
CHRISTIAN BLATTER

ANALYSIS EINS

ETHZ

Studiengänge

Mathematik und Physik

Wintersemester 2003/04

Read Me

Diese “Analysis” ist zum ersten Mal 1974 bei Springer erschienen. Sie hat seither mehrere Auflagen erlebt, ist aber im Buchhandel nicht mehr erhältlich. Der vorliegende Nachdruck ist eine Weiterentwicklung der letzten Buchausgabe aus dem Jahr 1991. Insbesondere wurden sämtliche Figuren neu gezeichnet und Zwischentitel eingefügt; es gibt aber auch zahlreiche inhaltliche Verbesserungen.

Der Text ist eingeteilt in Kapitel, und jedes Kapitel ist weiter unterteilt in Abschnitte. Formeln, die später noch einmal benötigt werden, sind abschnittsweise mit mageren Ziffern nummeriert. Innerhalb eines Abschnitts wird ohne Angabe der Abschnittnummer auf Formel (1) zurückverwiesen; 3.4.(2) hingegen bezeichnet die Formel (2) des Abschnitts 3.4.

Neu eingeführte Begriffe sind am Ort ihrer Definition **halbfett** gesetzt; eine weitergehende Warnung (“Achtung, jetzt kommt eine Definition”) erfolgt nicht. Definitionen lassen sich vom Sachverzeichnis her jederzeit wieder auffinden.

Sätze (Theoreme) sind kapitelweise nummeriert; die halbfette Signatur **(4.3)** bezeichnet den dritten Satz in Kapitel 4. Sätze werden im allgemeinen angesagt; jedenfalls sind sie erkenntlich an der vorangestellten Signatur und am durchlaufenden *Schrägdruck* des Textes. Die beiden Winkel \lrcorner und \llcorner bezeichnen den Beginn und das Ende eines Beweises.

Eingekreiste Ziffern nummerieren abschnittsweise die erläuternden Beispiele und Anwendungen. Der Kreis \circ markiert das Ende eines Beispiels.

Jeder Abschnitt wird durch eine Serie von Übungsaufgaben abgeschlossen. Das sind einesteils Begriffs- oder Beweisaufgaben, zu einem grossen Teil aber auch Rechenaufgaben. Letztere können nicht nur mit Papier und Bleistift, sondern auch mit einem System wie Maple oder Mathematica behandelt werden.

Von Anfang an bezeichnen

\mathbb{N} die (Menge der) natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$,

\mathbb{Z} die ganzen Zahlen,

\mathbb{Q} die rationalen Zahlen,

\mathbb{R} die reellen Zahlen,

\mathbb{C} die komplexen Zahlen,

\mathbb{B} (für “Bits”) die Menge $\{0, 1\}$.

Von diesen Zahlensystemen wird im Text noch ausführlich die Rede sein.

Inhaltsverzeichnis Analysis Eins

1 Grundbegriffe

1.1 Zur mathematischen Logik	1
Einige nützliche Zeichen	1
Einige logische Grundtatsachen	3
1.2 Mengen	11
Reden über Mengen	11
Mengenoperationen	13
Kartesisches Produkt	15
1.3 Relationen	18
Beziehungen zwischen Individuen	18
Ordnungsrelationen	18
Äquivalenzrelationen	19
1.4 Funktionen	24
Begriff der Funktion	24
Bilder und Urbilder von Teilmengen	26
Surjektiv, injektiv, bijektiv	27
Umkehrfunktion	28
Einschränkungen und Fortsetzungen	30
Implizite Funktionen	31
Zusammensetzung von Abbildungen	32
Familien und Tupel	33

2 Zahlen und Vektoren

2.1 Die natürlichen Zahlen	36
Die Peano-Axiome	36
Induktionsbeweise	38
Rekursion	39
Anzahlen	41
2.2 Geordnete Körper	44
Körperaxiome	44
Rechenregeln	47
Betrags- und Signumfunktion	48
2.3 Konstruktion von \mathbb{R}	52
Ganze und rationale Zahlen	52
Dualbrüche	53

	Reelle Zahlen, intuitiv	55
	Intervallarithmetik	56
	Beliebig genaue Daten	57
	Validierung der Körpereigenschaften	59
	Vollständigkeit	64
2.4	Supremum und Infimum	68
	Maximum vs. Supremum	68
	Intervalle	70
2.5	Abzählbarkeit	72
	Abzählbare Mengen	72
	Ein fundamentaler Satz der Mengenlehre	75
2.6	Komplexe Zahlen	79
	Konstruktion des Körpers \mathbb{C}	79
	Elementare Eigenschaften von \mathbb{C}	81
2.7	Der n-dimensionale euklidische Raum	85
3	Funktionen und Folgen	
3.1	Erscheinungsformen	89
	Erweiterung des Horizonts	89
	Typologie der Funktionen in diesem Buch	90
3.2	Stetigkeit	104
	Definition und Grundeigenschaften	104
	Stetigkeit der Rechenoperationen	110
	Ergänzungen und Beispiele	113
3.3	Grenzwerte	117
	Bezug zur Stetigkeit	117
	Rechenregeln für Grenzwerte	121
	Abschlussung von \mathbb{R}	125
	Uneigentliche Grenzlagen und Grenzwerte	126
3.4	Folgen	130
	Ein mathematisches Konstruktionswerkzeug	130
	Rechenregeln und Beispiele	131
	Häufungspunkte von Folgen	135
	Teilfolgen	136

