# 10

# Anwendungen der Integralrechnung

## 10.1 Differentialgleichungen II

### Zurückführung auf eine Quadratur

Wir haben in Abschnitt 8.1 den Begriff der Differentialgleichung eingeführt und erklärt, dass die sogenannten konstituierenden Gleichungen eines realen physikalischen (biologischen, ökonomischen, …) Systems von endlich vielen Freiheitsgraden in aller Regel Differentialgleichungen oder Systeme von Differentialgleichungen sind. Wir haben den geometrischen Gehalt einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ interpretiert als Vorgabe eines Richtungsfeldes in (einem Gebiet) der $(x, y)$-Ebene. Gesucht sind diejenigen Kurven

$$\gamma : \quad x \mapsto \bigl(x, y(x)\bigr) \ ,$$

die in allen ihren Punkten die dort vorgeschriebene Steigung aufweisen:

$$\forall x : \quad y'(x) \ = \ f\bigl(x, y(x)\bigr) \ ,$$

das heisst: sich kontinuierlich dem Richtungsfeld anschmiegen.

Die Auflösung einer Differentialgleichung wird auch deren **Integration** genannt. Im allgemeinen werden nämlich elementar lösbare Differentialgleichungen in der Weise geknackt, dass sie durch geeignete Substitutionen usw. auf die Form

$$\frac{dz}{dt} \ = \ \phi(t) \tag{1}$$

gebracht werden, wobei die neuen Variablen $t$ und $z$ "umkehrbar" mit $x$ und $y$ verknüpft sind. Die besonders einfache Differentialgleichung (1) hat natürlich die Lösungen

$$z \ = \int \phi(t)\, dt = \ \Phi(t) + \text{const.} \ , \tag{2}$$

$\Phi(\cdot)$ eine Stammfunktion von $\phi(\cdot)$. Am Schluss sind diese Lösungen wieder auf $x$ und $y$ umzurechnen. Man sagt dann, man habe die gegebene Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf die **Quadratur** (1) $\rightsquigarrow$ (2) zurückgeführt.

Die in Abschnitt 8.2 vorweggenommene Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist gerade dadurch gekennzeichnet, dass sie ohne Verwendung des Integralbegriffs auskommt: Es genügt, den richtigen Ansatz für die Lösungsfunktionen hinzuschreiben. Inzwischen haben wir aber integrieren gelernt, so dass weitere Typen von Differentialgleichungen der Behandlung zugänglich werden.

## Allgemeine lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir beginnen mit der allgemeinen **linearen Differentialgleichung erster Ordnung**:

$$y' \;=\; p(x)\,y + q(x) \qquad \bigl(=: f(x, y)\bigr)\;; \tag{3}$$

dabei sind $p(\cdot)$ und $q(\cdot)$ gegebene stetige Funktionen von $x$. Sind $p(\cdot)$ und $q(\cdot)$ auf dem Intervall $]\,a, b\,[$ definiert, $-\infty \le a < b \le \infty$, so ist $\operatorname{dom}(f)$ der vertikale Streifen $]\,a, b\,[\,\times\mathbb{R}$. Durch jeden Punkt dieses Streifens geht genau eine Lösungskurve. Aus den folgenden Formeln geht überdies hervor, dass jede einzelne Lösung auf dem ganzen Intervall $]\,a, b\,[$ definiert ist und nicht in einem inneren Punkt "explodieren" kann (Fig. 10.1.1). Dieser Sachverhalt trifft auch bei linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung zu.

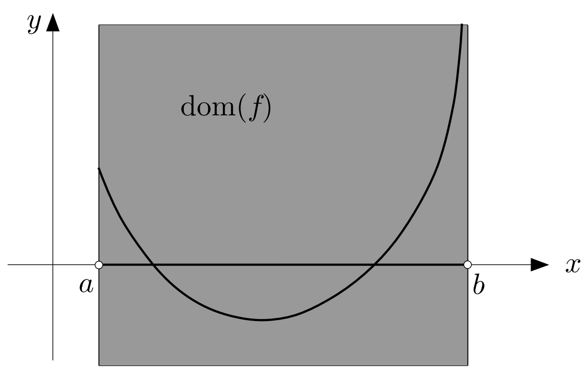


Fig. 10.1.1

① Die rechte Seite der *nichtlinearen* Differentialgleichung

$$\dot{y} \;=\; y^2 \qquad \bigl(=: f(t, y)\bigr)$$

ist in der ganzen $(t, y)$-Ebene definiert. Die durch den Anfangspunkt $(0, 1)$ gehende Lösung ist gegeben durch

$$y(t) \;=\; \frac{1}{1 - t}\,,$$

"explodiert" also schon nach einer Sekunde (Fig. 10.1.2). ◯

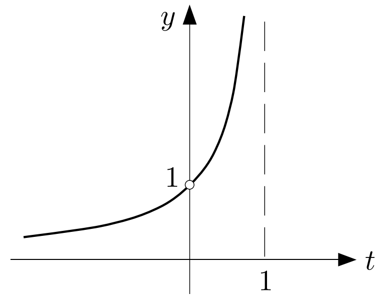


Fig. 10.1.2

Wir betrachten zunächst die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$y' \;=\; p(x)\,y \qquad (a < x < b)\;. \tag{4}$$

Die spezielle Gleichung $y' \;=\; \lambda\, y$ mit konstantem $\lambda \in \mathbb{R}$ ist von dieser Art. Ihre Lösungen sind die Exponentialfunktionen

$$y(x) \;=\; C\, e^{\lambda x}\,, \qquad C \in \mathbb{R}\;.$$

Für eine Lösung $Y(\cdot)$ der Gleichung (4) versuchen wir daher den Ansatz

$$Y(x) \;:=\; e^{P(x)}$$

mit einer neuen unbekannten Funktion $P(\cdot)$. Tragen wir dies in (4) ein, so muss identisch in $x$ gelten:

$$P'(x)\, e^{P(x)} = p(x)\, e^{P(x)}\;,$$

und das trifft genau dann zu, wenn $P(\cdot)$ eine Stammfunktion von $p(\cdot)$ ist. Übrigens ist dann $Y(x) \neq 0$ für alle $x \in \,]\,a, b\,[$.

Nun ist (4) eine homogene lineare Differentialgleichung. Mit $Y(\cdot)$ sind daher auch alle Vielfachen $C\,Y(\cdot)$, $C \in \mathbb{R}$ fest, Lösungen von (4), und zwar sind das schon alle Lösungen, da durch jeden Punkt von $]\,a, b\,[\,\times\mathbb{R}$ genau eine Kurve dieser Schar geht (Fig. 10.1.3). Wir haben bewiesen:

**(10.1)** *Die allgemeine Lösung von* (4) *ist gegeben durch*

$$y(x) \;=\; C\, e^{P(x)}\,, \qquad C \in \mathbb{R}\;;$$

*dabei bezeichnet $P(\cdot)$ irgendeine Stammfunktion von $p(\cdot)$.*

② Es soll die durch den Punkt $\left(\frac{5}{4}, 1\right)$ gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; \frac{y}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1) \tag{5}$$

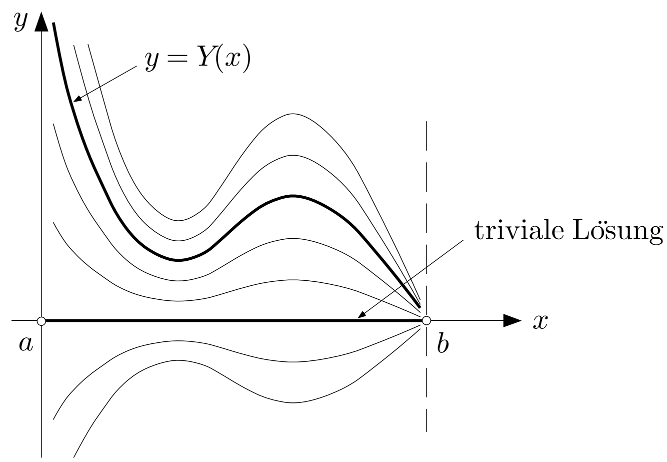


Fig. 10.1.3

bestimmt werden. — Die Funktion $p(x) := 1/\sqrt{x^2-1}$ besitzt die Stammfunktionen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \langle\, \log(x + \sqrt{x^2-1})\,\rangle\ ;$$

somit lautet die allgemeine Lösung von (5):

$$y(x) \;=\; C\, e^{\log(x+\sqrt{x^2-1})} = C\,(x + \sqrt{x^2-1})\ .$$

Die Anfangsbedingung liefert für $C$ die Gleichung

$$1 = C\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - 1}\right) = 2\,C\ ,$$

und damit erhalten wir als Lösung unserer kleinen Aufgabe:

$$y(x) = \frac{1}{2}\,(x + \sqrt{x^2-1})\ .$$

Dies ist, wie erwartet, für alle $x > 1$ definiert. ○

Wir wenden uns nun der inhomogenen Gleichung (3) zu und weisen zunächst darauf hin, dass Satz **(8.7)** auch hier gilt:

