1. [6 Punkte] Gegeben sei die Schar der Ellipsoide

$$4x^2 + 3y^2 + 8z^2 = c, \qquad c > 0.$$

Welches dieser Ellipsoide berührt die Ebene $2x + 3y + 4z = 12$ tangential, und in welchem Punkt?

Lösung:
Wir stellen zunächst fest, dass die Ellipsoidenschar genau den (nichttrivialen) Niveauflächen der Funktion $f(x, y, z) = 4x^2 + 3y^2 + 8z^2$ entspricht. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Gradient von f in (x_0, y_0, z_0) senkrecht auf der Niveaufläche von f steht, welche durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) geht. Somit berührt eines der Ellipsoide die Ebene genau dann im Punkt (x_0, y_0, z_0) tangential, wenn der Gradient von f in (x_0, y_0, z_0) parallell zum Normalenvektor der Ebene ist; in Formeln

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0) \stackrel{!}{=} \lambda \cdot \vec{n}_E \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 8x_0 \\ 6y_0 \\ 16z_0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Auflösen ergibt

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{4} \right)$$

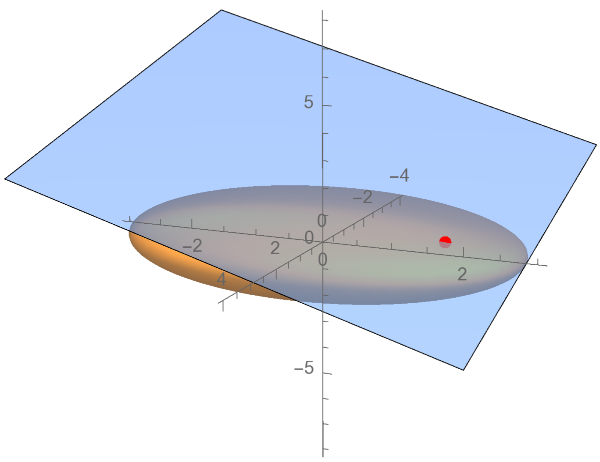
und da dieser Punkt in der Ebene liegen muss, ergibt sich

$$12 \stackrel{!}{=} 2x_0 + 3y_0 + 4z_0 = \frac{\lambda}{2} + \frac{3\lambda}{2} + \lambda = 3\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 4.$$

Zusammengefasst erhalten wir also $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 1)$ und da dieser Punkt auch im Ellipsoiden liegen muss, können wir einsetzen und es ergibt sich

$$c = 4x_0^2 + 3y_0^2 + 8z_0^2 = 4 + 12 + 8 = 24.$$

Das gesuchte Ellipsoid ist somit $4x^2 + 3y^2 + 8z^2 = 24$.



2. **[6 Punkte]** Man bestimme die ersten drei nicht-verschwindenden Terme der Taylorentwicklung von $f(x) = \tanh(x)$ in $x_0 = 0$.

Lösung:

Das Ausrechnen der Koeffizienten über die Formel $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ist wegen den entstehenden Ableitungen sehr mühsam. Besser ist folgender Weg: Für die Potenzreihe machen wir den Ansatz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Umstellen liefert

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \cosh(x) = \sinh(x). \tag{1}$$

Wegen $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} x^n$ folgt nun zunächst

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^n}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

und

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^n}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Aus der Gleichung (1) erhalten wir damit

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

und wenn wir die jeweils ersten Reihenglieder ausschreiben, ergibt sich

$$\begin{aligned} \big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots\big) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + \cdots\right) \\ = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + \cdots . \end{aligned}$$

Die linke Seite ausmultipliziert mit Termen bis zum Grad 5 ist

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \\ &+ \frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{2} a_1 x^3 + \frac{1}{2} a_2 x^4 + \frac{1}{2} a_3 x^5 + \\ &+ \frac{1}{24} a_0 x^4 + \frac{1}{24} a_1 x^5 + \cdots \end{aligned}$$

und wir können nun einen Koeffizientenvergleich durchführen:

$$\begin{aligned} &\text{für } x^0: && a_0 = 0 && \\ &\text{für } x^1: && a_1 = 1 && \\ &\text{für } x^2: && \frac{1}{2} a_0 + a_2 = 0 && \Longrightarrow a_2 = 0 \\ &\text{für } x^3: && \frac{1}{2} a_1 + a_3 = \frac{1}{6} && \Longrightarrow a_3 = -\frac{1}{3} \\ &\text{für } x^4: && \frac{1}{24} a_0 + \frac{1}{2} a_2 + a_4 = 0 && \Longrightarrow a_4 = 0 \\ &\text{für } x^5: && \frac{1}{24} a_1 + \frac{1}{2} a_3 + a_5 = \frac{1}{120} && \Longrightarrow a_5 = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Die ersten drei nicht-verschwindenden Koeffizienten sind also 1, $-\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{15}$. Es gilt

$$\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

3. **[6 Punkte]** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1, \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

für die Funktion $y = y(x)$, $x > 0$.

Lösung:
Es handelt sich um eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung zweiten Grades. Für die zugehörige homogene Gleichung benutzen wir den Ansatz $y(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessen Ableitungen sind $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ und $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; und Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}) - \frac{1}{x}(\alpha x^{\alpha-1}) + \frac{1}{x^2}x^\alpha \\ &= \Big(\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1\Big)x^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Da $x > 0$ nach Voraussetzung, können wir mit $x^{\alpha-2} \neq 0$ kürzen und erhalten das Indexpolynom

$$0 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha-1)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\alpha = 1$. Deshalb lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1 x + C_2 x \log x$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. (Durch Einsetzen in die DGL kann man das Resultat prüfen.)

Variante 1 – Variation der Konstanten
Für die allgemeine Lösung führen wir Variation der Konstanten durch, also

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{2}$$

mit $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x \log x$, den beiden linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung; und zwei reellen Funktionen $C_1(x)$, $C_2(x)$, die wir noch bestimmen müssen. Die Wronski-Determinante berechnet sich zu

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x & x\log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix} = x.$$

Mit der Inhomogenität $q(x) = 1$ erhalten wir gemäss der Formel aus der Vorlesung

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{q(x)y_2(x)}{W(x)}\mathrm{d}x = -\int \log x \,\mathrm{d}x = -x(\log x - 1) + A; \\ C_2(x) &= \int \frac{q(x)y_1(x)}{W(x)}\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + B \end{aligned}$$

mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Also lautet die allgemeine Lösung aus Gleichung (2)

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \\ &= (x - x\log x + A)\, x + (x + B)\, x \log x \\ &= x^2 + Ax + Bx\log x. \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen $0 = y(1) = 1 + A$ und $0 = y'(1) = 2 + A + B$ ergibt sich $A = -1$ und $B = -2 - A = -1$. Also lautet die gesuchte Lösung unseres Anfangswertproblems

$$y(x) = x^2 - x - x\log x.$$

Variante 2 – Ansatz für partikuläre Lösung
Statt der Variation der Konstanten können wir auch einen Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen. Wir versuchen einen quadratischen polynomiellen Ansatz

$$y_p(x) = A + Bx + Cx^2, \qquad \text{mit } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die ursprüngliche DGL ergibt

$$\begin{aligned} x^2 &= x^2 \cdot 2C - x \cdot (B + 2Cx) + (A + Bx + Cx^2) \\ &= x^2 \cdot C + A. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $C = 1$ und $A = 0$. Der Wert von B ist egal, und da wir nur eine partikuläre Lösung suchen, setzen wir der Einfachheit halber $B = 0$. Wir erhalten also $y_p(x) = x^2$. (Durch Einsetzen in die DGL kann man prüfen, dass y_p eine Lösung ist.)