4	Grundlegende Existenzsätze	
4.1	Fälle garantierter Konvergenz	140
	Monotone Funktionen und Folgen	140
	Anwendung: q -te Wurzeln	142
	Das Cauchy-Kriterium	144
4.2	Der Satz von Bolzano-Weierstrass	148
	\limsup und \liminf	149
4.3	Kompakte Mengen	152
	“Topologische” Eigenschaften von Mengen	152
	Der Satz von Heine-Borel	155
4.4	Hauptsätze über stetige Funktionen	159
	Der Satz vom Maximum	160
	Gleichmässige Stetigkeit	162
	Zwischenwertsatz	163
	Monotone Funktionen	165
5	Reihen	
5.1	Folgen von Partialsummen	169
	Definitionen und Beispiele	169
	Erste Konvergenzkriterien	171
	Restsummen	172
5.2	Absolute Konvergenz	173
	Majorantenkriterium	173
	Reihen mit exponentiell abnehmenden Gliedern	174
	An der Grenze zur Divergenz	176
5.3	Bedingt konvergente Reihen	179
	Alternierende Reihen	179
	Umstellung der Reihenglieder	181
5.4	Potenzreihen I	185
	Funktionenreihen	185
	Potenzreihen konvergieren auf Kreisscheiben	186
	Produkt zweier Reihen	189
	Die Exponentialreihe	191
6	Die Exponentialfunktion	
6.1	Elementare Eigenschaften	194
	Ein berühmter Grenzwert	194
	Die Eulersche Zahl	195
	Die Exponentialfunktion auf \mathbb{R}	197

6.2	Die Logarithmusfunktion	199
	Allgemeine Potenzen	200
6.3	Hyperbolische Funktionen	202
	Gerade und ungerade Funktionen	202
	Die hyperbolischen Grundfunktionen	202
	Areafunktionen	203
6.4	Die cis-Funktion	206
	Die Eulerschen Formeln	206
	Die cis-Abbildung, geometrisch	207
	Periodische Funktionen	210
6.5	Die Argumentfunktion	212
	\mathbb{R} modulo 2π	212
	Addition von Argumenten	213
	Wurzelziehen im Komplexen	214
	Polarkordinaten in der (x, y) -Ebene	216
6.6	Winkelfunktionen	218
	Weitere Eigenschaften von \cos und \sin	218
	Arcusfunktionen	220
	Tangens und Arcustangens	221
	Formeln für das Argument	222
7	Differentialrechnung	
7.1	Grundbegriffe	225
	Die Ableitung, auf neue Art betrachtet	225
	Die Ableitung als Funktion f'	228
	Geometrische Interpretation der Ableitung	229
	Exkurs über die o -Notation	231
7.2	Rechenregeln	234
	Die Ableitung der elementaren Grundfunktionen	237
	Funktionen der Klasse C^r	239
7.3	Extrema	242
	Globale und lokale Extrema	242
	Beispiele	245
7.4	Mittelwertsatz	249
	Reellwertige Funktionen	249
	Komplex- und vektorwertige Funktionen	251
	Die Regel von Bernoulli–de l'Hôpital	252
	Ein einfaches Monotoniekriterium	255
7.5	Konvexe Funktionen	257
	Wendepunkte	260
	Einige allgemeine Ungleichungen	261

7.6	Taylor-Approximation	268
	Qualität von Nullstellen	268
	Konstruktion der Taylor-Polynome	270
	Untersuchung des Restglieds	272
	Anwendung: Analyse von kritischen Punkten	275
	Die Taylor-Reihe	277
7.7	Das Newtonsche Verfahren	280
	Die Idee	280
	Konvergenzverhalten	281
8	Differentialgleichungen I	
8.1	Einführung	286
	Mathematische Modelle	286
	Ein Beispiel aus der Mechanik	288
	Differentialgleichungen, allgemein	291
	Der Hauptsatz über Anfangswertprobleme	293
	Ein einfaches numerisches Verfahren	295
	Differentialgleichungen höherer Ordnung, Systeme von Dglen	296
8.2	Lineare Differentialgleichungen	299
	Allgemeine Betrachtungen	299
	Das charakteristische Polynom	302
	Komplexe Eigenwerte	304
	Mehrfache Eigenwerte	306
	Inhomogene Differentialgleichungen	308
	Konstruktion einer partikulären Lösung	309
	Beispiele	311
8.3	Eulersche Differentialgleichungen	317
	Streckungsinvarianz	317
	Das Indexpolynom	318
9	Integralrechnung	
9.1	Begriff des Riemannsches Integrals	320
	Grundeigenschaften des Integrals	321
	Teilungen und Riemannsche Summen	323
	Existenz des Integrals	326
	Rechenregeln	330
	Nullmengen	333
9.2	Der Hauptsatz der Integralrechnung	338
	Aufintegrieren	338
	Stammfunktionen	340

Über die Technik des Integrierens	343
Die Integrale der elementaren Grundfunktionen	345
Linearität	346
Integral von “logarithmischen Ableitungen”	347
9.3 Partielle Integration und Substitution	349
Partielle Integration	349
Anwendung: Das Wallissche Produkt	351
Substitution, erste Art	353
Substitution, zweite Art	355
9.4 Integration der rationalen Funktionen	360
Idee der Partialbruchzerlegung	360
Rechenablauf	362
Beispiele	365
Weitere Ausdrücke, die sich elementar integrieren lassen	367
9.5 Uneigentliche Integrale	372
Unendlich lange Zwickel	372
Konvergenzkriterien	373
Die Gammafunktion	375
Vergleich von Reihen mit uneigentlichen Integralen	377
10 Anwendungen der Integralrechnung	
10.1 Differentialgleichungen II	381
Zurückführung auf eine Quadratur	381
Allgemeine lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	382
Variation der Konstanten	385
Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	387
Separierbare Differentialgleichungen	390
Speziell: x -freie Differentialgleichungen	394
Sogenannte “homogene” Differentialgleichungen	396
10.2 Die Stirlingsche Formel	403
Eine Näherungsformel für $n!$	403
10.3 Das arithmetisch-geometrische Mittel	407
Sachverzeichnis	411

