11

Funktionenfolgen und -räume

11.1 Problemstellung

Die meisten interessanten Funktionen der Analysis sind durch einen Grenzprozess erklärt, etwa als Summe einer Potenzreihe oder mit Hilfe eines Integrals:

Bsp: $\exp z := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ bzw. $\exp z := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$,

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt \ .$$

Eine derartige Funktion $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ soll nun selbst wieder einem Grenzprozess unterworfen, zum Beispiel integriert werden. Ist es erlaubt, die approximierenden Funktionen f_n zu integrieren (was vielleicht nicht so schwer ist) und dann kurzerhand das Integral der Grenzfunktion dem Grenzwert der Integrale gleichzusetzen? In Formeln:

$$\int_a^b \big(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\big)\,dt \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right) \ .$$

Weiter: Die approximierenden Funktionen f_n gehören in der Regel einer "gut verstandenen" Funktionenklasse an und besitzen etablierte Regularitätseigenschaften (Stetigkeit usw.). Übertragen sich diese Eigenschaften ohne weiteres auf die Grenzfunktion f ?

Abschreckende Beispiele

Die folgenden Beispiele sollen zeigen, dass hier ein echtes Problem vorliegt: Wir müssen zur Kenntnis nehmen, dass Grenzprozesse über verschiedene Variablen, etwa $n \to \infty$, $x \to \xi$, $h \to 0$, $\|T\| \to 0$, nicht unbedacht vertauscht werden dürfen.

① Die Funktionen

$$f_n(t) := t^n \qquad (0 \le t \le 1)$$

sind auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $[0,1]$ stetig. Die Grenzfunktion

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t < 1) \\ 1 & (t = 1) \end{cases}$$

hingegen besitzt an der Stelle 1 eine Sprungstelle. ○

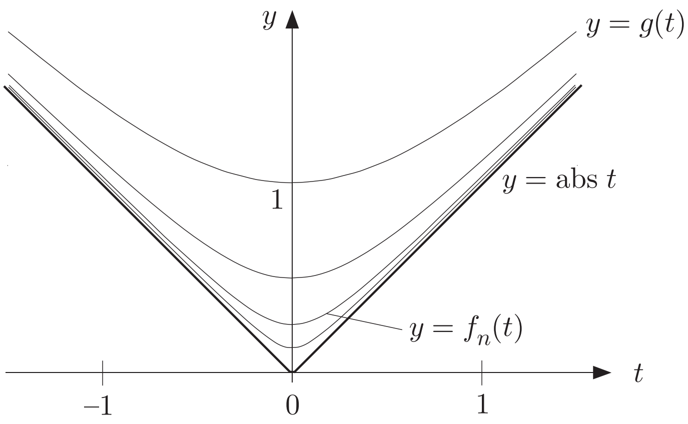

Fig. 11.1.1

② Ausgehend von der Funktion

$$g(t) := \sqrt{t^2 + 1}$$

(Fig. 11.1.1) definieren wir eine Funktionenfolge $\left(f_n\right)_{n\ge1}$ durch

$$f_n(t) \ := \ \frac{1}{n} g(nt) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} \ .$$

Geometrisch lässt sich das folgendermassen interpretieren: Man erhält den Graphen von f_n, indem man den Graphen der Ausgangsfunktion g von O aus mit dem Faktor $1/n$ streckt. Als Grenzfunktion ergibt sich

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \sqrt{t^2} = |t| \ .$$

Betrachten wir nun die Ableitungen

$$f_n'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1/n^2}}\ ,$$

so stellen wir fest, dass alle f_n auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind und dass weiter der

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(t) = \operatorname{sgn} t$$

für jedes feste t existiert. Trotzdem ist die Grenzfunktion abs an der Stelle 0 nicht differenzierbar. ○

③ In diesem Beispiel ist die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ zwar überall differenzierbar, aber f' stimmt nicht mit $\lim_{n\to\infty} f_n'$ überein:

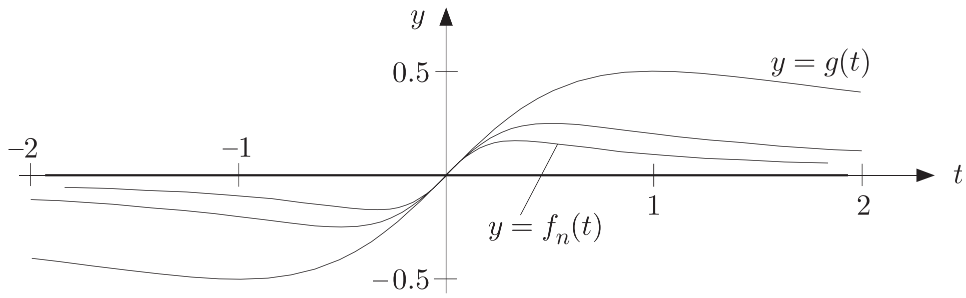

Fig. 11.1.2

Wir gehen aus von der Funktion

$$g(t) := \frac{t}{1+t^2}$$

(Fig. 11.1.2) und bilden wie im vorangehenden Beispiel die Funktionen

$$f_n(t) := \frac{1}{n}\, g(nt) = \frac{t}{1+n^2t^2}\ ,$$

die alle einen zu $\mathcal{G}(g)$ ähnlichen Graphen besitzen. Aus

$$|g(t)| \le \frac{1}{2} \qquad \forall t$$

folgt

$$|f_n(t)| \le \frac{1}{2n} \qquad \forall t\ , \tag{1}$$

und hieraus ergibt sich, dass die f_n gegen die Grenzfunktion $f(t) \equiv 0$ mit der Ableitung $f'(t) \equiv 0$ konvergieren. Was nun die Ableitungen der approximierenden Funktionen betrifft, so hat man $f_n'(t) = g'(nt)$ und folglich $f_n'(0) = g'(0) = 1$ für alle n. Somit ist $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 1 \ne f'(0)$. ○

④ Jede der Funktionen

$$f_n(t) := \begin{cases} 1 & \bigl(t = k/2^n\,,\ 0 \le k \le 2^n\bigr) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

ist fast überall 0 und somit über $[0,1]$ integrierbar. Die Grenzfunktion

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 & (t \in \mathbb{D} \cap [0,1]) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

hingegen ist nicht mehr integrierbar, denn die Schwankungssummen $D_T(f)$ haben für alle Teilungen T von $[0,1]$ den Wert 1. ○

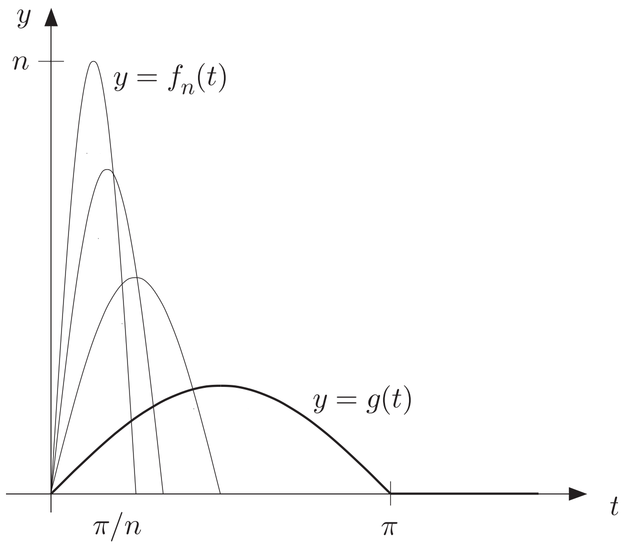

Fig. 11.1.3

⑤ Betrachte die Funktion

$$g(t) := \begin{cases} \sin t & (0 \le t \le \pi) \\ 0 & (t > \pi) \end{cases}$$

(Fig. 11.1.3) und weiter die Funktionen

$$f_n(t) := n\,g(nt) = \begin{cases} n\sin(nt) & \bigl(0 \le t \le \frac{\pi}{n}\bigr) \\ 0 & \bigl(t > \frac{\pi}{n}\bigr) \end{cases} \quad ,$$

deren Graphen aus dem von g hervorgehen durch Streckung mit den Faktoren $1/n$ in x-Richtung und n in y-Richtung. Die Buckel werden mit wachsendem

n immer höher; trotzdem hat man für jedes feste $t \in [0, \pi]$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$. Die Grenzfunktion $f(t) \equiv 0$ besitzt natürlich das Integral

$$\int_0^\pi f(t)\,dt = 0 \ .$$

Demgegenüber gilt für alle $n \geq 1$:

$$\int_0^\pi f_n(t)\,dt = \int_0^\pi g(t) = 2 \ ;$$

somit konvergieren die Integrale der approximierenden Funktionen in diesem Fall nicht gegen das Integral der Grenzfunktion. ◯