Die allgemeine Lösung ist die Summe der homogenen Lösung und einer partikulären Lösung, also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 x + C_2 x \log x + x^2.$$

Der Rest folgt analog wie bei der oberen Variante.

4. **[6 Punkte]** Die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ besitze den Normalenvektor $\vec{n} = (1, 2, 3)$ und enthalte den Punkt $(1, 1, 1)$.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks

$$\Delta = E \cap \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \right\}.$$

(b) Berechnen Sie die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = (x - z,\ x + y^2,\ y)$$

längs des Randweges $\partial\Delta$ leistet. Dabei soll der Durchlaufsinn so gewählt werden, dass er verträglich mit $\vec{n}$ ist.

Lösung:
Wir bestimmen zunächst die Koordinatengleichung der Ebene. Da $\vec{n}$ senkrecht

auf der Ebene steht und $(1,1,1)$ auf E liegt, muss für einen Punkt $(x,y,z) \in E$ gelten

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= (x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = x + 2y + 3z - 6. \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die Ecken des Dreiecks Δ: sie liegen auf den positiven Koordinatenachsen, wo die Ebene E diese Achsen trifft. Wir nennen sie A, B, C auf der x-, y-, z-Achse. Diese Punkte erhalten wir aus der Ebenengleichung jeweils durch Nullsetzen der anderen Koordinaten. Also

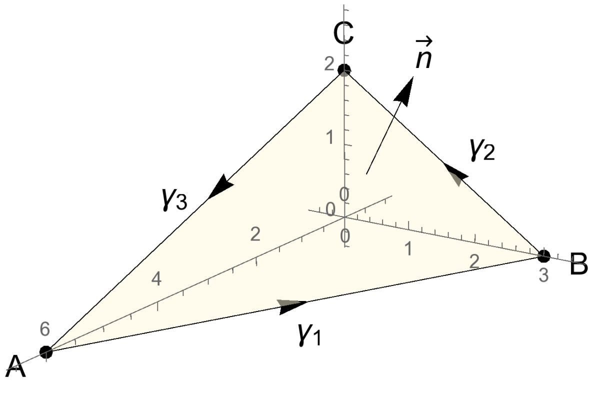
$$\begin{array}{llcr} \text{für die } x\text{-Achse:} & 0 = x + 2\cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 & \Longrightarrow & x = 6; \\ \text{für die } y\text{-Achse:} & 0 = 0 + 2\cdot y + 3 \cdot 0 - 6 & \Longrightarrow & y = 3; \\ \text{für die } z\text{-Achse:} & 0 = 0 + 2\cdot 0 + 3 \cdot z - 6 & \Longrightarrow & z = 2. \end{array}$$

Folglich hat Δ die Ecken $A = (6,0,0)$, $B = (0,3,0)$ und $C = (0,0,2)$.

(a) Die Fläche des Dreiecks Δ ist die halbe Fläche desjenigen Parallelogramms, welches von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannt wird. Sie berechnet sich durch

$$\begin{aligned} |\Delta| = \iint_\Delta \mathrm{d}A &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \\ &= 3\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = 3\sqrt{14}. \end{aligned}$$

(b) Gemäss der rechten-Hand-Regel ist der Rand des Dreiecks Δ von oben gesehen im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Gesucht ist das Arbeitsintegral $W(\vec{v}, \partial\Delta) = \int_{\partial\Delta} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r}$.



Variante 1 – Direkte Berechnung
Wir parametrisieren $\partial\Delta$ mit drei Wegen wie folgt: Der Weg $\vec{\gamma_1} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

verläuft gerade von A nach B, der Weg $\vec{\gamma_2}$ von B nach C und $\vec{\gamma_3}$ von C zurück nach A.

$$\text{D. h. } \vec{\gamma_1}(t) = A + t(B-A) = \begin{pmatrix} 6-6t \\ 3t \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$\vec{\gamma_2}(t) = B + t(C-B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3-3t \\ 2t \end{pmatrix};$$
$$\vec{\gamma_3}(t) = C + t(A-C) = \begin{pmatrix} 6t \\ 0 \\ 2-2t \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten für den ersten Weg

$$\begin{aligned}
W(\vec{v}, \vec{\gamma_1}) &= \int_{\vec{\gamma_1}} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{\gamma_1}(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma_1}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 6-6t \\ 6-6t+(3t)^2 \\ 3t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 -36+36t+18-18t+27t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 27t^2+18t-18\,\mathrm{d}t \\
&= 27\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + 18\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - 18[t]_0^1 = \frac{27}{3} + \frac{18}{2} - 18 = 0.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Weg rechnen wir

$$\begin{aligned}
W(\vec{v}, \vec{\gamma_2}) &= \int_{\vec{\gamma_2}} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{\gamma_2}(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma_2}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} -2t \\ (3-3t)^2 \\ 3-3t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 -27+54t-27t^2+6-6t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 -27t^2+48t-21\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{27}{3} + \frac{48}{2} - 21 = -6.
\end{aligned}$$

Für den dritten Weg erhalten wir

$$\begin{aligned}
W(\vec{v}, \vec{\gamma_3}) &= \int_{\vec{\gamma_3}} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{\gamma_3}(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma_3}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 6t-(2-2t) \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (8t-2)\cdot 6\,\mathrm{d}t = \int_0^1 48t-12\,\mathrm{d}t = \frac{48}{2} - 12 = 12.
\end{aligned}$$

Insgesamt beträgt die Arbeit also

$$\begin{aligned}
W(\vec{v}, \partial\Delta) &= \int_{\partial\Delta} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{\gamma_1}} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\vec{\gamma_2}} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\vec{\gamma_3}} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} \\
&= 0 - 6 + 12 = 6.
\end{aligned}$$

Variante 2 – Satz von Stokes
Deutlich einfacher erweist sich die Berechnung mit Hilfe des Satzes von Stokes, der lautet

$$\int_{\partial\Delta} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\Delta} \mathbf{rot}\, \vec{v} \bullet \vec{m}\, \mathrm{d}A.$$

Die Orientierung des Randes stimmt mit der Orientierung des Normalenvektors auf dem Dreieck überein. Da unser Normalenvektor $\vec{n}$ nicht normiert ist, haben wir hier $\vec{m}$ benutzt. Es gilt

$$\vec{m} = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Rotation des Vektorfelds $\vec{v}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{rot}\, \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - z \\ x + y^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die gesuchte Arbeit

$$\begin{aligned} W(\vec{v}, \partial\Delta) &= \int_{\partial\Delta} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\Delta} \mathbf{rot}\, \vec{v} \bullet \vec{m}\, \mathrm{d}A \\ &= \iint_{\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{d}A = \frac{2}{\sqrt{14}} \iint_{\Delta} \mathrm{d}A \\ &= \frac{2}{\sqrt{14}} |\Delta| = \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot 3\sqrt{14} = 6. \end{aligned}$$

Im zweitletzten Schritt haben wir dabei das Resultat aus **(a)** benutzt.

5. [6 Punkte] Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{w}(x, y, z) = (x^2,\ -xy,\ -xz)$$

durch die Halbzylinderfläche

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

in Richtung des Normalenfeldes, welches von der z-Achse weggerichtet ist.

Lösung:
Variante 1 – Direkte Berechnung
Wir parametrisieren die Fläche S mit Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\phi;\ y = r\sin\phi;\ z = z$$

wobei $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;	da S nur Punkte mit $x \geq 0$ enthält;
$r = 1$;	da S nur Punkte mit $x^2 + y^2 = 1$ enthält;
und $z \in [0, 1]$.	