Sachverzeichnis Analysis Eins

- Abbildung 24
- Abbrechfehler 172, 272
- abgeschlossene Hülle 153
- abgeschlossen (Intervall) 71
- abgeschlossen (Menge) 153
- abgeschlossene reelle Achse 125
- Ableitung (als Funktion) 228
- Ableitung an einer Stelle 227
- absolut konvergent 173
- absoluter Betrag 48, 82, 86
- abzählbar unendlich 72
- abzählbar 72
- Abzählung 72
- Addition 44
- additives Inverses 44
- AGM 407
- allgemeine Potenz 200
- Alphabet 19
- alternierende harmonische Reihe 180
- alternierende Reihe 179
- Anfangsbedingungen 288
- Anfangswertproblem 288
- Anregung 308
- antisymmetrisch 18
- Anzahl Elemente 41
- Äquivalenzklasse 20
- Äquivalenzklasse modulo 2π 212
- Äquivalenzrelation 19
- Arcuscosinus 221
- Arcussinus 220
- Arcustangens 222
- Areacosinus 203
- Areafunktionen 204
- Area sinus 203
- Areatangens 204
- Argumentfunktion 212
- arithmetisch-geometrisches Mittel 407
- Assoziativität 14
- assoziativ 44
- Asymptote 129
- auf (Abbildung) 27
- aufintegrieren 338
- Aufzählung 72
- Aussage 1
- Aussageform 1
- äussere Verknüpfung 85
- Auswahlfolge 136
- Ausziehen einer Teilfolge 137
- autonomes System 297
- bedingt konvergent 173
- beidseitig uneigentl. Integral 373
- beliebig genaue Daten 58
- Bereich konstanter Breite 5
- Bernoulli–de l'Hôpital'sche Regel 252
- Bernoullische Ungleichung 39, 261
- beschränkt (Menge) 68
- bestimmtes Integral 342
- Betragsreihe 173
- Bewegungsgleichung 288
- bijektiv 27
- Bildmenge 24
- Bildpunkt 24
- Bild 26
- Binomialkoeffizienten 42
- Binomischer Lehrsatz 42
- binäre Operation 44
- binäre Relation 18
- binäre Suche 164
- Binärzahlen 53
- Bogenlänge 93
- C^r -Funktion 240
- Cassinische Kurven 96
- Cauchy-Bedingung 144, 146
- Cauchy-Folge 146
- Cauchy-Kriterium (Folgen) 145
- Cauchy-Kriterium (Funktionen) 144
- Cauchy-Kriterium (Reihen) 171

- chaotisch 148
- charakteristische Gleichung 289, 303
- charakteristisches Polynom 289, 302
- cis-Funktion 206
- Cosinus 206
- Cotangens 221
- Coulombfeld 102

- Dämpfungskonstante 313
- darstellen (Funktion) 277
- Definitionsbereich 24
- Diagonalverfahren 76
- Differentialgleichung
 - erster Ordnung 291
- Differentialgleichung der harmonischen Schwingung 305
- Differentialgleichung
 - n -ter Ordnung 296
- Differentialoperator 300
- Differenzenquotient 227
- differenzierbar (an einer Stelle) 226
- differenzierbar, r -mal 239
- differenzierbare Funktion 228
- Differenzmenge 13
- direkter Beweis 4
- disjunkt 13
- Distributivgesetz (Körper) 45
- Distributivgesetze (Mengen) 14
- divergent (Folge) 130
- divergent (Reihe) 169
- Division 45
- Dreiecksungleichung 49, 82, 86, 106
- Dualbruchentwicklung 53
- Durchmesser 322
- Durchschnitt 13

- ε -Schlauch 118
- ε -Umgebung 106
- echt gebrochen (rat. Funktion) 363
- Eigen-Kreisfrequenz 313
- Eigenfunktion 303, 389
- eigentlich monoton 140
- Eigenwert 289, 303, 389
- Eindeutigkeitssatz (Dgln) 293
- eineindeutig 27
- Einheitssphäre 154

- Einheitswurzeln 34, 215
- Einheitswürfel 154
- einschaliges Hyperboloid 98
- Einschränkung einer Funktion 30
- einseitige Ableitung 227
- Eins 44
- elementare Funktionen 239
- Element 11
- elliptisches Integral 371
- endlich (Intervall) 71
- endlich (Menge) 41
- endliche Folge 90
- Endpunkte (Intervall) 70
- Endstück einer Folge 151
- Entropie 267
- Erweiterungskörper 79
- erzeugen (Äquivalenzklasse) 20
- erzeugen (Schnitt) 65
- euklidischer Abstand 86
- Eulersche Formeln 206
- Eulersche Zahl 195
- Existenzsatz (Dgln) 293
- existieren (uneigentl. Integral) 373
- Exponentialfunktion 191
- Exponentialreihe 191

- n -faches kartesisches Produkt 34
- λ -faches eines Vektors 85
- Fakultät(funktion) 40
- Faltungsprodukt 189
- Familie 33
- Familie von Mengen 33
- fast überall 334
- Fehlerschranke 56
- feiner (Teilung) 324
- Fibonacci-Folge 40, 193
- Fixpunkt 168
- Folge 34, 90
- Fortsetzung einer Funktion 30
- x -freie Differentialgleichung 394
- Fundamentalebene 210
- Fundamentalperiode 210
- Fundamentalsatz der Algebra 8, 83
- Funktion 24, 26
- Funktion der Klasse C^r 240