**(10.2)** *Es seien* $y_*(\cdot)$ *eine irgendwie gefundene ("partikuläre") Lösung der inhomogenen Gleichung* (3) *und* $Y(\cdot)$ *eine nichttriviale Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung* (4). *Dann ist die allgemeine Lösung* $y(\cdot)$ *der Gleichung* (3) *gegeben durch*

$$y(x) \;=\; C\,Y(x) + y_*(x)\,, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{6}$$

*(= "allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung").*

Ist $y(\cdot)$ gegeben durch (6), so gilt

$$y' = C\,Y' + y'_* = C\,pY + (py_* + q) = p(CY + y_*) + q = py + q\,,$$

das heisst: $y(\cdot)$ ist eine Lösung von (3). Umgekehrt: Ist $y(\cdot)$ eine Lösung von (3), so genügt die Funktion $u := y - y_*$ der homogenen Gleichung (4):

$$u' = y' - y'_* = (py + q) - (py_* + q) = p(y - y_*) = pu\;.$$

Nach **(10.1)** ist folglich $u = C\,Y$ für ein geeignetes $C \in \mathbb{R}$ und somit $y = C\,Y + y_*$, wie behauptet.

### Variation der Konstanten

Gelegentlich kann man tatsächlich eine partikuläre Lösung $y_*(\cdot)$ von (3) erraten. Es gibt aber auch ein systematisches Verfahren zur Bestimmung der allgemeinen Lösung von (3), die sogenannte Methode der **Variation der Konstanten**:

Zunächst soll man die zugehörige homogene Gleichung (4) lösen. Man erhält eine Funktionenschar

$$y(x) \;=\; C\,Y(x)\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,,$$

mit einer gewissen "Basisfunktion" $Y(\cdot) \neq 0$. Für die allgemeine Lösung von (3) macht man nun den Ansatz

$$y(x) \;:=\; C(x)\,Y(x) \tag{7}$$

mit einer neuen unbekannten Funktion $C(\cdot)$. Trägt man diesen Ansatz in (3) ein, so ergibt sich

$$C'Y + \underline{CY'} \;=\; \underline{p\,CY} + q\;.$$

Da $Y$ das homogene Problem (4) löst, fallen die unterstrichenen zwei Terme heraus, und es bleibt für $C(\cdot)$ die einfache Differentialgleichung

$$C'\,Y(x) = q(x) \qquad \text{bzw.} \qquad C' \;=\; \frac{q(x)}{Y(x)}$$

übrig, die sofort integriert werden kann. Bei dieser Integration wird auch noch eine neue Integrationskonstante $C_0$ abgesondert. Damit ist gezeigt:

**(10.3)** *Die allgemeine Lösung von* (3) *hat die Form*

$$y(x) \;=\; \bigl(C(x) + C_0\bigr)\, Y(x)\;;$$

*dabei ist* $Y(\cdot) \neq 0$ *eine Lösung der homogenen Gleichung* (4) *und* $C(\cdot)$ *eine Stammfunktion von* $q(\cdot)/Y(\cdot)$.

(Die in **(10.3)** erscheinenden Formeln braucht man sich nicht zu merken, wohl aber den Ansatz (7). Der Rest ergibt sich dann im Anwendungsfall von selbst.)

③ Es soll die durch den Ursprung gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; x^3 - xy \tag{8}$$

bestimmt werden. — Die zugehörige homogene Gleichung $y' = -xy$ besitzt die Lösungen

$$y(x) \;=\; C\, e^{-x^2/2}\,, \qquad C \in \mathbb{R}\;.$$

Wir machen also für die Lösungen von (8) den Ansatz

$$y(x) \;:=\; C(x)\, e^{-x^2/2}$$

und erhalten für $C(\cdot)$ die Bedingung

$$C' e^{-x^2/2} + \underline{C e^{-x^2/2}\,(-x)} \;=\; x^3 \;\underline{-x\, C e^{-x^2/2}}\;,$$

das heisst: $C' \;=\; x^3\, e^{x^2/2}$. Dies ist nun unbestimmt zu integrieren:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int x^3\, e^{x^2/2}\, dx = 2 \int \underset{\downarrow}{u}\;\; \underset{\uparrow}{e^u}\;\; du\,\Big|_{u:=x^2/2} \\ &= 2\langle\, u e^u\,\rangle - 2\int e^u\, du = \langle\, 2(u-1)e^u\,\rangle_{u:=x^2/2} \\ &= \langle\,(x^2-2)e^{x^2/2}\,\rangle\;. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von (8) ergibt sich damit zu

$$y(x) \;=\; (x^2 - 2) + C_0 e^{-x^2/2}$$

(Fig. 10.1.4). Die durch den Ursprung gehende Lösung

$$y_0(x) \;=\; x^2 - 2 + 2e^{-x^2/2}$$

besitzt dort einen Flachpunkt:

$$y_0(x) = x^2 - 2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + O(x^6)\right) = \frac{x^4}{4} + O(x^6)\,;$$

dabei haben wir alle unterdrückten Glieder der Taylor-Entwicklung in dem “$O$-Term” $O(x^6)$ zusammengefasst. ○

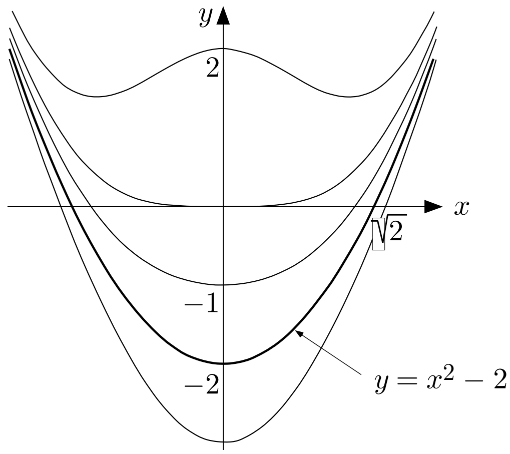


Fig. 10.1.4

## Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die allgemeine **homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung**,

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y \;=\; 0 \qquad (a < x < b) \tag{9}$$

lässt sich nicht auf Quadraturen zurückführen. Da derartige Gleichungen in den verschiedensten Zusammenhängen (Schwingungsprobleme, Differentialgeometrie u.a.) auftreten, gehört ihre Theorie zu den am intensivsten erforschten Gebieten der Analysis. Dabei geht es einerseits um die speziellen Funktionen, die durch gewisse spezielle Gleichungen (9) definiert werden (zum Beispiel die trigonometrischen Funktionen, die sogenannten Besselfunktionen u.a.), und andererseits um qualitative Eigenschaften der Lösungen (zum Beispiel Abstände und Anzahl der Nullstellen) in Abhängigkeit von Eigenschaften der Koeffizientenfunktionen $p(\cdot)$ und $q(\cdot)$.

Die Gesamtheit $\mathcal{L}$ der Lösungen von (9) ist ein zweidimensionaler Vektorraum. Das bedeutet folgendes $\bigl($siehe auch Satz **(8.1)**$\bigr)$: Kann man sich irgendwie zwei linear unabhängige Lösungen $Y_1(\cdot)$ und $Y_2(\cdot)$ verschaffen, so ist die allgemeine Lösung von (9) gegeben durch

$$y(x) \;=\; C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x)\,; \qquad C_1\,, C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Ein korrekter Satz von Anfangsbedingungen, nämlich

$$y(x_0) = y_0\ , \qquad y'(x_0) = v_0$$

mit gegebenen Zahlen $x_0$, $y_0$ und $v_0$ legt die Werte $C_1$ und $C_2$ fest und zieht damit eine wohlbestimmte Funktion aus der Lösungsgesamtheit $\mathcal{L}$ heraus.