Sapienti sat. Um weiterzukommen, müssen wir den in naiver Weise eingeführten Sachverhalt

$$\lim_{n\to\infty} f_n \ = \ f \tag{2}$$

auf den Begriff bringen. Es geht hier nicht um die Konvergenz in einer unserer Grundstrukturen $\mathbb{X}$, sondern um die Konvergenz in einem "Funktionenraum". Die endlichdimensionalen Räume $\mathbb{X}$ lassen nur einen einzigen "vernünftigen", das heisst: mit den Rechenoperationen verträglichen Konvergenzbegriff zu. Funktionenräume sind aber im allgemeinen unendlichdimensional und können a priori in verschiedener Weise "topologisiert" werden. Dies führt auf unterschiedliche Konvergenzbegriffe: Eine gegebene Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ kann konvergieren oder divergieren, je nach dem zugrundegelegten Konvergenzbegriff.

Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen

Betrachte also allgemein eine Folge von Funktionen

$$f_n : \quad \mathbb{X}' \curvearrowright \mathbb{X} \qquad (n \geq 0)$$

mit dem **gemeinsamen Definitionsbereich** $\bigcap_n \operatorname{dom}(f_n) =: B$. Es sei A eine geeignete Teilmenge von B (die Menge A ist der prospektive **Konvergenzbereich** der betrachteten Folge), und es sei $f : A \to \mathbb{X}$ die Funktion, die als Grenzfunktion kandidiert. Wir stellen hier vier (!) verschiedene Konvergenzbegriffe vor. Der erste ist der "einfachste" und auch der stärkste, beim vierten wird nicht einmal mehr verlangt, dass die Funktionswerte $f_n(x)$ in jedem einzelnen Punkt $x \in A$ gegen $f(x)$ konvergieren.

(a) Die f_n **konvergieren auf** A **gleichmässig gegen** f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 $\big(= n_0(\varepsilon)\big)$ gibt, so dass gilt:

$$\forall n > n_0,\ \forall x \in A : \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ . \tag{3}$$

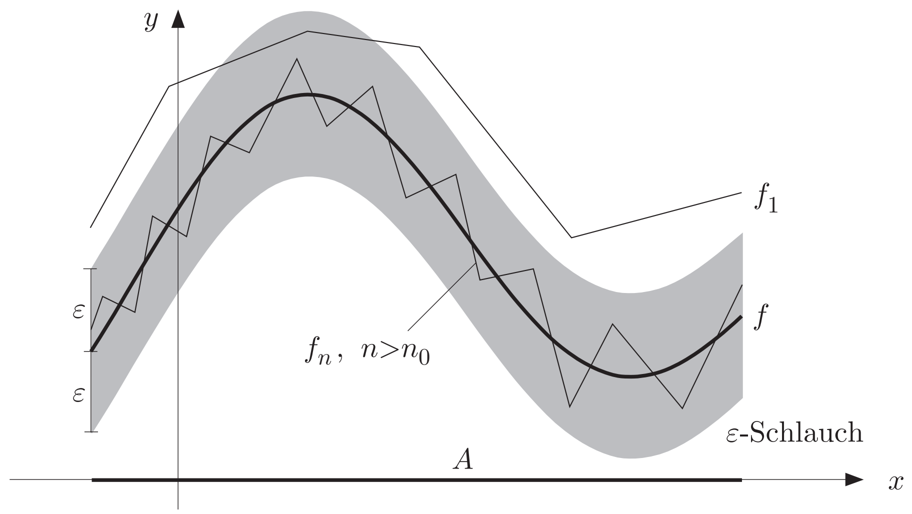

Fig. 11.1.4

Die Bedingung (3) lässt sich im Graphenbild (Fig. 11.1.4) folgendermassen interpretieren: Alle Graphen $\mathcal{G}(f_n)$ mit Nummer $n > n_0$ müssen vollständig innerhalb des **"ε-Schlauches mit Seele f"** verlaufen.

Gleichmässige Konvergenz ist ein Sachverhalt mit erfreulichen Konsequenzen (siehe den nächsten Abschnitt); in vielen Fällen ist sie aber nicht zu erzwingen.

⑥ Betrachte die Partialsummen

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

der Exponentialreihe. Für jedes feste $n \geq 1$ gilt

$$|s_n(z)| \to \infty \qquad (|z| \to \infty) .$$

Anderseits ist

$$\exp(2k\pi i) = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

Folglich wird es für jedes (noch so grosse) n Punkte $2k\pi i \in \mathbb{C}$ geben, in denen s_n die Exponentialfunktion schlecht approximiert.