- Einheitswurzeln 34, 215
- Funktionalgleichung
 - der Exponentialfunktion 191
- Funktionenfolge 185
- Funktionenreihe 185
- Funktionentheorie 91
- Funktionsterm 24
- Funktionswert 24

- Gammafunktion 376
- Gauss'sche Zahlenebene 81
- genauer Grad (Polynom) 112
- geographische Breite 100
- geographische Länge 100
- geometrische Reihe 169
- geordnet (Menge) 18
- geordneter Körper 47
- geordnetes Paar 15
- geordnetes n -Tupel 33
- gerade Funktion 202
- Geschwindigkeit 231
- gesättigt (Zahlbasis) 58
- Gewichtssatz 262
- Gitterpunkt 34
- Gitter 212
- gleich (Mengen) 12
- gleichmässig stetig 162
- Glied einer Folge 90
- Glied einer Reihe 169
- globale Maximalstelle 160
- globales Maximum 160
- Grad (Polynom) 112
- Graph 25
- Grenzwert 117, 130
- grösste untere Schranke 69
- Gruppe 45

- halboffen 71
- harmonische Reihe 170
- Häufungspunkt einer Folge 135
- Häufungspunkt einer Menge 117
- Hauptsatz der
 - Infinitesimalrechnung 338, 341
- Hauptsatz über
 - monotone Funktionen 166
- Hauptteil 362

- Hauptwert des Arguments 222
- Hauptwert (uneigentl. Integral) 379
- höhere Ableitungen 239
- Höldersche Ungleichung 266
- homogene Dgl 288, 397
- homogene Eulersche Dgl 317
- homogene lineare Dgl 299, 383
- homogene lineare Dgl
 - zweiter Ordnung 387
- homogene Randdaten 388
- hyperbolische Funktionen 202
- hyperbolischer Pythagoras 202
- hyperbolischer Cosinus 202
- hyperbolisches Paraboloid 97

- identische Abbildung 32
- identitiv 18
- imaginäre Achse 81
- Imaginärteil 79
- Implikation 5
- implizite Funktion 32
- Indexgleichung 318
- Indexmenge 33
- Indexpolynom 318
- indirekter Beweis 4
- Induktionsschritt 38
- Infimum 68
- inhomogene lineare Dgl 308
- injektiv 27
- Inklusion 12
- Integral 327
- Integralkriterium für Reihen 377
- Integration einer Dgl 381
- Integrationskonstanten 291
- interpolieren 257
- Intervall 70
- Intervallarithmetik 56
- Intervallschachtelung 77
- Isothermen 95

- Jensensche Ungleichung 262
- Jet 271
- Jordan-Nullmenge 333

- Kalkül 1
- Kardinalität 41

- kartesisches Produkt 16
- kaskadisch 53
- Kettenregel 235
- kleinste obere Schranke 68
- Koeffizienten (Polynom) 112
- Koeffizienten (Potenzreihe) 186
- Koeffizientenvektor 112
- kommutative Gruppe 45
- Kommutativität 14, 44
- kompakt 154
- kompatibel (Zahlendaten) 57
- Komplement 13
- komplexe Amplitude 313
- komplexe Analysis 91
- komplexe Zahlen 80
- komponentenweise Addition 85
- Komponente 15
- Konjugation 81
- konjugiert komplexe Zahl 81
- konkav 257
- konstante Reihe 185
- konstituierende Gleichungen 286
- Kontraposition 6
- konvergent (Folge) 130
- konvergent (Reihe) 169
- konvergent (uneigentl. Integral) 373
- Konvergenzbereich 185
- Konvergenzkriterium von Abel 180
- Konvergenzradius 186
- konvex 257
- Koordinaten 85
- Koordinatenebene 34
- Koordinatenfunktionen 90
- Koordinatenraum 34
- Korn 325
- Körper 44
- kritischer Punkt 243
- Kronecker-Delta 300
- Kugelkoordinaten 102
- Kürzungsregel 52

- Landausches o -Symbol 231
- Länge (endliche Folge) 90
- Länge (Intervall) 71
- Länge (Wort) 19

- leere Menge 11
- Leibnizsche Formel 240
- Leibnizsche Reihe 180
- Lemniskate 84
- Lemniskate 96
- lexikographisch geordnet 19
- Limes inferior 149
- Limes superior 149
- linear geordnet 18
- lineare Dgl erster Ordnung 382
- lineare Dgl zweiter Ordnung 288
- lineare Konvergenz 175
- Linearkombination 290
- linksseitig stetig 113
- linksseitiger Grenzwert 120
- Lipschitz-Bedingung 104
- Lipschitz-stetig 108
- lipstetig (an einer Stelle) 104, 108
- lipstetig (global) 108
- logarithmische Spirale 400
- Logarithmusfunktion 199
- Logarithmusreihe 274
- lokal beschränkt 158
- lokal extremal 242
- lokal integrierbar 338
- lokal maximal 242
- lokale Extremalstelle 242
- Lösung einer Dgl 288

- Majorante 173
- Majorantenkriterium 173
- maximales Element 68
- Maximum 160
- Menge 11
- Messpunkt 323
- Metrik 106
- metrischer Raum 106
- minimales Element 68
- Minimum 160
- Minkowskische Ungleichung 264
- Minorante 173
- Mittelwertsatz der
 - Differentialrechnung 249
- Mittelwertsatz der
 - Integralrechnung 332