Anstelle von Anfangsbedingungen, die an *einem* Punkt $x_0$ angreifen, kann man auch sogenannte **Randbedingungen** formulieren, die an den *zwei* weit voneinander entfernten Punkten $a$ und $b$ der $x$-Achse gleichzeitig angreifen (Fig. 10.1.5):

$$y(a) = y_a\ , \qquad y(b) = y_b$$

mit gegebenen Randdaten $y_a$, $y_b$. Diese Aufgabe ist wesentlich heikler als die vorangehende, und es braucht nicht immer eine Lösung zu geben. Derartige **Randwertprobleme** (oft mit **homogenen Randdaten** $y_a = y_b = 0$) spielen in den Anwendungen eine ungeheure Rolle, und ihre Behandlung bildet wohl den interessantesten Teil der ganzen Theorie. Um zu zeigen, welche neuen Phänomene da auftauchen, behandeln wir ein ganz simples Beispiel, wo wir alles explizit ausrechnen können.

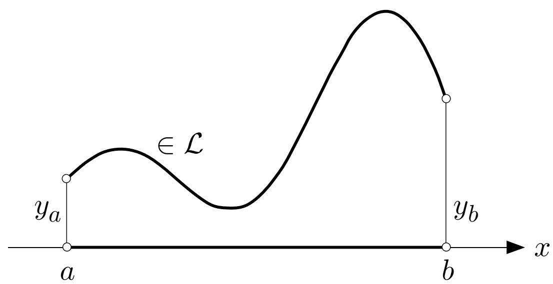


Fig. 10.1.5

(4) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2\, y \;=\; 0 \tag{10}$$

auf dem $x$-Intervall $[\,0, 1\,]$. Es tritt hier ein Parameter $\omega > 0$ auf, der noch eine überraschende Rolle spielen wird. Gegeben sind ferner die Randbedingungen

$$y(0) = y_0\ , \qquad y(1) = y_1\ . \tag{11}$$

Die allgemeine Lösung von (10) lautet bekanntlich:

$$y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\ ; \qquad A\,, B \in \mathbb{R}\ .$$

Die Randbedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ccccc} A\cos 0 & + & B\sin 0 & = & y_0 \\ A\cos\omega & + & B\sin\omega & = & y_1 \end{array}\right\} \tag{12}$$

für die Integrationskonstanten $A$ und $B$. Der ersten Gleichung entnimmt man sofort $A = y_0$, so dass wir mit der Bedingung

$$B\sin\omega = y_1 - y_0\cos\omega \tag{13}$$

verbleiben. Ist $\sin\omega \neq 0$, so wird dadurch $B$ bestimmt zu

$$B = \frac{y_1 - y_0\cos\omega}{\sin\omega}\ ,$$

und unser Randwertproblem (10)∧(11) besitzt dann für beliebige Randdaten $y_0$, $y_1$ genau eine Lösung, nämlich die Funktion

$$y(x)\ =\ y_0\cos(\omega x) + \frac{y_1 - y_0\cos\omega}{\sin\omega}\ \sin(\omega x)\ .$$

Ist aber

$$\sin\omega\ =\ 0\ , \tag{14}$$

so ist (13) und damit das Gleichungssystem (12) nur lösbar, wenn zufälligerweise $y_1 - y_0\cos\omega = 0$ ist. In anderen Worten: Für gewisse spezielle Werte des Parameters $\omega$ besitzt das Randwertproblem (10)∧(11) nur für geeignete Randdaten eine Lösung. Die durch (14) charakterisierten speziellen $\omega$-Werte heissen die **Eigenwerte** dieses Beispiels; es handelt sich um die Zahlen

$$\omega_k\ :=\ k\,\pi \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\ .$$

Homogene Randdaten $y_0 = y_1 = 0$ lassen immer die triviale Lösung $y(x) :\equiv 0$ zu. Ist aber $\omega := \omega_k$ ein Eigenwert, so gibt es weitere, eben nichttriviale Lösungen der homogenen Randwertaufgabe: Man hat dann $A = y_0 = 0$, und die Gleichung (13) lautet einfach $B\sin\omega_k = 0$. Dies ist wegen $\sin\omega_k = 0$ für jedes $B \in \mathbb{R}$ erfüllt. In anderen Worten: Die Funktionen

$$y(x) = B\ \sin(\omega_k x)\ , \qquad B \in \mathbb{R}\ ,$$

(Fig. 10.1.6) sind nichttriviale Lösungen des homogenen Randwertproblems

$$y'' + \omega_k^2\, y\ =\ 0\ , \qquad y(0) = y(1) = 0\ . \tag{15}$$

Man nennt sie die zum Eigenwert $\omega_k$ gehörigen **Eigenfunktionen**.

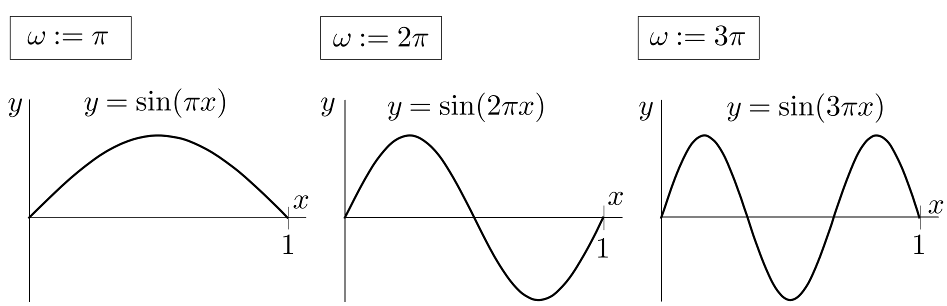


Fig. 10.1.6

Hinsichtlich des Parameters $\omega$ in (10) haben wir also die folgende Alternative:

— Ist $\omega$ kein Eigenwert, so besitzt das Randwertproblem (10)$\wedge$(11) für beliebige Randdaten genau eine Lösung, für homogene Randdaten also nur die triviale Lösung.

— Ist $\omega := \omega_k$ ein Eigenwert, so besitzt das Randwertproblem (10)$\wedge$(11) für die meisten Randdaten keine Lösung, und das homogene Randwertproblem (15) besitzt einen eindimensionalen Vektorraum von Lösungen.

○

## Separierbare Differentialgleichungen

Nach diesem Exkurs kehren wir zurück zu den Differentialgleichungen erster Ordnung, $y' = f(x,y)$, und behandeln einen Typ, der sich bei jedermann grösster Beliebtheit erfreut: die sogenannten *separierbaren Differentialgleichungen*. Die rechte Seite $f(\cdot,\cdot)$ hat hier folgende spezielle Form: Sie ist ein Produkt von zwei stetigen Funktionen, die nur von je einer der beiden Variablen abhängen. Eine **separierbare Differentialgleichung** hat demnach die Gestalt

$$y' = g(x) \cdot k(y) \ . \tag{16}$$

Definitionsbereich ist ein Rechteck $R := \,]\,a,b\,[ \times ]\,c,d\,[$ der $(x,y)$-Ebene, das sich auch ins Unendliche erstrecken darf.

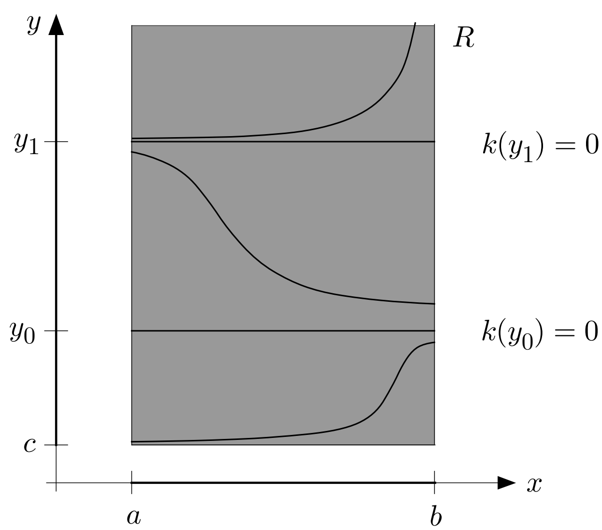


Fig. 10.1.7

Nullstellen von $k(\cdot)$ bedürfen besonderer Betrachtung. Ist $k(y_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $y(x) :\equiv y_0$ eine Lösung von (16). Die konstanten Lösungen zerlegen das Rechteck $R$ in horizontale Streifen (Fig. 10.1.7), und nach dem Eindeutigkeitssatz **(EE)** kann keine nichtkonstante Lösung eine Streifengrenze überqueren. Wir dürfen uns daher im weiteren auf das Innere eines einzigen derartigen Streifens beschränken, in anderen Worten: $k(y) \neq 0$ annehmen.