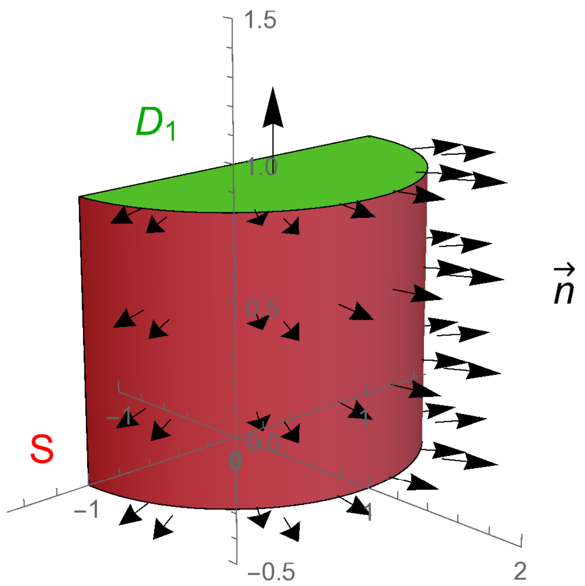
Unsere Parametrisierung ist also gegeben durch die Funktion

$$F(\phi, z) = (\cos\phi, \sin\phi, z).$$

Ein Normalenvektorfeld ergibt sich aus dem Kreuzprodukt der Ableitungen zu

$$\vec{n}(\phi, z) = \partial_\phi F(\phi, z) \times \partial_z F(\phi, z) = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses zeigt tatsächlich weg von der z-Achse. (Man findet es auch direkt ohne Ableiten durch eine geometrische Überlegung.)



Damit berechnet sich der Fluss von $\vec{w}$ durch S (mit der gewählten Orientierung) zu

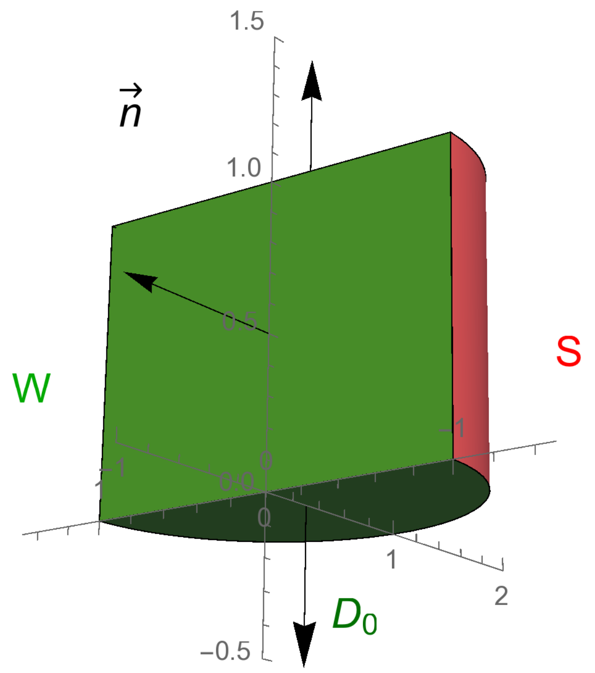
$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{w}, S) &= \iint_S \vec{w} \bullet \vec{n} \, \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{w}(F(\phi, z)) \bullet \vec{n}(\phi, z) \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos^2\phi \\ -\cos\phi\sin\phi \\ -z\cos\phi \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\phi - \cos\phi\sin^2\phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \\
&= [z]_0^1 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2\phi)\cos\phi - \sin^2\phi\cos\phi \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi - 2\sin^2\phi\cos\phi \, \mathrm{d}\phi \\
&= \left[\sin\phi - \frac{2}{3}\sin^3\phi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Variante 2 – Satz von Gauss
Wir können den Satz von Gauss anwenden, um den Integrationsbereich auf einen einfacheren zu wechseln. Zunächst definieren wir den gefüllten Halbzylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Der Rand von Z besteht aus vier Flächen: dem gekrümmten Teil S, dem Deckel D_1, dem Boden D_0 und der flachen Wand W; wobei

$$D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ z = 1\};$$
$$D_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ z = 0\};$$
$$\text{und } W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ -1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$



Der Satz von Gauss angewendet auf das Vektorfeld $\vec{w}$ und auf die geschlossene Oberfläche ∂Z (das ist der Rand des Halbzylinders Z) ergibt

$$\iiint_Z \mathbf{div}\,\vec{w}\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial Z} \vec{w} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}A,$$

wobei $\vec{n}$ den auf ∂Z nach aussen zeigenden Normaleneinheitsvektor bezeichnet. Wir berechnen die Divergenz von $\vec{w}$ zu

$$\mathbf{div}\,\vec{w} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \\ -xz \end{pmatrix} = 2x - x - x = 0.$$

Damit gilt also

$$\begin{aligned} 0 = \iiint_Z \mathbf{div}\,\vec{w}\,\mathrm{d}V &= \iint_{\partial Z} \vec{w} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}A \\ &= \iint_{S \cup D_1 \cup D_0 \cup W} \vec{w} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}A \\ &= \iint_S \vec{w} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}A + \iint_{D_1} \vec{w} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}A + \iint_{D_0} \vec{w} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}A + \iint_W \vec{w} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}A. \end{aligned}$$

Hierbei bemerken wir, dass die Fläche S gemäss Aufgabenstellung korrekt orientiert ist. Folglich können wir den gesuchten Fluss von $\vec{w}$ durch S berechnen als

$$\Phi(\vec{w}, S) = -\Big(\Phi(\vec{w}, D_1) + \Phi(\vec{w}, D_0) + \Phi(\vec{w}, W)\Big). \tag{3}$$

- Fluss durch D_1
  Der Deckel D_1 wird parametrisiert durch Zylinderkoordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = 1$ mit $r \in [0,1]$ und $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Die Jacobi-Determinante ist gleich r, und der (bezüglich Z) nach aussen zeigende Normaleneinheitsvektor auf D_1 ist $(0,0,1)$. Folglich ist der Fluss von $\vec{w}$ durch D_1 von unten nach oben gleich

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{w}, D_1) &= \iint_{D_1} \vec{w} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}A \\
&= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{w}(r\cos\phi, r\sin\phi, 1) \bullet \vec{n} \cdot r\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} r^2\cos^2\phi \\ -r^2\cos\phi\sin\phi \\ -r\cos\phi \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -r^2\cos\phi\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}r \\
&= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 [-\sin\phi]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3}\cdot(-1-1) = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

- Fluss durch D_0
  Der (bezüglich Z) nach aussen zeigende Normaleneinheitsvektor auf D_0 ist $(0,0,-1)$. Da auf dem Boden $z = 0$ gilt, hat das Vektorfeld $\vec{w} = (x^2, -xy, -xz)$ hier eine verschwindende z-Komponente. Deshalb ist das Skalarprodukt $\vec{w} \bullet \vec{n}$ im Integral

$$\Phi(\vec{w}, D_0) = \iint_{D_0} \vec{w} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}A$$

  auf dem Boden D_0 überall Null, deshalb ist auch $\Phi(\vec{w}, D_0) = 0$.