Der hier vorgefundene Sachverhalt ist für Potenzreihen typisch: Ein Polynom s_n mit seinem endlichen Grad $\leq n$ kann weder das besondere Wachstumsverhalten der Grenzfunktion noch deren Kapriolen in den Aussenbezirken des Konvergenzbereichs global nachvollziehen. ○

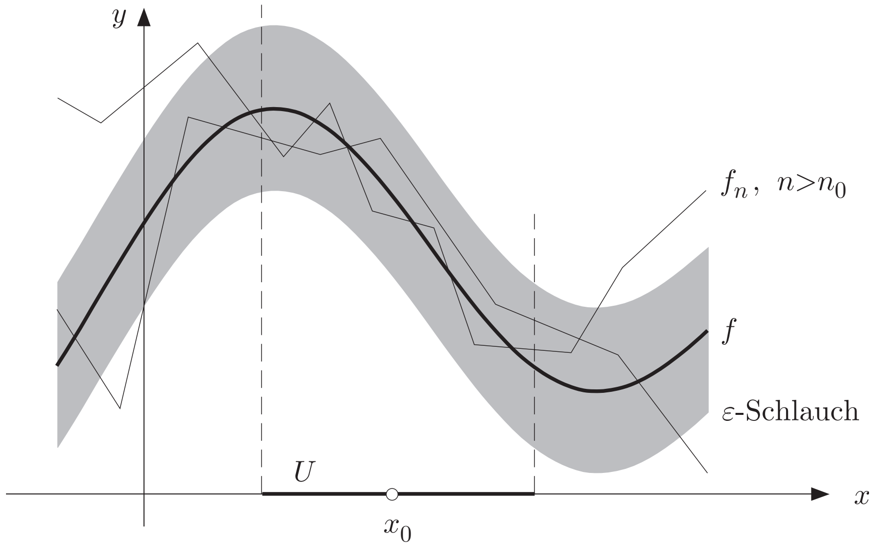

Fig. 11.1.5

Nun spielt es für die lokalen Eigenschaften der Grenzfunktion (Stetigkeit, Existenz von Ableitungen usw.) keine Rolle, wenn die Konvergenz "weit aussen" langsamer ist als in der Nähe des gerade betrachteten Punktes. Dies bringt uns auf folgende Definition (Fig. 11.1.5):

(b) Die f_n **konvergieren auf** A **lokal gleichmässig gegen** f, wenn jeder Punkt $x_0 \in A$ eine Umgebung U besitzt, auf der die f_n gleichmässig gegen f konvergieren.

Ist $A \subset \mathbb{X}$ zum Beispiel offen oder abgeschlossen, so ergibt sich mit Hilfe von Satz **(4.13)** (wir überlassen die Details dem Leser), dass (b) mit dem folgenden äquivalent ist:

(b′) Die f_n **konvergieren auf** A **lokal gleichmässig gegen** f, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset A$ gleichmässig gegen f konvergieren.

Der folgende Begriff entspricht der "naiven" Interpretation von (2):

(c) Die f_n **konvergieren auf** A **punktweise gegen** f, wenn für jeden Punkt $x \in A$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ . \tag{4}$$

Wird (4) "ausgepackt", so erhält man folgende Beschreibung der punktweisen Konvergenz: Zu jedem $x \in A$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 $\bigl(= n_0(x,\varepsilon)\bigr)$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n > n_0\ .$$

Der entscheidende Unterschied zur gleichmässigen Konvergenz besteht darin, dass die Marke n_0 nicht nur von ε, sondern auch von dem gerade betrachteten Punkt x abhängen darf. Es gibt also nicht nur eine, sondern im allgemeinen überabzählbar viele verschiedene ($\varepsilon \rightsquigarrow n_0$)-Beziehungen für ein einziges Eintreten von (2). Das hat letzten Endes zur Folge, dass sich die punktweise Konvergenz nicht mit Hilfe einer geeigneten Metrik im Funktionenraum beschreiben lässt. — Klar ist jedenfalls: Konvergieren die f_n gleichmässig, so konvergieren sie auch punktweise.