Mit $h(y) := 1/k(y)$ bringen wir (16) auf die für das weitere vorteilhaftere Gestalt

$$h(y)\, y' = g(x) \ . \tag{16'}$$

Es sei nun ein Anfangspunkt $(x_0, y_0)$ vorgegeben (Fig. 10.1.8), und es sei

$$x \mapsto y := y(x)$$

die durch $(x_0, y_0)$ gehende Lösung von (16′). Dann gilt für alle $t \in\, ]a, b[$ oder jedenfalls für alle $t$ in der Nähe von $x_0$:

$$h\bigl(y(t)\bigr)\, y'(t) = g(t)$$

(auf den Namen der unabhängigen Variablen kommt es nicht an). Integrieren wir das nach $t$ von $x_0$ bis zur frei gewählten oberen Grenze $x$, so ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x} h\bigl(y(t)\, y'(t)\bigr)\, dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \ .$$

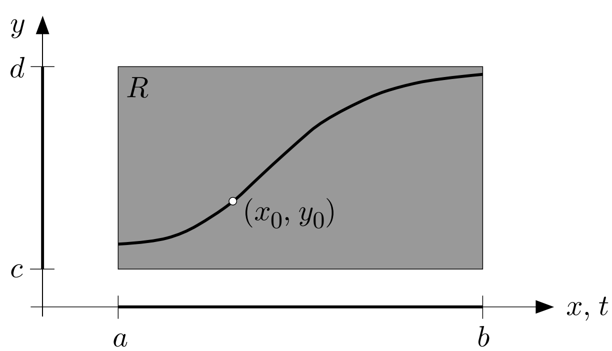


Fig. 10.1.8

Auf der linken Seite substitutieren wir

$$y(t) := y \ , \qquad y'(t)\, dt := dy \ .$$

Damit geht die letzte Gleichung über in

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} h(y)\, dy = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \ . \tag{17}$$

Die (gegebenen) Funktionen $g$ und $h$ besitzen Stammfunktionen $G$ und $H$. Mit ihrer Hilfe lässt sich (17) folgendermassen schreiben:

$$H\big(y(x)\big) - H(y_0) = G(x) - G(x_0) \ . \tag{18}$$

Wegen $h(y) \neq 0$ ist $H(\cdot)$ streng monoton und besitzt damit eine Umkehrfunktion $H^{-1}$. Rein formal ergibt sich daher aus (18) die folgende Formel für $y(x)$:

$$y(x) = H^{-1}\Big(G(x) - G(x_0) + H(y_0)\Big) \ .$$

In anderen Worten: Wenn es gelingt, die Gleichung

$$H(y) - H(y_0) = G(x) - G(x_0) \tag{19}$$

nach $y$ aufzulösen, so erhält man die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' \ = \ g(x)\,k(y)\,, \qquad y(x_0) = y_0$$

in expliziter Form. Die formelmässige Auflösung von (19) nach $y$ ist allerdings nicht immer möglich. Man kann dann versuchen, die Gleichung (19) nach $x$ aufzulösen, um wenigstens eine explizite Darstellung der Umkehrfunktion zu erhalten, oder man muss sich mit der impliziten Präsentation (19) der Lösung zufriedengeben.

Die vorangehenden Überlegungen liefern mit der Formelkette (16) $\longrightarrow$ (16′) $\longrightarrow$ (17) $\longrightarrow$ (18) bzw. (19) das folgende Rezept für die Behandlung von separierbaren Differentialgleichungen (16):

1. Schreibe die Differentialgleichung in der Form $\dfrac{dy}{dx} \ = \ g(x)\,k(y)$ .
2. Trenne ("separiere") formal die Variablen: $\dfrac{1}{k(y)}\,dy \ = \ g(x)\,dx$ .
3. Integriere links nach $y$, rechts nach $x$, und zwar
   — unbestimmt, falls nach der allgemeinen Lösung gefragt ist (dabei erscheint eine Integrationskonstante);
   — links von $y_0$ bis $y$, rechts von $x_0$ bis $x$, falls die durch $(x_0, y_0)$ gehende Lösung verlangt ist.
4. Löse nach $y$ auf, wenn Du kannst.

5 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' \ = \ \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

im Quadrat $Q := ]-1,1[^2$ der $(x,y)$-Ebene. Gesucht sind

(a) die allgemeine Lösung und, unabhängig davon,

(b) die durch den Punkt $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ gehende Lösung.

Formale Separation der Variablen liefert

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \; . \tag{20}$$

Für (a) haben wir das unbestimmt zu integrieren:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \; ;$$

es ergibt sich

$$\arcsin y = \arcsin x + \alpha \; , \tag{21}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ die Integrationskonstante bezeichnet. Hieraus erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned} y = \sin(\arcsin x + \alpha) &= x\cos\alpha + \sqrt{1-x^2}\,\sin\alpha \; , \\ (y - x\cos\alpha)^2 &= (1-x^2)\sin^2\!\alpha \; , \\ x^2 - 2xy\cos\alpha + y^2 \; &= \; \sin^2\!\alpha \; . \end{aligned} \tag{22}$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dass die Lösungskurven auf Kegelschnitten liegen. Die weitere Analyse würde zeigen, dass es sich dabei um Ellipsen handelt, die dem Quadrat $Q$ einbeschrieben sind (Fig. 10.1.9).

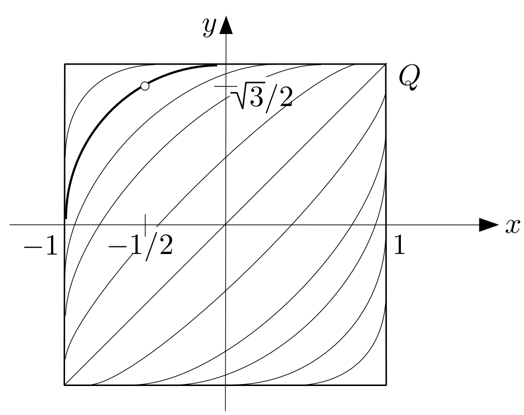


Fig. 10.1.9

Für die Aufgabe (b) haben wir (20) wie folgt bestimmt zu integrieren:

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \;=\; \int_{-1/2}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Es ergibt sich

$$\arcsin y - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \arcsin x - \arcsin(-\frac{1}{2})$$

und damit

$$\arcsin y - \arcsin x = \frac{\pi}{3} - \bigl(-\frac{\pi}{6}\bigr) = \frac{\pi}{2} \ ,$$

also (21) mit $\alpha := \pi/2$. Aus (22) folgt daher: Die Lösung des Anfangswertproblems (b) ist der Kreisbogen

$$y(x) \;=\; \sqrt{1-x^2} \qquad (-1 < x < 0) \ .$$

○

## Speziell: $x$-freie Differentialgleichungen

⑥ Die Wachstumsrate einer biologischen Population sei im wesentlichen proportional zur Zahl der vorhandenen Individuen, wobei aber der Proportionalitätsfaktor (im folgenden Wachstumskonstante genannt) mit zunehmender Population abnimmt, da sich die Individuen gegenseitig behindern. Diese Vorstellungen lassen sich wie folgt in ein mathematisches Modell übersetzen: Wir bezeichnen mit $y(t)$ die Grösse der Population zur Zeit $t$, wobei wir $y$ als kontinuierliche Variable betrachten. Weiter sei $\alpha > 0$ die Wachstumskonstante unter Vernachlässigung der gegenseitigen Behinderung; endlich messe der Parameter $\beta > 0$ den Einfluss der Zusammenstösse zwischen den Individuen auf die Wachstumsrate. Man überlegt sich, dass die Anzahl der (zufälligen) Zweierstösse pro Zeiteinheit proportional ist zum Quadrat der vorhandenen Individuen, und wird damit auf die folgende Differentialgleichung für die Funktion $y(\cdot)$ geführt:

$$\dot{y} \;=\; \alpha y - \beta y^2 \ . \tag{23}$$

Dies ist eine sogenannte $t$- bzw. $x$**-freie Differentialgleichung** und ist folglich separierbar. Das Richtungsfeld einer $x$-freien Differentialgleichung ist invariant bezüglich horizontaler Translation, und dasselbe gilt für die Schar der Lösungskurven. Mit anderen Worten: Die einzelnen Lösungskurven gehen durch horizontale Parallelverschiebung auseinander hervor (Fig. 10.1.10).