- mittlere Geschwindigkeit 231
- momentane Zuwachsrate 225
- Momentangeschwindigkeit 231
- Monom 112
- monoton fallend 140
- monoton wachsend 140
- Multiplikation 44
- multiplikatives Inverses 44

- nach oben beschränkt 68
- nach oben konvex 257
- nach oben unbeschränkt 68
- Nachfolger 36
- natürlicher Logarithmus 199
- natürliche Metrik 106
- negative Zahl 47
- Niveaufläche 98
- Niveaulinie 95
- p -Norm 263
- Null 44
- Nullmenge 333
- Nullpolynom 112
- Nullvektor 85
- Nummerierung 72

- oberer Limes 149
- obere Schranke 68
- Obermenge 30, 65
- Obersumme 336
- offen (Intervall) 71
- offen (Menge) 152
- offene Überdeckung 156
- Ordnungsvollständigkeit 65
- orthogonal 86
- Orthogonaltrajektorie 298
- o -Symbol 231

- Paarbildung 15
- Parameter 92
- Parameterbereich 98
- Parameterdarstellung 92
- Partialbruchzerlegung 361
- Partialsomme 169
- partielle Integration 349
- partielle Summation 181
- partikuläre Lösung 309

- Partition 41
- Pascalsches Dreieck 42
- Peano-Axiome 36
- Periode 210
- periodisch 210
- Polardarstellung 83, 213
- Polarkoordinaten 216
- Polygonverfahren 295
- Polynom 112
- Polynom in n Variablen 112
- positive Halbachse 71
- positive Zahl 47
- Potenzen 40
- Potenzmenge 15
- Potenzreihe 185, 186
- Produkt 56
- Produktregel 234
- Punkt 11, 85
- punktierte Ebene 213
- punktierte Umgebung 117

- quadratische Konvergenz 283
- Quadratur 382
- Quadratwurzel 142
- Quantoren 2, 7
- Quotientenkriterium 174
- Quotientenmenge 20
- Quotientenregel 234

- Randbedingungen 387
- Randwertproblem 388
- rationale Funktion 112
- rationale Funktion von
zwei Variablen 367
- rationale Zahlen 22
- Realteil 79
- rechte Seite einer Dgl 292
- rechtsseitig stetig 113
- rechtsseitiger Grenzwert 120
- reelle Achse 81
- reelle Funktion 91
- reeller Vektorraum 86
- reelle Zahl 58
- reflexiv 18
- Regel von
Bernoulli–de l’Hôpital 252

- Reihe 169
- Reihe mit positiven Gliedern 171
- Rekursion 39
- Relation 18
- repräsentieren (Äquivalenzklasse) 20
- Resonanzfall 310
- Resonanzfunktion 314
- Restglied 272
- Restklassenring modulo q 21
- Restsumme 172
- Reuleaux-Dreieck 5
- Richtungsfeld 292
- Riemann-integrierbar 326
- Riemannsches Integral 327
- Riemannsche Summe 322, 324, 336
- Ring 21, 45

- Sattelfläche 97
- sättigen (Zahlbasis) 58
- Satz von Bolzano-Weierstrass 148
- Satz von der gleichmässigen
 Stetigkeit 163
- Satz von Heine-Borel 156
- Satz vom Maximum 160
- Satz von Rolle 249
- schlicht 97
- Schlupf 105
- schneiden (Mengen) 13
- Schnitt 65
- Schranke 68
- Schraubenlinie 94
- Schwankung 322
- Schwankungssumme 324
- Schwarzsche Ungleichung 86
- Schwerpunkt 262
- separierbare Dgl 390
- Signumfunktion 50
- Singleton 11
- Sinus 206
- Skalar 85
- Skalarprodukt 86
- Spektrum 303
- Sprungstelle 120
- Stammfunktion 340
- stationäre Lösung 314
- stationärer Punkt 243
- stetig (an einer Stelle) 105, 107
- stetige Funktion 107
- Stirlingsche Formel 40, 403
- streng konvex 257
- streng monoton 140
- stückweise stetig 120
- Stützfunktion 258
- Stützgerade 5, 258
- Substitution 353
- Subtraktion 45
- Summe (Funktionenreihe) 185
- Summe einer Reihe 169
- Summe 46, 56
- Supremum 68
- surjektiv 27
- symmetrische bilineare Funktion 86
- symmetrische Differenz 14
- symmetrisch 18
- System von Dgln 1. Ordnung 296

- Tangens 221
- Tangentialraum 102
- Tangentialvektor 102
- Taylor-Reihe 271
- Taylorsches
 Approximationspolynom 271
- Teilfolge 136
- Teilintervall 323
- Teilmenge 12
- Teilung eines Intervalls 323
- Teilungspunkt 323
- teleskopierende Summe 171
- Toleranz 105
- totale Ordnung 18
- transitiv 12
- transitiv 18
- Trendfunktion 227
- triviale Lösung 299

- überabzählbar 76
- Überdeckungsradius 156
- Überdeckungssatz 156
- Umgebung eines Punktes 106
- Umgebung von ∞ 125
- Umgebungsfeld 155

