}{s^3}$$

sodass

$$Y(s) = \frac{s^4+s^2-2}{s^3(s^2+s-2)} = \frac{(s^2-1)(s^2+2)}{s^3(s-1)(s+2)} = \frac{(s+1)(s^2+2)}{s^3(s+2)} = \frac{s^3+s^2+2s+2}{s^3(s+2)}.$$

Wir benutzen nun die Partialbruchzerlegung

$$\frac{s^3+s^2+2s+2}{s^3(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+2},$$

welche

$$s^3+s^2+2s+2 = A(s^3+2s^2) + B(s^2+2s) + C(s+2) + Ds^3$$

impliziert. Wir lösen das lineare Gleichungssystem $A + D = 1$, $2A + B = 1$, $2B + C = 2$, $2C = 2$ durch $A = 1/4$, $B = 1/2$, $C = 1$, $D = 3/4$. Damit folgt

$$Y(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{3}{4(s+2)}.$$

Wir benutzen nun den Hinweis ein weiteres Mal zusammen mit der Eindeutigkeit der Laplacetransformation (Satz von Lerch), um zu schliessen, dass

$$y(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}.$$