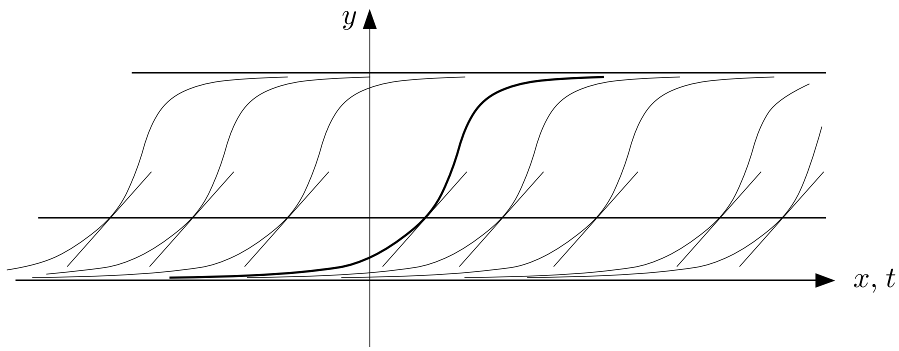


Fig. 10.1.10

Die rechte Seite unserer Differentialgleichung,

$$k(y) \ := \ \alpha y - \beta y^2 = -\beta y\left(y - \frac{\alpha}{\beta}\right) ,$$

besitzt die Nullstellen 0 und $\alpha/\beta$, die zu den zwei speziellen Lösungen

$$y(t) \ :\equiv \ 0 , \qquad y(t) \ :\equiv \ \frac{\alpha}{\beta} \tag{24}$$

Anlass geben. Im weiteren müssen wir die Differentialgleichung auf den $y$-Intervallen $]\,0, \alpha/\beta\,[$ und $]\,\alpha/\beta, \infty\,[$ je für sich untersuchen; negative $y$-Werte brauchen wir wohl nicht zu betrachten.

Nach diesen Vorbemerkungen schreiben wir nun (23) in der separierten Form

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{dy}{y(y-\alpha/\beta)} \ = \ -\alpha dt$$

und erhalten folgende Gleichung für die Lösung durch den Anfangspunkt $(0, y_0)$:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\alpha}{\beta}\frac{dy}{y(y-\alpha/\beta)} \ = - \int_0^t \alpha\, dt = -\alpha t \ . \tag{25}$$

Für das Integral linker Hand ($=: J$) ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{y-\alpha/\beta} - \frac{1}{y}\right) dy \\ &= \bigl(\log|y-\alpha/\beta| - \log|y|\bigr)\Big|_{y_0}^{y} \\ &= \log\left|\frac{y-\alpha/\beta}{y_0-\alpha/\beta}\right| - \log\left|\frac{y}{y_0}\right| \ . \end{aligned}$$

Aufgrund der letzten Vorbemerkung können wir hier die Betragstriche im weiteren weglassen: Die beiden Quotienten sind jedenfalls positiv. Wir setzen nun den für $J$ erhaltenen Wert in (25) ein; es ergibt sich

$$\frac{y-\alpha/\beta}{y_0-\alpha/\beta} \Bigg/ \frac{y}{y_0} \ = \ e^{-\alpha t} \ .$$

Dies lässt sich nach $y$ auflösen; wir erhalten damit als Lösung unseres Anfangswertproblems die Funktion

$$y(t) \;=\; \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{y_0}{y_0 - (y_0 - \alpha/\beta)e^{-\alpha t}}\ .$$

Was können wir hieran ablesen?

— Ist $0 < y_0 < \alpha/\beta$, so strebt $y(\cdot)$ mit $t \to \infty$ monoton wachsend gegen den Grenzwert $\alpha/\beta$.

— Ist jedoch $y_0 > \alpha/\beta$, so fällt $y(\cdot)$ monoton gegen denselben Grenzwert.

In anderen Worten: Das durch den Parameter $\alpha$ charakterisierte natürliche Wachstum und die durch $\beta$ erfassten gegenseitigen Behinderungen führen zusammen zu der stabilen Populationsgrösse $\alpha/\beta$, gegen die die Population $y(t)$ mit $t \to \infty$ in jedem Fall (ausser, wenn $y_0 = 0$) konvergiert (Fig. 10.1.11), und zwar nimmt die Abweichung $|y(t) - \alpha/\beta|$ im wesentlichen ab wie $e^{-\alpha t}$. "Stabil" bedeutet hier, dass die Population auch nach einer geringfügigen Störung wieder zur Idealgrösse $\alpha/\beta$ zurückkehrt. Die Lösung $y(t) :\equiv 0$ ist hingegen unstabil.

○

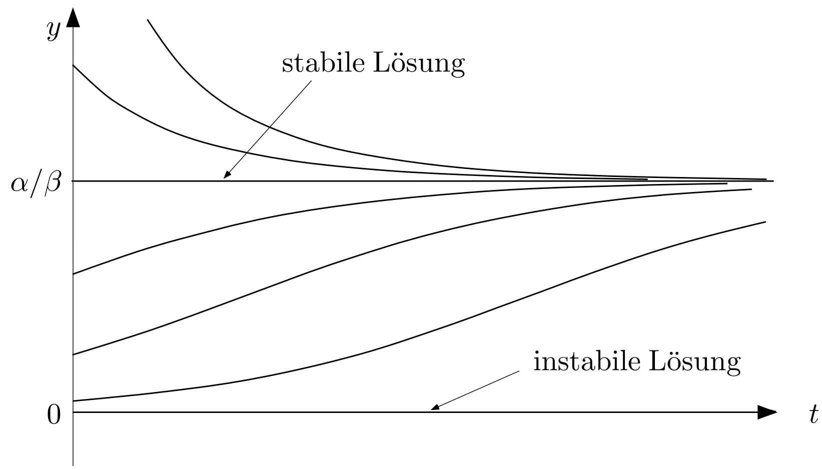


Fig. 10.1.11

## Sogenannte "homogene" Differentialgleichungen

Gelegentlich lässt sich eine Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ durch geeignete Substitutionen in eine separierbare Differentialgleichung in neuen Variablen überführen. Dies ist insbesondere der Fall bei den sogenannten "homogenen"

Differentialgleichungen (kein Zusammenhang mit homogenen *linearen* Differentialgleichungen). Bei einer **homogenen Differentialgleichung** ist die rechte Seite $f(\cdot,\cdot)$ in einem Sektor

$$\alpha < \arg(x,y) < \beta$$

der $(x,y)$-Ebene definiert und auf jedem Halbstrahl durch $O$ konstant, das heisst: Es gilt

$$\forall (x,y) \in \operatorname{dom}(f)\,,\ \forall \lambda > 0: \qquad f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)\ . \tag{26}$$

Hiernach wird in allen Punkten eines Halbstrahls dieselbe Richtung festgelegt (Fig. 10.1.12), und das Richtungsfeld ist invariant gegenüber Streckung von $O$ aus. Dasselbe gilt dann von der Schar der Lösungskurven; in anderen Worten: Die einzelnen Lösungskurven einer homogenen Differentialgleichung sind zueinander ähnlich und durch Streckung von $O$ aus aufeinander bezogen. Typisches Beispiel ist die Differentialgleichung

$$y' \;=\; -\frac{x}{y} \qquad (y > 0)\,;$$

ihre Lösungen sind konzentrische Kreisbögen um $O$, siehe das Beispiel 8.1.③.