- Umkehrabbildung 28
- Umkehrfunktion 28
- Umkehrung 5
- unbeschränkt (Menge) 68
- unbestimmt integrieren 343
- unbestimmtes Integral 341
- uneigentlich konvergent 134
- uneigentlicher Grenzwert 127
- uneigentlicher
 - Häufungspunkt (Folge) 135
- uneigentlicher
 - Häufungspunkt (Menge) 126
- uneigentliches Integral 373
- uneigentlicher Punkt 125
- unendliche Folge 34, 90
- “unendlich viele” x_k 135
- ungebrochener Teil 360
- Ungenauigkeit 56
- ungerade Funktion 202
- Ungleichung zwischen dem
 - arithmetischen und dem
 - geometrischen Mittel 265
- unimodal 168
- unterer Limes 149
- Untermenge 65
- Untersumme 336
- Urbild 27
- Urbildpunkt 26
- Variation der Konstanten 385
- Vektor 85
- Vektorfeld 102
- Vektorprodukt 87
- vektorwertige Funktion 90
- Verankerung 38
- Vereinigung 13, 33
- Vervollständigung 36
- Vielfachheit (Nullstelle) 268, 360
- vollständige Induktion 37
- vollständiger metrischer Raum 146
- Wallissches Produkt 352
- Wendepunkt 260
- Wertemenge 24
- Wertevorrat 24
- Wertzuwachs 225
- Winkel 216
- Wort 19
- n -te Wurzel 7, 30, 142, 167
- Zahlbasis 58
- Zahlendatum 56
- Zahlfolge 90
- Zentralwert 56
- Zielbereich 24
- zusammengesetzte Abbildung 32
- zweistellige Relation 18
- Zwischenwertsatz 163

CHRISTIAN BLATTER

ANALYSIS ZWEI

ETHZ
Studiengänge
Mathematik und Physik

Sommersemester 2004

Inhaltsverzeichnis Analysis Zwei

11 Funktionenfolgen und -räume

11.1 Problemstellung	1
Abschreckende Beispiele	2
Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen	5
11.2 Gleichmässige Konvergenz	12
Der M -Test für gleichmässige Konvergenz von Reihen	12
Stetigkeit der Grenzfunktion	13
Funktionen als Punkte eines Funktionenraums	14
Ableitung der Grenzfunktion	15
11.3. Grenzübergang unter dem Integralzeichen	18
“Dominated Convergence”	20
11.4 Integrale mit einem Parameter	24
Ableitung unter dem Integralzeichen	25
Anwendung auf Taylor-Entwicklungen	27
11.5 Potenzreihen II	31
Potenzreihen sind Taylor-Reihen	32
Die Binomialreihe	33
Der Satz von Abel	35
11.6 Differentialgleichungen III	39
Verwandlung in eine Integralgleichung	40
Der allgemeine Fixpunktsatz	42
Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes	43
Differentialgleichungen höherer Ordnung	47

12 Mehrdimensionale Differentialrechnung

12.1 Vereinbarungen und Bezeichnungen	49
Punkte, Vektoren und Matrizen	49
Die Norm einer linearen Abbildung	51
Lineare Funktionale	52
Der Tangentialraum	53
12.2 Der Ableitungsbegriff	56
Richtungsabhängige Zuwachsraten	56
Die Tangentialabbildung	57
Partielle Ableitungen	60
Stetigkeit der partiellen Ableitungen genügt	62
Die Fälle $n = 1$ und $m = 1$	64
Komplex-analytische Funktionen	67

12.3 Rechenregeln	72
Die verallgemeinerte Kettenregel	72
Anwendungen der Kettenregel	75
12.4 Mittelwertsätze	79
Eine pauschale Abschätzung	80
Anhang: Die Theta-Vereinbarung	82
12.5 Höhere partielle Ableitungen	84
Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge	85
Taylor-Entwicklung	86
Stationäre Punkte	90
Kritische Punkte bei zwei Variablen	93
12.6 Hauptsätze	97
Was heisst “stetig differenzierbar”?	97
Der Satz über die Umkehrabbildung	99
Die Funktionaldeterminante	104
Anwendung: Der Fundamentalsatz der Algebra	105
Weitere Beispiele	106
Anwendung auf Gleichungssysteme: Implizite Funktionen	110
12.7 Kurven und Flächen im \mathbb{R}^n	116
Kurven	116
Flächen	118
Beispiele zum Immersionssatz	121
“Koordinatenpflaster”	124
Tangentialebene	124
Hyperflächen (Flächen der Kodimension 1)	127
Durch r Gleichungen definierte Flächen	130
12.8 Extremalaufgaben	134
Bedingte lokale Extrema	134
Lagrangesche Multiplikatoren	138
Beispiele	139
Globale Extrema	146
13 Mehrfache Integrale	
13.1 Definition und Grundeigenschaften	152
Was ist neu hier?	152
Das Fundament: Integral über einen Quader	153
Rechenregeln	155
Nullmengen	157
Messbare Mengen	159
Integrale über beliebige Bereiche	163
Allgemeine Riemannsche Summen	168

13.2 Der ‘‘Satz von Fubini’’	171
Integral über das Produkt zweier Quader	171
Reduktion von Integralen über allgemeine Bereiche	175
13.3 Weitere Eigenschaften des Masses	186
Bewegungsinvarianz	186
Volumendilatation unter einer linearen Abbildung	188
Die Gramsche Determinante	190
13.4 Variablentransformation	193
Krummlinige Koordinaten	193
Hilfssätze	195
Die Transformationsformel	197
Beispiele	200
13.5 Längen und Flächeninhalte	204
Das d -dimensionale Volumen von krummen d -Flächen	204
Längen von Kurven	206
Totale Variation	211
2-Flächen im dreidimensionalen Raum	215