- Fluss durch W
  An der Wand W gilt $x = 0$, also ist dort das Vektorfeld $\vec{w} = (x^2, -xy, -xz)$ identisch gleich Null. Der Fluss von $\vec{w}$ durch W von innen nach aussen ist also gleich

$$\Phi(\vec{w}, W) = \iint_W \vec{w} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}A = 0.$$

Nach Gleichung (3) erhalten wir den gesuchten Fluss zu

$$\Phi(\vec{w}, S) = -\Big(\Phi(\vec{w}, D_1) + \Phi(\vec{w}, D_0) + \Phi(\vec{w}, W)\Big) = -\left(-\frac{2}{3} + 0 + 0\right) = \frac{2}{3}.$$

6. [6 Punkte] Ein schwenkbarer Lichtkegel im Raum beleuchtet in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ den Bereich

$$B_\alpha = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\cdot\sin\alpha + \cos\alpha \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}} \right\}$$

in der (x,y)-Ebene.

(a) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ jeweils die Gleichung der Randkurve ∂B_α von B_α in möglichst einfacher Form. Um was für eine Kurve handelt es sich jeweils? Skizzieren Sie die drei Kurven in der (x, y)-Ebene.
Hinweis: Im Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist auf das Vorzeichen von x zu achten.

(b) Bestimmen Sie die Begrenzung des beleuchtbaren Bereichs, d. h. die Gleichung der Enveloppe der Kurvenschar ∂B_α.

Lösung:

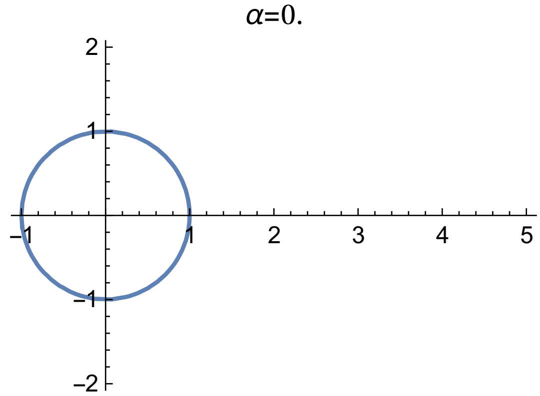
(a) Die Randkurve ∂B_α erhalten wir einfach, indem wir die Ungleichung in der Definition von B_α durch eine Gleichung ersetzen, d. h.

$$\partial B_\alpha = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cdot \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1}{2}} \right\}.$$

- $\alpha = 0$
  Dann ist

$$\begin{aligned} \partial B_0 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1}{2}} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2 = x^2 + y^2 + 1 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

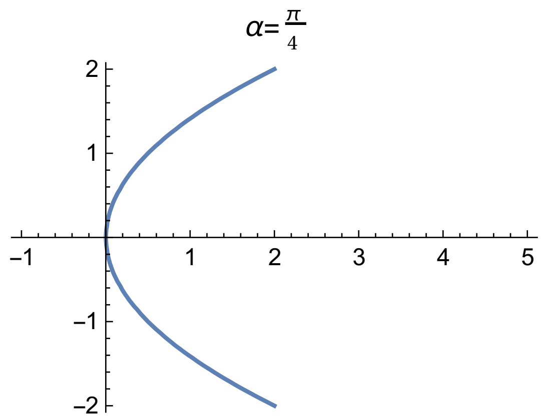
  Dabei handelt es sich um den Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1.



- $\alpha = \frac{\pi}{4}$
  Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial B_{\pi/4} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1}{2}} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 = 2x \right\}. \end{aligned}$$

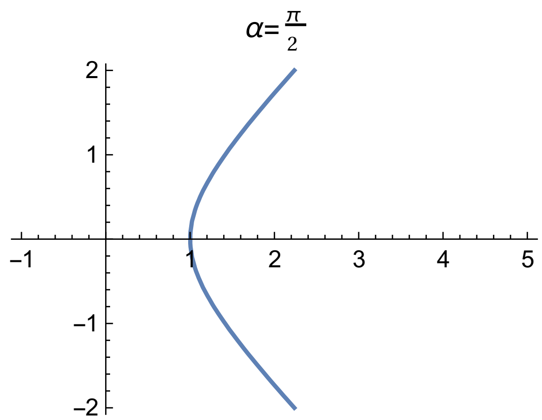
Dabei handelt es sich um eine nach rechts geöffnete Parabel mit Scheitel bei $(0,0)$ und Symmetrieachse $y = 0$.



- $\alpha = \frac{\pi}{2}$
  Dann gilt

$$\begin{aligned}\partial B_{\pi/2} &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}} \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x^2 = x^2 + y^2 + 1,\ x > 0 \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 = y^2 + 1,\ x > 0 \right\}.\end{aligned}$$

  Dabei haben wir beim Quadrieren der obersten Gleichung benutzt, dass die Wurzel positiv ist (und deshalb $x > 0$ gelten muss). Es handelt sich um einen nach rechts geöffneten Hyperbelast mit Scheitel bei $(1,0)$ und Symmetrieachse $y = 0$.



(b) Die Kurvenschar ∂B_α ist gegeben durch die Nullstellenmenge der Funktion

$$F(x,y,\alpha) := x \cdot \sin\alpha + \cos\alpha - \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}},$$

wobei $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ der Scharparameter ist. Für die Gleichung der Enveloppe müssen wir diese Gleichung nach α ableiten:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = x\cos\alpha - \sin\alpha \overset{!}{=} 0.$$

Daraus folgt $x = \tan\alpha$ (falls α nicht gleich $\pm\frac{\pi}{2}$ ist – diese zwei Spezialfälle am Rand beeinflussen die Enveloppe nicht).

Variante 1 – Einsetzen von $x = \tan\alpha$ und Auflösen nach y

$$
\begin{aligned}
F(x,y,\alpha)\Big|_{x=\tan\alpha} = 0 \quad &\iff \quad \tan\alpha\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\tan^2\alpha + y^2}{2}} \\
\iff \quad & 2\tan^2\alpha\sin^2\alpha + 4\underbrace{\tan\alpha\sin\alpha\cos\alpha}_{=\sin^2\alpha} + 2\cos^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha + y^2 \\
\iff \quad & 2\tan^2\alpha\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha - \tan^2\alpha + 1 = y^2.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Identität $\tan^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ folgt

$$
\begin{aligned}
y^2 &= \frac{2\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\
&= \frac{2\sin^2\alpha(\sin^\alpha + \cos^2\alpha) - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},
\end{aligned}
$$

also $y = \pm\frac{1}{\cos\alpha}$. Es gibt deshalb zwei Kurven, die Enveloppen der Schar ∂B_α sind, und deren Parametrisierung ist gegeben durch

$$
\vec{r}(\alpha) = \left(\tan\alpha, \pm\frac{1}{\cos\alpha}\right), \qquad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).
$$

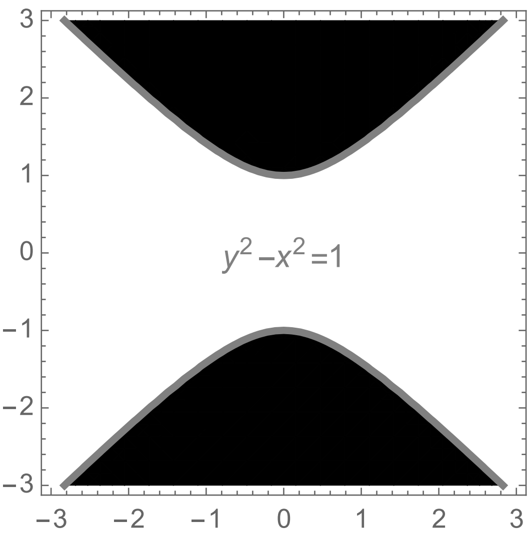
Variante 2 – Quadrieren und auflösen
Wir quadrieren die Gleichung der Kurvenschar und der Enveloppe und erhalten

$$
\begin{aligned}
x^2\sin^2\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha &= \frac{x^2+y^2+1}{2} \\
x^2\cos^2\alpha - 2x\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha &= 0.
\end{aligned}
$$

Summieren ergibt

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &= \frac{x^2+y^2+1}{2} \\
\iff \quad 2x^2 + 2 &= x^2 + y^2 + 1 \\
\iff \quad x^2 + 1 &= y^2.
\end{aligned}
$$

(Alternativ kann man auch $x = \tan\alpha$ in die Gleichung der Kurvenschar einsetzen und erhält nach einigen Umformungen die Parametrisierung $y = \pm\frac{1}{\cos\alpha}$, was gleichwertig ist.)
Bei dieser Kurve $y^2 - x^2 = 1$ handelt es sich um eine nach oben und unten geöffnete Hyperbel mit Scheitel $(0, \pm 1)$ und Symmetrieachse $x = 0$. Der maximal beleuchtbare Bereich wird durch die zwei Hyperbeläste begrenzt.