In der höheren Analysis sind im weiteren Konvergenzbegriffe der folgenden Art in Gebrauch:

(d) Die f_n **konvergieren auf** A **im quadratischen Mittel gegen** f, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_A \bigl|f_n(x)-f(x)\bigr|^2\,d\mu(x)\right) \;=\; 0\ .$$

Wir betrachten nun nocheinmal die Beispiele 1–6 und diskutieren das Konvergenzverhalten der darin auftretenden Folgen $(f_n)_{n\geq 1}$.

1 (Forts.) Die f_n konvergieren punktweise, aber nicht gleichmässig gegen die angegebene Grenzfunktion f: Im Punkt

$$x_n := \sqrt[n]{1/2} < 1$$

nimmt f_n den Wert $1/2$ an; somit liegt kein einziges f_n im $(1/4)$-Schlauch mit Seele f. — Auf jedem Teilintervall $[0,h]$, $\ h<1$, hingegen konvergieren die f_n gleichmässig gegen 0: Zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ gibt es ein n_0 mit $h^{n_0}<\varepsilon$. Ist $n>n_0$, so gilt für alle t im Intervall $[0,h]$:

$$|f_n(t)| = t^n \leq h^n < h^{n_0} < \varepsilon\ .$$

Man kann es auch so ausdrücken: Die f_n konvergieren auf dem halboffenen Intervall $[0,1[$ lokal gleichmässig gegen 0. ○

2 (Forts.) Die f_n konvergieren auf $\mathbb{R}$ gleichmässig gegen die Betragsfunktion abs.

⌜ Für beliebige $t\in\mathbb{R}$ gilt

$$f_n(t)-|t| = \sqrt{t^2+1/n^2}-\sqrt{t^2} = \frac{1/n^2}{\sqrt{t^2+1/n^2}+\sqrt{t^2}} \leq \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n}\ .$$

Ist daher ein $\varepsilon>0$ vorgegeben, so gilt

$$0\leq f_n(t)-|t|<\varepsilon \qquad \forall t\in\mathbb{R},\quad \forall n>n_0:=\frac{1}{\varepsilon}\ .$$ ⌟

Das Beispiel zeigt, dass sogar gleichmässige Konvergenz $f_n\to f\ \ (n\to\infty)$ für $f_n'\to f'$ nicht ausreicht. Hierfür müsste man die gleichmässige Konvergenz der Ableitungen f_n' haben (siehe Satz **(11.7)**), und die liegt hier nicht vor: Da jedes $f_n'(t)$ zum Beispiel den Wert $1/2$ annimmt (siehe die Fig. 11.1.1), liegt kein $\mathcal{G}(f_n')$ vollständig im $(1/4)$-Schlauch mit Seele sgn. ○

③ (Forts.) Die Abschätzung (1) zeigt, dass die f_n auf $\mathbb{R}$ gleichmässig gegen 0 konvergieren. ○

④ (Forts.) Die f_n konvergieren punktweise, aber nicht gleichmässig gegen die angegebene Grenzfunktion. Die f_n bilden übrigens eine **monoton wachsende Funktionenfolge**: Für alle $n \geq 0$ und alle t des gemeinsamen Definitionsbereichs gilt

$$f_{n+1}(t) \geq f_n(t) \ .$$

○

⑤ (Forts.) Die f_n konvergieren auf $[0, \pi]$ punktweise gegen 0; diese Konvergenz ist aber nicht gleichmässig. Der Standardsatz **(11.9)** betreffend Konvergenz der Integrale verlangt gleichmässige Konvergenz, und auch die Voraussetzungen des stärkeren Satzes **(11.12)** sind hier verletzt, denn es gibt kein M mit

$$|f_n(t)| \leq M \qquad \forall t \ , \ \forall n \ .$$

○

Bilden die f_k eine Funktionenfolge mit $\operatorname{dom}(f_k) \supset A$, so **konvergiert die Funktionenreihe**

$$s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

auf A gleichmässig (lokal gleichmässig, …) gegen $s(\cdot)$, wenn die Folge der Partialsummen

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

auf A in dem betreffenden Sinn konvergiert.

⑥ (Forts.) Die Exponentialreihe ist in $\mathbb{C}$ jedenfalls punktweise konvergent; in Wirklichkeit ist die Konvergenz sogar lokal gleichmässig. Zum Beweis genügt es, zu zeigen, dass die Reihe auf jeder kompakten Kreisscheibe $|z| \leq r$ gleichmässig konvergiert.