14 Vektoranalysis

14.1 Vektorfelder, Linienintegrale	223
Vereinbarungen und Definitionen	224
Begriff des Vektorfelds	225
Feldlinien	229
Linienintegrale	231
Umkehrung des Richtungssinns	235
Ketten	236
14.2 Konservative Felder	240
Ein erster Integralsatz	241
14.3 Rotation	245
Zirkulation	245
Infinitesimale Zirkulation	246
Der Fall $n = 2$	249
Der Fall $n = 3$	252
14.4 Die Greensche Formel für ebene Bereiche	256
Zerlegung der Einheit	256
Glatt berandete Bereiche	258
Zulässige Bereiche	261
Umlaufszahl	263
Flächenberechnung mit Hilfe von Randintegralen	266
Ein Umweg für ein Integral	267

14.5 Fluss und Divergenz	272
Strömungsfelder in der Ebene	272
Orientierung	275
Fluss durch eine orientierte Fläche	277
Divergenz	280
14.6 Der Satz von Gauss	284
Glatt berandete Bereiche	284
Der Satz von Gauss für zulässige Bereiche	288
Anwendungen des Satzes von Gauss	289
Der Laplace-Operator	292
Die Wärmeleitungsgleichung	294
14.7 Der Satz von Stokes	299
Zulässige Flächen	299
Pullback	301
Der Satz von Stokes	304
14.8 Die Integrabilitätsbedingung	308
Einfach zusammenhängende Gebiete	309
Die Integrabilitätsbedingung	312
 Sachverzeichnis	 317

Sachverzeichnis Analysis Zwei

- Ableitung 58
- Additivität (Mass) 165
- adjungiertes Feld 272
- allgemeiner Fixpunktsatz 42
- Anfangspunkt 118
- Anfangswertproblem 39
- äquivalent (Ketten) 236
- äquivalent (Param'darst.) 116, 124
- Arbeitsintegral 232
- Arcussinusreihe 34
- Arcustangensreihe 19
- Astroide 203
- äusseres Integral 172
- äusseres Mass 157

- Banachraum 15
- bedingt lokal minimal 134
- bedingt stationärer Punkt 137
- Beispiel von Schwarz 218
- beschränkte Variation 212
- Bewegung 188
- Bildkette 299
- Bildkurve 299
- Binomialkoeffizienten 33
- Binomialreihe 33

- Cantor-Menge 170
- Cauchy-Bedingung 12
- Cauchy-Kriterium für
 - gleichmässige Konvergenz 12
- Cauchy-Riemannsches
 - Differentialgleichungen 70
- charakteristische Funktion 163
- Coulombfeld 227

- Descartessches Blatt 266
- Determinantenfunktion 144
- Differential 58
- Differential (r -tes) 87
- Differentialoperatoren 231

- differenzierbar (an einer Stelle) 58
- n -dimensionales Mass 164
- d -dimensionales Volumen 205
- Divergenz 274, 282

- y -einfacher Bereich 176
- einfach zusammenhängend 310
- Elementarmatrix 188
- elliptisches Integral 208
- Endpunkt 118
- Epizykloide 270
- exakt 240
- Exponentialabbildung 54
- Extremum mit
 - Nebenbedingungen 138

- fast disjunkt 164
- Feld 223
- Feldlinie 229
- Feldstärke 226
- Fixpunktsatz 42
- d -Fläche 124
- Flächenformeln 266
- Flächeninhalt 205
- Flächenkurve 125
- Flächennormale 127
- Fluss (über eine Kette) 272, 273
- Fluss (durch eine Fläche) 278
- Fourier-Reihe 37
- Funktionaldeterminante 104
- Funktionalmatrix 61

- gemeinsamer Definitionsbereich 5
- geschlossen (Vektorfeld) 248
- geschlossener Ausdruck 16
- geschlossene Fläche 300
- geschlossene Kurve 118
- glatt berandeter Bereich 258, 284
- gleichmässige Konvergenz 5
- gliedweise differenzieren 16

- gliedweise integrieren 19
- global injektiv 124
- Gradient 65
- Gradientenfeld 228
- Gramsche Determinante 190
- Greensche Formel 259
- Greensche Identitäten 298
- Guldinsche Regeln 221

- Hadamardsche Ungleichung 144
- harmonische Funktion 292
- Hessesche Form 92
- holomorphe Funktion 68
- homogenes Vektorfeld 226
- Hyperfläche 127

- Immersion 122
- Immersionssatz 119
- implizite Funktion 111
- indefinit 91
- infinitesimale Zirkulation 247
- inneres Integral 172
- Integrierbarkeitsbedingung 313
- Integral mit einem Parameter 24
- Integral 155, 163
- Integralgleichung 40
- integrierbar 155, 163
- integrierender Faktor 315
- inverse Kurve 235
- Iterierte 43

- Jacobische Determinante 104
- Jacobische Matrix 61
- Jet 88
- Jet-Extension 47
- Jordansches Mass 164

- Keplersche Fassregel 184
- Kern 119
- Kette 236, 237
- Kettenregel 72
- Kochsche Kurve 117
- Kodimension 127
- Koeffizientenvergleich 32
- Kolonnenvektor 49
- kompakte d -Fläche 204
- komplex differenzierbar 68
- komplex-analytisch 68
- konservativ 240
- konstante Kurve 117
- Kontinuitätsgleichung 291
- Kontraktionsprinzip 42
- Konvergenz
 - (Funktionsfolge) 5, 7
 - (Funktionsreihe) 9
 - (im quadratischen Mittel) 8
- Konvergenzbereich 5
- Konvergenzintervall 31
- Koordinatendifferential 54, 67
- Korn 169
- Kriterium von Weierstrass 12
- kritischer Punkt 91, 104
- Kugelkoordinaten 193
- Kurve 238
- Kuspe 108