7. **[6 Punkte]** Gegeben sei das Dreieck $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$. Weiter bezeichne $V(s,t)$ für $s,t \in \mathbb{R}$ das Volumen des Körpers

$$K_{s,t} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \Delta,\ 0 \leq z \leq (x-s)^2 + (y-t)^2\}.$$

(a) Berechnen Sie $V(0,0)$, d. h. das Volumen von $K_{0,0}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbf{grad}\, V(s,t)$.
Hinweis: Differenzieren Sie zuerst unter dem Integral und lösen Sie dann erst das Integral auf.

(c) Für welches Paar (s,t) wird das Volumen $V(s,t)$ minimal?

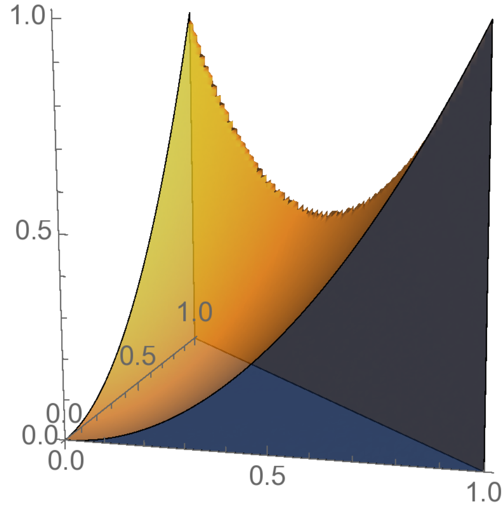
(d) Bestimmen Sie die Funktion $V(s,t)$ explizit.
Hinweis: Verwenden Sie **(a)** und **(b)**.

Lösung:
Wir berechnen das Volumenintegral direkt mit kartesischen Koordinaten (x,y,z), da es sich um das Volumen unter einem Funktionsgraphen (nämlich unter $f(x,y) = (x-s)^2 + (y-t)^2$) handelt. Das Dreieck Δ parametrisieren wir (beispielsweise) mit $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1-x$, folglich ist das Volumenintegral $V(s,t)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} V(s,t) &= \iiint_{K_{s,t}} \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(x-s)^2+(y-t)^2} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x-s)^2 + (y-t)^2\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(a) Der Körper $K_{0,0}$ ist gegeben durch

$$K_{0,0} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y) \in \Delta,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\right\}.$$



Es handelt sich dabei um einen dreieckigen Abschnitt eines gefüllten Paraboloids. Wir rechnen

$$
\begin{aligned}
V(0,0) = \iiint_{K_{0,0}} \mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{1-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3}\right) - (x^2 \cdot 0 + 0)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 - x^3 + \frac{(1-x)^3}{3}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12}\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

(b) Der Gradient von $V(s,t)$ ist gegeben durch

$$
\mathbf{grad}\, V(s,t) = \begin{pmatrix} \partial_s V(s,t) \\ \partial_t V(s,t) \end{pmatrix}.
$$

Die partielle Ableitung nach s berechnen wir zu

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} V(s,t) = \partial_s \left(\iiint_{K_{s,t}} \mathrm{d}V\right) &= \partial_s \left(\int_0^1 \int_0^{1-x} (x-s)^2 + (y-t)^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \partial_s \Big((x-s)^2 + (y-t)^2\Big) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2(x-s)(-1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \int_0^{1-x} s - x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 (s-x)(1-x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 s - x(1+s) + x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[sx - (1+s)\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^1 = 2\left(s - \frac{1+s}{2} + \frac{1}{3}\right) \\
&= s - \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Dabei konnten wir nach dem zweiten Schritt die Ableitung unter die beiden Integrale ziehen (nach dem Satz in der Vorlesung über die Ableitung von Parameterintegralen). – Die partielle Ableitung von $V(s,t)$ nach t berechnen wir zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}V(s,t) &= \partial_t\left(\iiint_{K_{s,t}} \mathrm{d}V\right) = \partial_t\left(\int_0^1\int_0^{1-x}(x-s)^2+(y-t)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}\partial_t\Big((x-s)^2+(y-t)^2\Big)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}2(y-t)(-1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1\int_0^{1-x}t-y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^1\left[ty-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1-x}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\left[-t\cdot\frac{(1-x)^2}{2}+\frac{(1-x)^3}{6}\right]_{x=0}^1 = 2\left((0+0)-\left(-\frac{t}{2}+\frac{1}{6}\right)\right)\\
&= t-\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Wieder haben wir in der zweiten Zeile die Ableitung unter die Integrale gezogen. (Wir hätten dieses Resultat übrigens mit einem Symmetrieargument auch direkt aus $\partial_s V$ ablesen können.)

Insgesamt gilt

$$\mathbf{grad}\,V(s,t) = \begin{pmatrix} s-\frac{1}{3}\\ t-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

(c) Wir sehen zunächst, dass das Volumen $V(s,t)$ für grosse $s,t\in\mathbb{R}$ unbeschränkt wächst. Das gesuchte Minimum muss also eine Nullstelle des Gradienten sein. Wir setzen $\mathbf{grad}\,V(s,t) \overset{!}{=} (0,0)$ und erhalten $(s,t)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

Bemerkung: Dieser Punkt $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ist übrigens der Schwerpunkt des Dreiecks Δ, und das nicht zufällig!

(d) In der Sprache der Vektoranalysis suchen wir ein Potential des Vektorfelds $(s,t)\mapsto \mathbf{grad}\,V(s,t)$, denn wir suchen die Funktion $V(s,t)$ mit Gradient $(s-\frac{1}{3}, t-\frac{1}{3})$ und der Nebenbedingung $V(0,0)=\frac{1}{6}$ aus **(a)**. Wir erhalten diese Funktion, indem wir beispielsweise zuerst nach s integrieren:

$$V(s,t) = \int \partial_s V(s,t)\,\mathrm{d}s = \int s-\frac{1}{3}\,\mathrm{d}s = \frac{s^2}{2}-\frac{s}{3}+C(t),$$

(wobei $C(t)$ eine reelle Funktion ist), dann dies ableiten und in den zweiten Eintrag des Gradienten einsetzen:

$$t-\frac{1}{3} = \partial_t V(s,t) = C'(t).$$

Also ist $C(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t}{3}+A$, wobei $A\in\mathbb{R}$ eine Konstante ist. Es folgt

$$V(s,t) = \frac{s^2}{2}-\frac{s}{3}+C(t) = \frac{s^2}{2}-\frac{s}{3}+\frac{t^2}{2}-\frac{t}{3}+A.$$