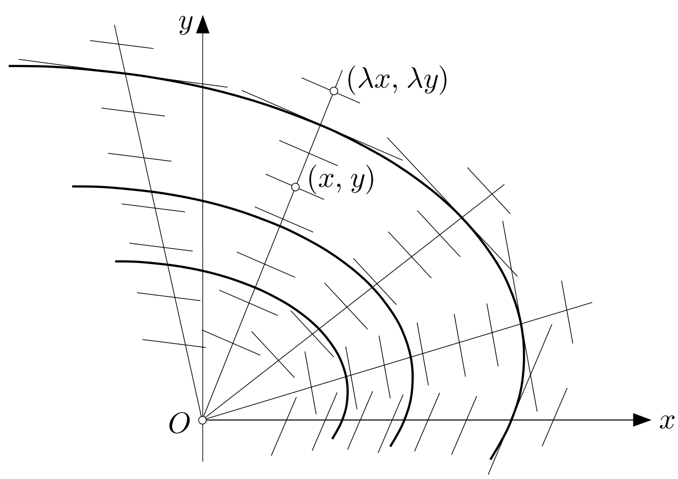


Fig. 10.1.12

Für die formale Behandlung einer homogenen Differentialgleichung nehmen wir an, dass $\operatorname{dom}(f)$ ganz in der rechten Halbebene liegt. Da $f$ im Grunde genommen nur vom Quotienten $y/x$ abhängt, führen wir diesen Quotienten als neue unbekannte Funktion ein:

$$\frac{y(x)}{x} =: u(x)\,,$$

und haben dafür die Variablen $y$ und $y'$ aus der gegebenen Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ zu eliminieren. Es gilt

$$y(x) = u(x) \cdot x\,, \qquad y' = u' \cdot x + u\,, \tag{27}$$

so dass wir für $u$ zunächst die Differentialgleichung

$$u'x + u = f(x, ux) \tag{28}$$

erhalten. Aufgrund der Homogenitätseigenschaft (26) ist aber

$$f(x, ux) = f(1, u) \qquad \forall x > 0\ .$$

Wir dürfen daher die rechte Seite von (28) durch $f(1, u)$ ersetzen, womit für $u(\cdot)$ die separierbare Differentialgleichung

$$u' \ = \ \frac{f(1, u) - u}{x}$$

resultiert. Wir können diese Differentialgleichung integrieren und erhalten schliesslich die Lösungen $y(\cdot)$ der ursprünglichen Gleichung mit Hilfe der ersten Gleichung (27).
Merke: Das Wesentliche ist, eine gegebene homogene Gleichung als solche zu erkennen. Der Rest ist einfach.

⑦ Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' \ = \ \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \qquad (x > 0)\ .$$

Die Substitution (27) liefert

$$u'x + u = \frac{ux + \sqrt{x^2 + u^2x^2}}{x} = u + \sqrt{1 + u^2} \qquad \bigl(= f(1, u)\,!\bigr)\ ,$$

so dass wir für $u$ die separierbare Differentialgleichung

$$u'x \ = \ \sqrt{1 + u^2}$$

erhalten. Wir schreiben $\dfrac{du}{dx}$ anstelle von $u'$ und separieren; es ergibt sich

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \ = \ \frac{dx}{x}\ .$$

Dies ist unbestimmt zu integrieren:

$$\log\bigl(u + \sqrt{1 + u^2}\bigr) \ = \ \log x + C\,,$$

und mit der Abkürzung $e^C =: p \; (> 0)$ ergibt sich weiter

$$u + \sqrt{1+u^2} \;=\; px \; .$$

Hieraus folgt nacheinander

$$(px-u)^2 = 1 + u^2 \,, \qquad 2pxu = p^2x^2 - 1$$

und somit wegen $ux = y$:

$$y(x) \;=\; \frac{1}{2p}(p^2x^2-1) \qquad (x>0) \; .$$

Die Lösungskurven sind also Parabelbögen (Fig. 10.1.13). Man rechnet nach, dass die betreffenden Parabeln konfokal sind mit gemeinsamem Brennpunkt im Ursprung. Dieser geometrische Sachverhalt belegt, dass die Lösungskurven durch Streckung am Ursprung auseinander hervorgehen, wie oben allgemein ausgeführt. ○

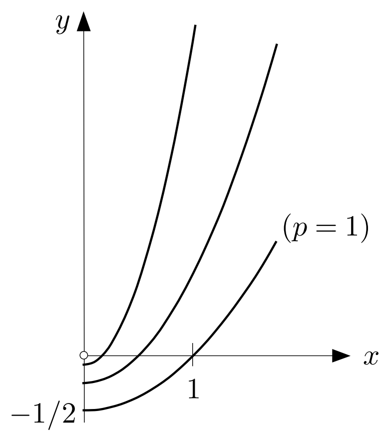


Fig. 10.1.13

⑧ Die Differentialgleichung

$$y' \;=\; \frac{x+qy}{qx-y} \,, \qquad q \in \mathbb{R} \;\text{ fest,} \tag{29}$$

ist an sich homogen und kann nach der angegebenen Methode behandelt werden. Dies führt auf die Differentialgleichung

$$u'x + u \;=\; \frac{1+qu}{q-u}$$

für die neue unbekannte Funktion $u(x) := y(x)/x$.

Um das Umrechnen einer Differentialgleichung auf neue Variablen zu üben, wollen wir hier jedoch anders vorgehen und Polarkoordinaten einführen (was auf Grund der Invarianzeigenschaften einer homogenen Differentialgleichung ohnehin naheliegt). Dabei soll der Polarwinkel $\phi$ die neue unabhängige Variable darstellen, und die Lösungskurven $\gamma$ werden in der Form

$$\gamma : \quad \phi \mapsto \begin{cases} x = r(\phi)\cos\phi \\ y = r(\phi)\sin\phi \end{cases} \tag{30}$$

gesucht; dabei ist $r = r(\phi)$ die neue unbekannte Funktion.

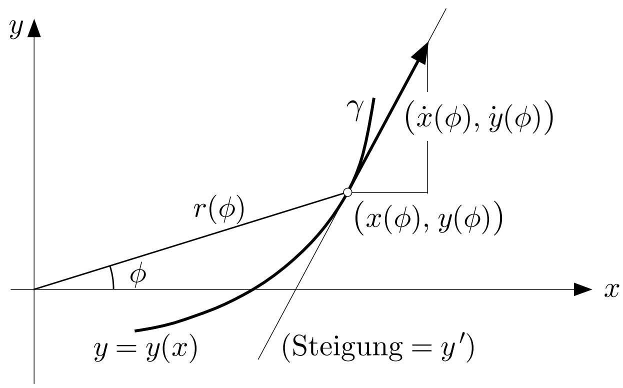


Fig. 10.1.14

Wir müssen also in der Differentialgleichung (29) die Variablen $x$, $y$ und $y'$ durch $\phi$, $r$ und $\dot r$ ausdrücken, wobei der Punkt die Ableitung nach $\phi$ bezeichnet. Die Buchstaben $x$, $y$ und $y'$ dürfen in der resultierenden Gleichung nicht mehr vorkommen! Aus (30) folgt $\dot x = \dot r\cos\phi - r\sin\phi$, ähnlich für $\dot y$, und der Fig. 10.1.14 entnimmt man weiter

$$y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{\dot r\sin\phi + r\cos\phi}{\dot r\cos\phi - r\sin\phi} \ .$$

Die für $x$, $y$ und $y'$ erhaltenen Ausdrücke sind nun in die Differentialgleichung (29) einzusetzen. Es ergibt sich

$$\frac{\dot r\sin\phi + r\cos\phi}{\dot r\cos\phi - r\sin\phi} \ = \ \frac{q\,r\sin\phi + r\cos\phi}{q\,r\cos\phi - r\sin\phi}$$

und somit nach Vereinfachung

$$\dot r \ = \ q\,r \ .$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $\phi \mapsto r(\phi)$; sie besitzt die Lösungen

$$r(\phi) \ = \ C\,e^{q\phi} \ .$$

Die gesuchten Lösungskurven sind also **logarithmische Spiralen** bzw. im Fall $q = 0$ Kreise. ○

## Aufgaben

1. Bestimme die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar
$$\Gamma: \qquad y^2 - x = c \quad (c \in \mathbb{R}) \ .$$
*Hinweis:* Berechne erst die Steigung $f(x, y)$ der Scharkurve durch einen gegebenen Punkt $(x, y)$ .

2. Die komplexwertige Funktion $z(\cdot)$ der reellen Variablen $t$ ("Zeit") ist Lösung des Anfangswertproblems
$$\dot{z} = iz^2 \ , \qquad z(0) = 1 \ .$$
   (a) Bestimme $z(\cdot)$.
   (b) Zeichne die Kurve $\gamma : t \mapsto z(t) \quad (-\infty < t < \infty)$ in der komplexen Ebene und beschreibe sie in Worten.

3. Bestimme die durch den Ursprung gehende Lösung der Differentialgleichung
$$y' = \cos(x + y) + \sin(x - y) \ .$$
*Hinweis:* Die Differentialgleichung ist separierbar.

4. Ein Punkt bewegt sich auf dem Einheitskreis der $(x, y)$-Ebene, und zwar so, dass seine Absolutgeschwindigkeit jederzeit gleich seinem momentanen Abstand von der Geraden $x = 2$ ist. Wie lange braucht er für einen Umlauf?

5. Ein Marienkäfer, der pro Sekunde 1 cm zurücklegt, befindet sich zur Zeit $t := 0$ am linken (befestigten) Ende eines Gummiseils von zunächst 1 m Länge und macht sich auf den Weg zum rechten Ende. Gleichzeitig wird aber das Seil von rechts her pro Sekunde um 1 m in die Länge gezogen. Wird der Käfer sein Ziel trotzdem erreichen, und wenn ja: Wie lange braucht er dazu?