- Lagrangesche Multiplikatoren 138
- Lagrangesche Prinzipalfunktion 139
- Länge 205, 213
- Längenelement 207
- Laplace-Operator 292
- Lebesgue-Integral 20
- leerer Streckenzug 309
- Leibnizsche Regel 25
- Leibnizsche Regel "mit Extras" 76
- lineare Abbildung 50
- lineare Form 87
- lineares Funktional 52
- Linienelement 233
- Linienintegral 233, 237
- logarithmische Spirale 209
- lokal gleichmässige Konvergenz 7
- lokal injektiv 124
- lokal lipstetig 43
- Lösung (System von Dgln) 39

- M -Test 12
- Möbiusband 276
- Mass 153, 164
- Matrix einer Abbildung 50
- Maximalrang 119

- messbar 159
- Messpunkte 154, 169
- Mittelwertsatz der
 - Differentialrechnung 79
- modulo (exakt) 240
- Momentengleichung 201
- monoton wachsende
 - Funktionenfolge 9
- Monotonie (Mass) 165
- Multiindex 96

- Nebenbedingung 127, 138
- negativ definit 91
- nichtentarteter kritischer Punkt 92
- nichtorientierbare Fläche 276
- Niveaumenge 127
- Norm 14, 51
- Normalenableitung 298
- normierter Vektorraum 14
- nullhomotop 309
- Nullmenge 157
- numerische Exzentrizität 208
- Oberfläche 285, 288
- Oberflächenelement 215, 278
- offene d -Fläche 124
- Operation 309
- orientierte Fläche 276
- orthogonale Abbildung 206

- Parallelepiped 187
- Parameterdarstellung 118, 124
- Parametertransformation 116, 124
- parametrisierte Fläche 124
- parametrisierte Kurve 116
- partielle Ableitung 25, 60
- partielle Funktion 56
- periodische Bahn 115
- periodischer Punkt 115
- Permutationsmatrix 189
- Polardarstellung einer Kurve 207
- polares Trägheitsmoment 203
- positiv definit 91
- Potential 228, 242
- Pullback (Funktionen) 134, 194
- Pullback (Felder) 301, 302
- punktweise Konvergenz 7

- Quader 153
- Quadergebäude 165
- quadratische Form 87
- Quellstärke 274, 282

- Rückkehrpunkt 117, 211
- Randmenge 159
- Randzyklus 247, 259, 261, 300
- Rang 119
- regulär (Abbildung) 122
- regulär (lineare Abbildung) 98, 119
- regulärer Punkt (Fläche) 130
- regulärer Punkt (Funktion) 90, 104
- regulärer Punkt (Vektorfeld) 228
- rektifizierbar 213
- Richtungsableitung 71
- Riemann-integrierbar 155
- Riemannsche Summe 154, 169
- Riemannsches Integral 155, 163
- Rotation 247, 249, 252

- Sattelpunkt 92
- Satz über die beschränkte
 - Konvergenz 20
- Satz über implizite Funktionen 111
- Satz von Abel 35
- Satz von Dini 11
- Satz von Gauss in der Ebene 275
- Satz von Gauss 288
- Satz von Messpunkten 154, 169
- Satz von Stokes 304
- Scherung 189
- ε -Schlauch 6
- schlicht 119
- Schwankung 155
- Schwankungssumme 155, 169
- Seele 6
- Selbstdurchdringung 124
- semidefinit 91
- singulär (lineare Abbildung) 98
- singulärer Punkt (Vektorfeld) 228
- skalares Oberflächenelement 215
- Skalarfeld 228
- d -Spat 187
- Sphäre 127
- Spur 118, 237

- Standardbasis 49
- Standardsimplex 185
- stationärer Punkt 91
- stationär (Temperaturverteilung) 294
- sternförmig 310
- stetig differenzierbar
 - (Abbildung) 98
 - (r -mal) 86
 - (Vektorfeld) 226
- stetige Kurve 117
- stratifizierte Menge 146
- Stratum 146
- Streckenzug 81
- stückweise stetig differenzierbar 237
- sup-Norm 14
- System von
 - Differentialgleichungen 39

- Tangentialabbildung 58
- Tangentialbündel 225
- Tangentialebene 124
- Tangentialraum 54
- Tangentialvektor 54
- Taylorsches
 - Approximationspolynom 88
- Teilung 153
- M -Test 12
- Thetaterm 82
- Theta-Vereinbarung 82
- Torus 218, 285
- totale Variation 212
- transversal 130

- Umlaufszahl 264

- Variation 212
- Vektorfeld 225
- vektorielles Linienelement 233
- vektorielles Oberflächenelement 278
- verallgemeinerte Kettenregel 72
- voll lokal minimal (maximal) 134
- Volltorus 285
- Volumen 153, 164

- Wärmefluss 295
- Wärmeleitungsgleichung 296
- Wärmeleitzahl 295
- Wellengleichung 96
- Winkelgeschwindigkeitsvektor 227
- Wirbeldichte 249
- wirbelfrei 248

- Zentralfeld 226
- Zerlegung (eines Bereichs) 168
- Zerlegung der Einheit 258
- Zirkulation 245, 247
- zulässiger Bereich 261, 288
- zulässige Fläche 299
- zulässige Koordinaten 224
- zulässige Operation 309
- zulässig (rechte Seite einer Dgl.) 43
- zusammenhängend 81
- Zusammenhangskomponente 244
- Zuwachsrate 53
- Zykloide 209
- Zyklus 238
- Zylinderkoordinaten 193