Mit Hilfe von **(a)** finden wir $A=V(0,0)=\frac{1}{6}$, also gilt

$$V(s,t) = \frac{1}{2}(s^2+t^2)-\frac{1}{3}(s+t)+\frac{1}{6}.$$

Natürlich können wir auch direkt die Integration $V(s,t) = \iiint_{K_{s,t}} \mathrm{d}V$ durchführen, dies ist jedoch etwas aufwendiger:

$$
\begin{aligned}
V(s,t) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x-s)^2 + (y-t)^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[(x-s)^2 y + \frac{(y-t)^3}{3}\right]_{y=0}^{1-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (x-s)^2(1-x) + \frac{((1-x)-t)^3}{3} - \frac{(-t)^3}{3}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (x^2 - 2sx + s^2)(1-x) + \frac{1}{3}\cdot\Big((1-x)^3 - 3(1-x)^2 t + 3(1-x)t^2\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 - 2sx + s^2 - x^3 + 2sx^2 - xs^2 + \frac{(1-x)^3}{3} - (1-x)^2 t + (1-x)t^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \Bigg[\frac{x^3}{3} - sx^2 + s^2 x - \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}sx^3 - \frac{1}{2}x^2 s^2 \\
&\qquad\qquad - \frac{(1-x)^4}{12} + \frac{(1-x)^3}{3}t + t^2 x - \frac{1}{2}t^2 x^2\Bigg]_{x=0}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{3} - s + s^2 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}s - \frac{s^2}{2} + t^2 - \frac{t^2}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12} + \frac{t}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}(s^2 + t^2) - \frac{1}{3}(s+t) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{2}(s^2 + t^2) - \frac{1}{3}(s+t) + \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

8. [18 Punkte] MC-Aufgabe

Korrekturschlüssel:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A	1	4	3	3	1	oben rechts
B	3	2	1	1	4	unten links
C	4	1	2	4	2	oben links
D	2	3	4	2	3	unten rechts

(a) [**3 Punkte**] Gegeben sei folgendes Gebiet in der komplexen Zahlenebene:

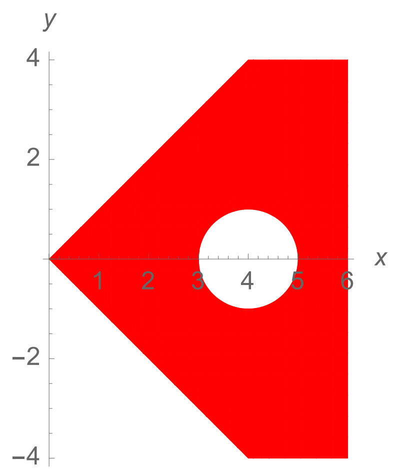
$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-4| \geq 1 \text{ und } -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

☒ Es gibt Zahlen in D mit $|z| = 4$.
☐ Die Zahl $6 + 7i$ liegt in D.
☐ Jedes $z \in D$ hat negativen Imaginärteil.
☐ Alle Nullstellen des Polynoms $z^2 - i$ liegen in D.

Lösung:
Wir rechnen für $z = x + iy$

$$\begin{aligned} |x+iy-4| \geq 1 &\iff \sqrt{(x+iy-4)(x-iy-4)} \geq 1 \\ &\iff \sqrt{x^2 - 8x + y^2 + 16} \geq 1 \\ &\iff \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \geq 1 \\ &\iff (x-4)^2 + y^2 \geq 1. \end{aligned}$$

Damit entspricht D dem Komplement des Kreises mit Mittelpunkt $(4,0)$ und Radius 1 geschnitten mit dem Sektor, welcher von den beiden Winkelhalbierenden $y = \pm x$ für $x > 0$ aufgespannt wird.



Aus der Skizze ist nun klar, dass die erste Option richtig sein muss. Konkret kann man auch direkt überprüfen, dass $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ (mit $|z_1| = 4$) in D liegt, denn

$$(x_1 - 4)^2 + y_1^2 = (2\sqrt{2} - 4)^2 + 8 = 32 - 16\sqrt{2} \geq 1,$$

was wegen $\sqrt{2} < 1.5$ gilt; ausserdem gilt $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$.
Die zweite Option ist falsch, da $6 + 7i$ oberhalb der ersten Winkelhalbierenden liegt. Im ersten Quadranten gilt für alle $z = x + iy$ mit $y > x$, dass $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Die dritte Option ist falsch, da D auch Punkte mit positivem Imaginärteil enthält, wie wir bereits gesehen haben.

Für die vierte Option bestimmen wir zunächst alle Nullstellen der quadratischen Gleichung $z^2 - i$:

$$z_\pm = \frac{\pm\sqrt{4i}}{2} = \pm\sqrt{i} = \pm\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \pm e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Die Nullstelle mit negativem Vorzeichen erfüllt $\arg z_- = -\frac{3\pi}{4}$ und liegt deswegen nicht in D.

(b) [**3 Punkte**] Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welches quellenfrei und wirbelfrei ist, gilt:

- ☐ Die Arbeit von $\vec{v}$ entlang der geraden Strecke von $(1,1,1)$ bis $(4,2,8)$ verschwindet.
- ☒ Die Arbeit von $\vec{v}$ entlang eines Weges von $(1,1,1)$ bis $(4,2,8)$ hängt nicht von der Wahl des Weges ab.
- ☐ Der Fluss von $\vec{v}$ durch die Einheitskreisscheibe

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

von unten nach oben verschwindet.
- ☐ Das Vektorfeld $\vec{v}$ besteht nur aus parallelen Vektoren (d. h. alle Vektoren $\vec{v}(x,y,z)$ und $\vec{v}(x',y',z')$ sind parallel).

Lösung:

Da $\vec{v}$ quellenfrei ist, gilt $\mathbf{div}\,\vec{v} = 0$ und da $\vec{v}$ wirbelfrei ist, gilt $\mathbf{rot}\,\vec{v} = (0,0,0)$. Im Folgenden benutzen wir, dass jedes konstante Vektorfeld quellenfrei und wirbelfrei ist.

Die erste Option ist falsch. Wenn wir ein konstantes Vektorfeld betrachten, welches nicht gerade senkrecht zum Weg zeigt, kann die dadurch geleistete Arbeit nicht verschwinden. Wählen wir z. B. $\vec{v} = (3,1,7)$ und parametrisieren wir den Weg W durch

$$\vec{r}(t) = (1,1,1) + t\cdot(3,1,7), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

so berechnet sich die Arbeit zu

$$\int_W \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (3,1,7) \bullet (3,1,7)\,\mathrm{d}t = 9 + 1 + 49 \neq 0.$$

Die zweite Option ist richtig. Da $\mathbf{rot}\,\vec{v} = (0,0,0)$ und der Definitionsbereich $D(\vec{v}) = \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Das bedeutet, dass es eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{v} = \mathbf{grad}\, f$. Deswegen entspricht die gesuchte Arbeit für jeden Weg genau der Potentialdifferenz $f(4,2,8) - f(1,1,1)$ und dies ist unabhängig von der Wahl des Weges.

Die dritte Option ist falsch. Wählen wir beispielsweise das konstante Vektorfeld $\vec{v} = (0,0,1)$, so berechnet sich der Fluss durch die Einheitskreisscheibe S von unten nach oben zu

$$\iint_S \vec{v} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}A = \iint_S (0,0,1) \bullet (0,0,1)\,\mathrm{d}A = \iint_S \mathrm{d}A = 2\pi \neq 0.$$

Die vierte Option ist falsch. Das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = (y,x,0)$ ist sowohl quellenfrei ($\mathbf{div}\,\vec{v} = 0$) als auch wirbelfrei ($\mathbf{rot}\,\vec{v} = (0,0,0)$). Allerdings besteht dieses nicht nur aus parallelen Vektoren, denn es gilt beispielsweise $\vec{v}(1,0,0) = (0,1,0)$ und $\vec{v}(0,1,0) = (1,0,0)$.