6. Gegeben ist die Differentialgleichung
$$y' = 1 - y^2 \ .$$
   (a) Bestimme die Lösungen $y_0$, $y_1$, $y_2$ durch die Anfangspunkte $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$.
   (b) Skizziere in einer hinreichend grossen Figur das globale Portrait aller Lösungskurven dieser Differentialgleichung.

7. Eine gewisse biologische Population würde mit der Zerfallskonstanten $\gamma > 0$ aussterben, wenn nicht infolge zufälliger Zusammenstösse der Individuen auf geheimnisvolle Weise neue Individuen entstünden. Man

übersetze diese Vorstellung in eine Differentialgleichung für die Populationsgrösse $y$; dabei ist noch ein Parameter $\delta$ einzuführen, der den Erfolg der Zusammenstösse misst. Man diskutiere die Lösungen dieser Differentialgleichung für verschiedene Anfangswerte $y(0) =: y_0$. Nach welcher Zeit $T$ kommt es allenfalls zur Katastrophe?

8. Es bezeichne $y(\cdot|\eta)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = 6y + y^2 - y^3 , \qquad y(0) = \eta .$$

Bestimme die Funktion $g(\eta) := \lim_{t\to\infty} y(t|\eta)$. Die Funktionen $y(\cdot|\eta)$ selber sind an sich nicht verlangt.

*Hinweis:* Diskutiere die rechte Seite der Differentialgleichung und skizziere das sich ergebende Richtungsfeld in der $(t, y)$-Ebene. Die Lösung der Aufgabe lässt sich der Figur entnehmen.

## 10.2 Die Stirlingsche Formel

*Vorbemerkung:* Wir beschliessen diesen ersten Band mit zwei Anwendungen des bisher Gelernten, die den Rahmen von instruktiven Beispielen sprengen. In den vorangehenden Kapiteln war es ja immer so, dass eins aus dem andern mehr oder weniger zwingend sich ergab. Die eigentliche mathematische Leistung bestand in der Herausarbeitung der treffenden Konzepte, die am Ende alles als "natürlich" erscheinen lassen, und weniger in genialen Einzelideen, die ein schwieriges Problem schlagartig lösen.

Das ist in diesem Anhang anders. Der Leser ist eingeladen, das Vorgeführte nachzuvollziehen und sich daran zu freuen; er darf sich aber nicht darüber wundern oder sogar beschweren, dass er "nie von selbst darauf gekommen wäre". Die Zurückführung des arithmetisch-geometrischen Mittels auf ein elliptisches Integral (Abschnitt 10.3) war eine bahnbrechende Leistung von Gauss *himself*; er war damals zweiundzwanzigjährig ...

### Eine Näherungsformel für $n!$

Für die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen gibt es eine einfache Formel:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \;=\; \frac{n\,(n+1)}{2}\;,$$

die die $n-1$ Additionen auf drei Rechenoperationen kondensiert. Für das Produkt $n!$ dieser $n$ Zahlen gibt es hingegen keine derartige Formel. Ist $n$ gross, z.B. grösser als 1000, so ist $n!$ so ungeheuer gross, dass der genaue Wert von $n!$ auch niemanden interessieren würde. Die Fakultätfunktion ist aber in den verschiedensten Zweigen der Mathematik, vorab in der Wahrscheinlichkeitstheorie, von derartiger Bedeutung, dass eine Näherungsformel erwünscht ist, die das Wachstumsverhalten von $n!$ mit Hilfe von elementaren Funktionen beschreibt und dabei akzeptable numerische Werte liefert. Dies leistet die berühmte **Stirlingsche Formel**

$$n! \;\doteq\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\;.$$

Das Zeichen '$\doteq$' will hier besagen, dass der *relative* Fehler der stipulierten Näherung klein ist. Im einzelnen werden wir nämlich folgendes beweisen:

**(10.4)** *Für beliebige $n \geq 1$ gilt*

$$n! \;=\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right)\;;$$

*dabei ist $\theta_n$ eine Zahl zwischen* 0 *und* 1.

Die Stirlingsche Näherung liefert also einen zu kleinen Wert, und zwar ist der relative Fehler wegen

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right) = 1$$

um so kleiner, je grösser $n$ ist.

⌜ Grundlage der Stirlingschen Formel ist die folgende Bemerkung:

$$\log(n!) = \sum_{k=2}^{n} \log k \underset{(*)}{\doteq} \int_1^n \log t\,dt = n\log n - n + 1\ . \tag{1}$$

Sie besagt schon, dass $n!$ ungefähr proportional ist zu $(n/e)^n$. Damit stehen wir vor der Aufgabe, den Fehler an der Stelle $(*)$ möglichst genau abzuschätzen; dabei müssen wir allerdings noch irgendwoher die in **(10.4)** erscheinende Konstante $\pi$ herbeizaubern.

Wir beginnen mit dem Integral

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \log t\,dt &= \int_0^1 \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\log(k+\tau)}\ d\tau \\ &= (\tau - \tfrac{1}{2})\log(k+\tau)\Big|_0^1 + \int_0^1 (\tfrac{1}{2}-\tau)\frac{1}{k+\tau}\,d\tau \\ &= \frac{1}{2}\bigl(\log(k+1) + \log k\bigr)\ +\ r_k\ ;\end{aligned} \tag{2}$$

dabei haben wir zur Abkürzung

$$\int_0^1 (\tfrac{1}{2}-\tau)\frac{1}{k+\tau}\,d\tau =: r_k$$

gesetzt. Summieren wir die Gleichungen (2) über $k$ von 1 bis $n-1$, so erscheint linker Hand das Integral $\int_1^n \log t\,dt$, dessen Wert wir schon in (1) angegeben haben. Demnach ergibt sich

$$\begin{aligned} n\log n - n + 1 &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\bigl(\log k + \log(k+1)\bigr)\ +\ \sum_{k=1}^{n-1} r_k \\ &= \log(n!) - \frac{1}{2}\log n + \sum_{k=1}^{n-1} r_k \end{aligned}$$

und nach Umordnung:

$$\log(n!) = (n+\tfrac{1}{2})\log n - n\ +\ 1 - \sum_{k=1}^{n-1} r_k\ .$$

Wir schreiben das in der Form

$$n! = n^{n+1/2}\,e^{-n}\,C_n \tag{3}$$

mit $C_n := \exp\Bigl(1 - \sum_{k=1}^{n-1} r_k\Bigr)$.

Die $r_k$ genügen der Abschätzung

**(10.5)** *(Lemma)*

$$0 < r_k < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \qquad (k \geq 1)\,,$$

deren Beweis wir an den Schluss verschieben. Hieraus folgt für alle $n$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k < \frac{1}{12}\left((1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\right) < \frac{1}{12}\ .$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ besitzt daher einen endlichen Wert $s$, und ihre Restsummen genügen der Abschätzung

$$R_n := \sum_{k=n}^{\infty} r_k \leq \frac{1}{12}\left((\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}) + \ldots\right) \leq \frac{1}{12n}\ .$$

Somit gibt es zu jedem $n$ ein $\theta_n \in [\,0,1\,]$ mit $R_n = \dfrac{\theta_n}{12n}$. Es folgt

$$\begin{aligned} C_n &= \exp\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} r_k\right) = \exp\left(1 - s + R_n\right) = C \cdot \exp R_n \\ &= C \cdot \exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right)\ ; \end{aligned} \tag{4}$$

dabei haben wir zur Abkürzung

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \exp(1-s) =: C$$

gesetzt. Tragen wir (4) in (3) ein, so ergibt sich

$$n! = n^{n+1/2}\, e^{-n}\, C \cdot \exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right)\ .$$

Ausser **(10.5)** müssen wir daher nur noch $C = \sqrt{2\pi}$ beweisen. Betrachte hierzu die Produkte

$$\begin{aligned} W_m &:= \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1} \\ &= \frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2m)^4}{(2m)!(2m+1)!} = \frac{(m!)^4\cdot 2^{4m}}{\big((2m)!\big)^2(2m+1)} \\ &= \frac{1}{2m+1}\,\frac{m^{4m+2}\,e^{-4m}\,C_m^4\,2^{4m}}{(2m)^{4m+1}\,e^{-4m}\,C_{2m}^2} = \frac{m}{4m+2}\,\frac{C_m^4}{C_{2m}^2}\ ; \end{aligned}$$

dabei haben wir $m!$ und $(2m)!$ mit Hilfe von (3) ausgedrückt. Führen wir hier den Grenzübergang $m \to \infty$ durch, so folgt wegen $\lim_{m\to\infty} W_m = \pi/2$ (Wallissches Produkt **(9.25)**) die behauptete Relation

$$\frac{\pi}{2} = \frac{C^2}{4} \; .$$

Wir holen nun den Beweis von **(10.5)** nach:

Nach Definition von $r_k$ ist

$$r_k = \int_0^{1/2} (\tfrac{1}{2} - \tau) \frac{1}{k+\tau} \, d\tau + \int_{1/2}^{1} (\tfrac{1}{2} - \tau) \frac{1}{k+\tau} \, d\tau \; .$$

Substitutiert man hier im zweiten Integral $\tau := 1 - \tau'$ $(\frac{1}{2} \geq \tau' \geq 0)$, so erhält man nach Weglassung des '$'$' und Zusammenfassung:

$$r_k = \int_0^{1/2} (\tfrac{1}{2} - \tau) \left( \frac{1}{k+\tau} - \frac{1}{k+1-\tau} \right) d\tau \; . \tag{5}$$

Da beide Faktoren des Integranden für $0 < \tau < \frac{1}{2}$ positiv sind, ist jedenfallls $r_k > 0$. Wegen

$$(k+\tau)(k+1-\tau) = k(k+1) + \tau(1-\tau) > k(k+1) \qquad (0 < \tau < \tfrac{1}{2})$$

ist

$$\frac{1}{k+\tau} - \frac{1}{k+1-\tau} = \frac{1-2\tau}{(k+\tau)(k+1-\tau)} < \frac{1-2\tau}{k(k+1)} \qquad (0 < \tau < \tfrac{1}{2}) \; .$$

Tragen wir dies in (5) ein, so ergibt sich

$$r_k < \frac{1}{k(k+1)} \int_0^{1/2} (\tfrac{1}{2} - \tau)(1-2\tau) \, d\tau = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \; .$$

## 10.3 Das arithmetisch-geometrische Mittel

Es seien zwei Zahlen $a$ und $b$, $a \geq b > 0$, gegeben. Beginnend mit

$$a_0 := a\,, \qquad b_0 := b$$

berechnet man sukzessiv arithmetische Mittel $a_n$ und geometrische Mittel $b_n$ nach der folgenden Rekursionsvorschrift:

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}\,, \qquad b_{n+1} := \sqrt{a_n\, b_n}\ . \tag{1}$$

*Bsp:*

| $a_n$ | $b_n$ |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 1.5 | 1.414 |
| 1.4571 | 1.4564 |
| 1.456791048 | 1.456791014 |

Experimente mit verschiedenen Anfangswerten $a$ und $b$ zeigen, dass die beiden Folgen $a_.$ und $b_.$ jeweils äusserst schnell gegen einen gemeinsamen Grenzwert $\big(=: M(a,b)\big)$ konvergieren. Bei vielen Iterationsprozessen, zum Beispiel beim Newtonschen Verfahren, hängt der Grenzwert oder *Fixpunkt* nicht von den Anfangswerten ab, hier aber schon. Wir stehen damit vor der Aufgabe, $M(a,b)$ als Funktion der Variablen $a$ und $b$ darzustellen. Diese Aufgabe hat Gauss 1799 als erster gelöst.

Wegen $a_0 \geq b_0$ und der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel gilt für alle $n$:

$$a_n \geq b_n\ .$$

Durch Inspektion von (1) ergibt sich damit induktiv die folgende Kette von Ungleichungen:

$$\forall n: \qquad a \geq a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n \geq b\,,$$

womit schon erwiesen ist, dass die Folgen $a_.$ und $b_.$ je für sich konvergieren. Die genaue Rechnung zeigt folgendes:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2} \\ &= \frac{(a_n - b_n)^2}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2} \qquad \left(\ \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n)\ \right)\ . \end{aligned}$$

Hieraus ziehen wir definitiv den Schluss, dass die beiden Folgen einen gemeinsamen Grenzwert

$$M(a,b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

besitzen, und zwar ist die Konvergenz quadratisch, das heisst: Mit jedem Iterationsschritt wird die Anzahl der gleichen (und damit für $M(a,b)$ richtigen) Dezimalstellen von $a_n$ und $b_n$ im wesentlichen verdoppelt. Der Grenzwert $M(a,b)$ heisst das **arithmetisch-geometrische Mittel**, abgekürzt: **AGM**, der Ausgangszahlen $a$ und $b$.

**(10.6)** *Das AGM von zwei Zahlen $a$ und $b$ lässt sich durch ein elliptisches Integral ausdrücken. Es gilt nämlich*

$$\begin{aligned}\frac{1}{M(a,b)} \ &= \ T(a,b) := \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\ .\end{aligned}$$

⌜ Die beiden Darstellungen von $T(a,b)$ gehen durch die Substitution $t = b\tan\theta$ auseinander hervor; wir überlassen die Details dem Leser. — Den Schlüssel zu Satz **(10.6)** bildet die folgende Invarianzeigenschaft des Integrals $T(a,b)$:

$$(\mathbf{10.7}) \qquad T(a,b) = T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \qquad (a \geq b > 0)\ .$$

Hieraus folgt nämlich

$$T(a,b) = T(a_n, b_n) \qquad \forall n\ ,$$

so dass wir die folgende Kette von Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned}T(a,b) &= \lim_{n\to\infty} T(a_n,b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\\ &\underset{(*)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{M^2\cos^2\theta + M^2\sin^2\theta}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{M}\\ &= \frac{1}{M(a,b)}\ ;\end{aligned}$$

dabei haben wir zur Abkürzung $M(a,b) =: M$ gesetzt und an der Stelle $(*)$ einen Satz über den "Grenzübergang unter dem Integralzeichen" verwendet, der erst in Kapitel 11 bewiesen wird. ⌟

Wir holen nun den Beweis von **(10.7)** nach:

⌜ Die Substitutionsgleichung

$$\frac{1}{2}\bigl(t - \frac{ab}{t}\bigr) =: u \qquad (0 < t < \infty)$$

(Fig. 10.3.1) liefert die Formeln

$$\begin{aligned}t &= u + \sqrt{ab+u^2} \qquad (-\infty < u < \infty)\ ,\\ dt &= \left(1 + \frac{u}{\sqrt{ab+u^2}}\right)du = \frac{t}{\sqrt{ab+u^2}}\,du\ ;\end{aligned}$$

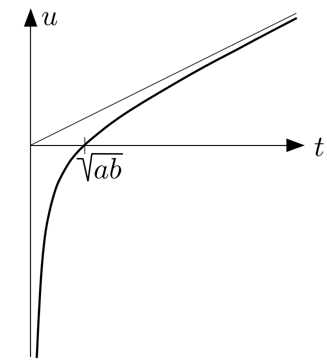


Fig. 10.3.1

dabei steht das letzte '$t$' als Abkürzung für den Ausdruck $u + \sqrt{ab + u^2}$. Ferner merken wir uns noch die folgende Beziehung zwischen den Variablen $t$ und $u$:

$$t^2 = ab + 2ut \; . \tag{2}$$

Diese Substitution verwandelt $T(a, b)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} T(a,b) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{(a^2+ab+2ut)(b^2+ab+2ut)}} \, \frac{du}{\sqrt{u^2+ab}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{R}} \, \frac{du}{\sqrt{u^2+ab}} \end{aligned} \tag{3}$$

mit

$$\begin{aligned} R &:= \left( \frac{a(a+b)}{t} + 2u \right) \left( \frac{b(a+b)}{t} + 2u \right) \\ &= \frac{ab}{t^2}(a+b)^2 + \frac{2u}{t}(a+b)^2 + 4u^2 = \frac{ab+2ut}{t^2}(a+b)^2 + 4u^2 \\ &= 4 \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right) \; ; \end{aligned}$$

dabei haben wir zuletzt wieder (2) benützt. Tragen wir den erhaltenen Wert von $R$ in (3) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} T(a,b) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2\right)\,(ab+u^2)}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2\right)\,(ab+u^2)}} \\ &= T\left( \frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right) \; . \end{aligned}$$

$\lrcorner$

## Aufgaben

1. Verifiziere, dass die beiden in **(10.6)** angegebenen Integrale denselben Wert haben.
2. Berechne mit Hilfe eines Taschenrechners das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$$

auf 8 Stellen genau.