(c) **[3 Punkte]** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = ...$

- ☐ 1/5.
- ☐ 1/3.
- ☒ 1/2.
- ☐ ∞.

Lösung:
Variante 1 – Substitution
Mit der Substitution $u = 1 + x$ erhalten wir $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ und damit

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{u-1}{u^3}\,\mathrm{d}u &= \int_1^\infty \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right)\mathrm{d}u \\ &= \lim_{K\to\infty}\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]_1^K \\ &= \lim_{K\to\infty}\left(-\frac{1}{K} + \frac{1}{2K^2} + 1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Variante 2 – Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \underbrace{x}_{\downarrow} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x)^3}}_{\uparrow}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{K\to\infty}\left[-\frac{x}{2(1+x)^2}\right]_0^K + \int_0^\infty \frac{1}{2(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{K\to\infty} -\frac{K}{2(1+K)^2} - \lim_{K\to\infty}\left[\frac{1}{2(1+x)}\right]_0^K \\ &= \lim_{K\to\infty} -\frac{1/K}{2+4/K+2/K^2} - \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2(1+K)} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Variante 3 – Partialbruchzerlegung
Der Nenner des Integranden ist bereits faktorisiert und hat $x = -1$ als dreifache reelle Nullstelle. Wir machen also den Ansatz

$$\frac{x}{(1+x)^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{(1+x)^3}.$$

Durchmultiplizieren dieser Gleichung mit $(1+x)^3$ ergibt

$$x = A + 2Ax + Ax^2 + B + Bx + C$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert $A = 0$, $2A+B = 1$, und $A+B+C = 0$; also $A = 0$, $B = 1$, $C = -1$. Damit rechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{K\to\infty} \left[-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^K \\
&= \lim_{K\to\infty} -\frac{1}{1+K} + \frac{1}{2(1+K)^2} + 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(d) [**3 Punkte**] Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x,y) = e^{-x^2-2y^2}$$

auf dem Gebiet

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \le 1\}.$$

- ☐ Das Maximum beträgt 1 und das Minimum beträgt 0.
- ☒ Das Maximum beträgt 1 und das Minimum wird nur auf dem Rand des Gebiets angenommen.
- ☐ Das Maximum wird nur auf dem Rand des Gebiets angenommen und das Minimum beträgt e^{-1}.
- ☐ Die Differenz zwischen Maximum und Minimum ist gleich $1 - e$.

Lösung:
Da die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}^2$ in beiden Variablen differenzierbar ist, liegen alle lokalen Extrema (x,y) entweder auf dem Rand ∂G oder im Innern von G mit

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen zuerst die lokalen Extrema im Innern von G. Wir rechnen

$$f_x(x,y) = -2x \underbrace{e^{-x^2-2y^2}}_{>0} \overset{!}{=} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 0$$

und ebenso

$$f_y(x,y) = -4y \underbrace{e^{-x^2-2y^2}}_{>0} \overset{!}{=} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad y = 0.$$

Somit ist im Innern von G der einzige Kandidat für ein Extremum durch $(x_1, y_1) = (0,0)$ gegeben mit $f(0,0) = 1$. – Nun betrachten wir den Rand von G.

Variante 1 – Direkte Umformung
Dieser ist gegeben durch die Bedingung $x^2 + 4y^2 = 1$, was umgeformt $x^2 = 1 - 4y^2$ ergibt. Somit ist f auf ∂G gegeben durch $f(y) = e^{2y^2-1}$. Nun suchen wir die Extrema dieser Funktion in einer Variable. Wegen

$$f'(y) = 4y \underbrace{e^{2y^2-1}}_{>0} \overset{!}{=} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad y = 0$$

finden wir zusammen mit $x^2 = 1 - 4y^2 = 1$ die weiteren Kandidaten $(x_2, y_2) = (-1, 0)$ und $(x_3, y_3) = (1, 0)$. Es gilt dabei $f(-1, 0) = f(1, 0) = e^{-1}$.

Variante 2 – Rand parametrisieren
Die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$ wird parametrisiert durch $\vec{r}(\phi) = (\cos\phi, \frac{1}{2}\sin\phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Setzen wir diese Kurve in die Funktion f ein, ergibt sich

$$f(\vec{r}(\phi)) = e^{-\cos^2\phi - \frac{1}{2}\sin^2\phi} = e^{-1+\frac{1}{2}\sin^2\phi}.$$

Ableiten nach ϕ ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} f(\vec{r}(\phi)) = \underbrace{e^{-1+\frac{1}{2}\sin^2\phi}}_{>0} \cdot \sin\phi\cos\phi \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin\phi = 0 \text{ oder } \cos\phi = 0.$$

Also gibt es die Möglichkeiten $\phi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$. Einsetzen in die Parametrisierung $\vec{r}$ ergibt die Kandidaten $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm\frac{1}{2})$. Der Wert von f bei diesen Punkten ist

$$f(\pm 1, 0) = e^{-1} \text{ und } f(0, \pm\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2}.$$

Variante 3 – Lagrange-Multiplikatoren
Wir suchen die Extrema von $f(x, y) = e^{-x^2-2y^2}$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + 4y^2 \stackrel{!}{=} 1$. Nach dem Satz in der Vorlesung gibt es einen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} & \mathbf{grad}\, f(x, y) = \lambda \cdot \mathbf{grad}\, g(x, y) \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} e^{-x^2-2y^2}(-2x) \\ e^{-x^2-2y^2}(-4y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 2x \\ \lambda 8y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Dies ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} -2xe^{-x^2-2y^2} = 2\lambda x \\ -4ye^{-x^2-2y^2} = 8\lambda y, \end{cases}$$

welches wir folgendermassen lösen: zuerst multiplizieren wir die erste Gleichung mit $2y$ und die zweite mit x, so erhalten wir

$$\begin{cases} -4xye^{-x^2-2y^2} = 4\lambda xy \\ -4xye^{-x^2-2y^2} = 8\lambda xy. \end{cases}$$

Nun subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten, was uns zu $0 = -4\lambda xy$ führt. Wir erhalten die Fälle $\lambda = 0$, $x = 0$ und $y = 0$. Im Falle $\lambda = 0$ führt die Gleichung (4) wiederum zu $x = 0$ oder $y = 0$. Mit der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 1$ erhalten wir also die vier Punkte $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm\frac{1}{2})$ als Kandidaten, genau wie oben.

Zusammenfassung: Es ist $e > 1$ und damit $1 > e^{-1/2} > e^{-1}$. Also beträgt das Maximum 1 und wird nur im Innern von G angenommen und das Minimum beträgt e^{-1} und wird nur auf dem Rand von G angenommen. Somit ist die zweite Option richtig.

(e) **[3 Punkte]** Für zwei reelle Funktionen $x(t)$, $y(t)$ sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -4x - 6y\\ \dot{y} &= x + 3y\end{aligned}$$

gegeben.

- ☐ Ein Gleichgewichtspunkt dieses Systems liegt bei $(x_0, y_0) = (3, -2)$.
- ☐ Die Lösung zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ ist gegeben durch $x(t) = e^t - e^{-t}$, $y(t) = 2e^{-3t} - e^{2t}$.
- ☒ Es gibt nur eine Lösung $(x(t), y(t))$ mit $x(t) = e^{2t}$.
- ☐ Alle Lösungen $(x(t), y(t))$ mit $y(0) = 2$ erfüllen $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Lösung:
Die erste Option ist falsch, denn es gilt für $(x_0, y_0) = (1, 2)$:

$$\begin{aligned}-4x_0 - 6y_0 &= -16 \neq 0\\ x_0 + 3y_0 &= 7 \neq 0.\end{aligned}$$

Gleichgewichtspunkte sind diejenigen Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, wo die Ableitungen $\dot{x}$, $\dot{y}$ verschwinden — damit sind sie konstante Lösungen des DGL-Systems. In unserem Beispiel ist nur $(0, 0)$ ein Gleichgewichtspunkt.

Die zweite Option ist falsch, denn die vorkommenden Terme passen nicht zur Tatsache, dass in der allgemeinen Lösung höchstens Exponentialfunktionen $e^{-\lambda t}$ für zwei verschiedene Eigenwerte λ vorkommen dürfen. Man kann die vorgeschlagene Lösung aber auch direkt in das Differentialgleichungssystem einsetzen und so sehen, dass es eben keine Lösung ist.

Die dritte Option ist richtig. Setzen wir nämlich $x(t) = e^{2t}$ in die erste Gleichung ein, erhalten wird $y(t) = -e^{2t}$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert dabei keinen Widerspruch. Somit ist $(x(t), y(t) = (e^{2t}, -e^{2t})$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems; und da $y(t)$ eindeutig durch $x(t)$ bestimmt war, ist diese auch eindeutig.

Die vierte Option ist falsch. Um das zu sehen, müssen wir das Differentialgleichungssystem tatsächlich lösen.

Variante 1 – Matrixgleichung
Wir schreiben das Differentialgleichungssystem als

$$\dot{z} = Az = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} z \quad \text{für } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\begin{aligned}p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot I_2) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)(3-\lambda) + 6\\ &= \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3).\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 2$. Die zugehörigen Eigenvektoren berechnen sich aus

$$(A - \lambda_1 I_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -6b \text{ und}$$

$$(A-\lambda_2 I_2)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c=-d.$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -3 und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Da die Eigenwerte verschieden sind, lautet die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Variante 2 – Gleichung zweiter Ordnung
Aus der zweiten Gleichung folgt $x=\dot{y}-3y$, also auch $\dot{x}=\ddot{y}-3\dot{y}$. Setzen wir diese beiden Bedingungen in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$\ddot{y}-3\dot{y}=\dot{x}=-4x-6y=-4(\dot{y}-3y)-6y=-4\dot{y}+6y,$$

also $\ddot{y}+\dot{y}-6y=0$. Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischem Polynom

$$p(\lambda)=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda-2)(\lambda+3).$$

Daraus lesen wir die allgemeine Lösung für y ab:

$$y(t)=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}.$$

Aus der zweiten Gleichung lässt sich damit nun auch x bestimmen:

$$x(t)=-6C_1e^{-3t}-C_2e^{2t}.$$

Beachte, dass tatsächlich beide Lösungswege dasselbe ergeben, der Unterschied liegt einzig im Vorzeichen der Konstanten. Wir wählen im Folgenden die Konventionen aus dem ersten Lösungsweg. Aus der Bedingung $y(0)=2$ ergibt sich nun

$$2=y(0)=-C_1-C_2 \quad \Longleftrightarrow \quad C_2=-C_1-2,$$

also

$$x(t)=6C_1e^{-3t}-(C_1+2)e^{2t}$$

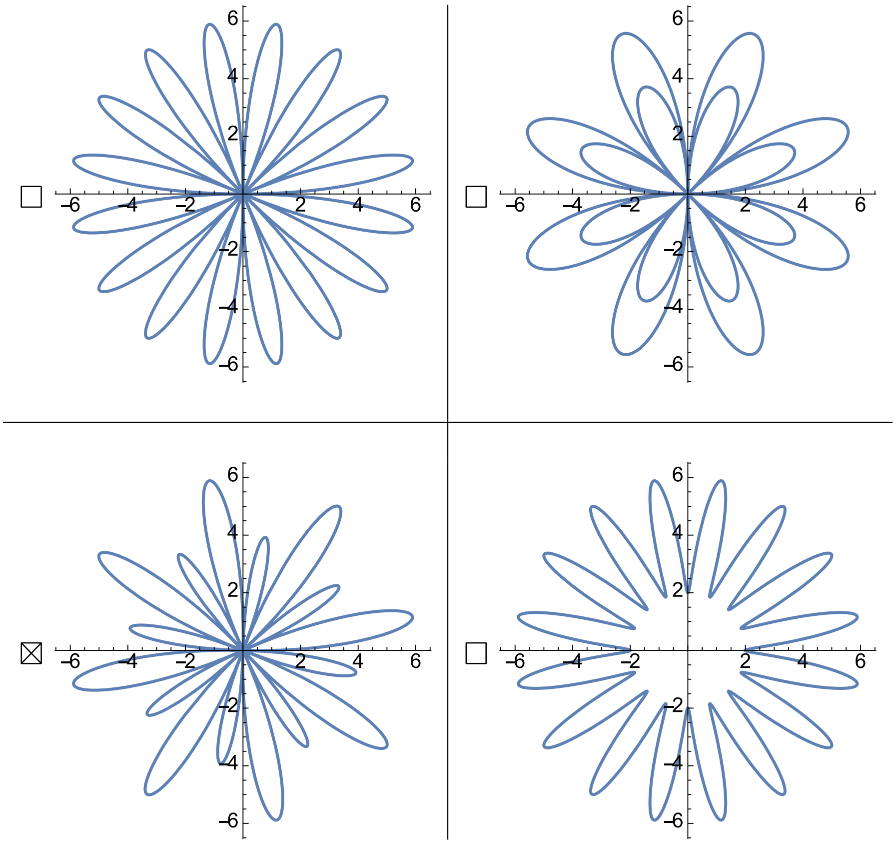
und es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=\pm\infty$ für $C_1\neq -2$. Das zeigt, dass die vierte Option falsch ist.

Natürlich können wir mithilfe der allgemeinen Lösung die zweite und dritte Option ebenfalls sehr schnell behandeln.

(f) [**3 Punkte**] Gegeben sei die ebene Kurve mit der Darstellung in Polarkoordinaten

$$\rho(\varphi)=|5\sin(8\varphi)+1|, \quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Welches Bild entspricht dieser Kurve?



Lösung:

Da $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gilt, gibt es für jeden Winkel genau einen Punkt auf der Kurve. Das Bild oben rechts ist damit sicher falsch.

Des Weiteren können wir beobachten, dass die Kurve genau dann den Ursprung durchläuft, wenn es ein φ mit $5\sin(8\varphi)+1 = 0$ (d. h. Radius 0) gibt. Dies entspricht also Lösungen von $\sin(8\varphi) = -\frac{1}{5}$ und solche existieren sicher, da die Sinusfunktion zwischen 1 und -1 oszilliert. Also wird der Ursprung durchlaufen und das Bild unten rechts ist auch nicht zutreffend.

Wir betrachten nun die Funktion $f(\varphi) = 5\sin(8\varphi) + 1$. Wir suchen nun die lokalen Extrema von f:

$$0 = f'(\varphi) = 40\cos(8\varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}, \quad k \in \{0, ..., 15\}.$$

Für k gerade erhalten wir somit lokale Maxima von f mit Wert 6 und für ungerade k lokale Minima mit Wert -4. Da $\rho(\varphi) = |f(\varphi)|$ gilt, hat ρ also lokale Maxima mit Wert 4 bzw. 6. Somit sind die maximalen Ausschläge des Radius der Kurve abwechslungsweise unterschiedlich stark, womit das Bild oben links falsch sein muss. Somit bleibt nur noch das Bild unten links übrig, welches genau diese Eigenschaft besitzt.