⌜ Es sei ein $r > 0$ vorgegeben. Die Reihe für e^r ist konvergent, somit konvergieren die Restsummen $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k/k!$ gegen 0: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit $R_n < \varepsilon$ für alle $n > n_0$. Folglich gilt für alle $n > n_0$ und alle $|z| \leq r$ die Abschätzung

$$|s_n(z) - \exp z| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} = R_n < \varepsilon \ ,$$

was zu beweisen war. ⌟

○

Aufgaben

1. (a) Auf welchem maximalen Intervall I ist die Reihe

$$f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} k \, \exp\bigl(k(t^2 - t)\bigr)$$

lokal gleichmässig konvergent?

(b) Man stelle die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ in geschlossener Form, das heisst: Σ-frei, dar.

2. Zeige: Ist der Konvergenzbereich A offen oder abgeschlossen, so sind die beiden Charakterisierungen (b) und (b′) der lokal gleichmässigen Konvergenz äquivalent.

3. Für $n \geq 2$ sei $f_n(t) := \sqrt[n]{\sin t}$. Zeige: Die Funktionen f_n konvergieren gleichmässig auf jedem Intervall $\left[\, h, \frac{\pi}{2} \,\right]$, $h > 0$, aber nicht gleichmässig auf $[\,0, \frac{\pi}{2}\,]$ gegen eine gewisse Grenzfunktion f.

4. Zeige, dass die nachstehenden Folgen und Reihen auf den angegebenen Intervallen gleichmässig konvergieren:

(a) $f_n(t) := (1 - t)\, t^n\,, \quad [\,0, 1\,]\,;$ (b) $f_n(t) := \dfrac{t^2}{1 + nt^2}\,, \quad \mathbb{R}\,;$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2(t/k)\,, \quad [-c, c\,]\,;$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{kt^2}{k^3 + t^3}\,, \quad [\,0, c\,]\,.$

5. Durch

$$f_n(t) := n^{\alpha} t e^{-nt} \qquad (t \geq 0)$$

wird eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ erklärt, die noch von einem reellen Parameter α abhängt.

(a) Bestimme die Grenzfunktion für $n \to \infty$.

(b) Für welche Werte des Parameters α konvergiert die betrachtete Folge gleichmässig?

6. Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ ist rekursiv wie folgt definiert:

$$f_0(t) := \sin t\,; \qquad f_{n+1}(t) := \frac{2}{3} f_n(t) + 1\,.$$

(a) Zeige: Die f_n konvergieren auf $\mathbb{R}$ gleichmässig gegen die Konstante 3. *Hinweis:* Betrachte zuerst die Transformation

$$T: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto \frac{2}{3} x + 1\,.$$

(b) Was lässt sich sagen, wenn die Startfunktion $f_0(t) := t^2$ derselben Iteration unterworfen wird?

7. Beweise den **Satz von Dini**: Bilden die stetigen Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Folge, die auf der kompakten Menge A gegen eine stetige Grenzfunktion f konvergiert, so ist die Konvergenz gleichmässig. *Hinweis:* Betrachte die Folge $g_n := f - f_n$, die monoton fallend nach 0 konvergiert.

11.2 Gleichmässige Konvergenz

Wir beginnen mit zwei Konvergenzkriterien. Zunächst das **Cauchy-Kriterium für gleichmässige Konvergenz**:

(11.1) *Besteht eine Folge von Funktionen $f_n\colon\ A \to \mathbb{X}$ den Test*

(C) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in A, \quad \forall m, n > n_0\ , \tag{1}$$

so ist sie auf A gleichmässig konvergent gegen ein $f\colon A \to \mathbb{X}$, und umgekehrt.

⌜ Die **Cauchy-Bedingung** (C) sei erfüllt. Für jeden festen Punkt $x \in A$ ist $\bigl(f_n(x)\bigr)_{n\geq 0}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{X}$, somit existiert für jedes x der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \in \mathbb{X}\ .$$

Um zu zeigen, dass die Konvergenz sogar gleichmässig ist, denken wir uns ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann ein n_0, so dass (1) gilt. Wir halten $n > n_0$ sowie ein $x \in A$ für den Moment fest und lassen m gegen ∞ streben. Es folgt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ ;$$

und da dies für alle $n > n_0$ und alle $x \in A$ zutrifft, ist die gleichmässige Konvergenz der f_n erwiesen. — Die Umkehrung ist klar. ⌟

Der M-Test für gleichmässige Konvergenz von Reihen

Es folgt das **Kriterium von Weierstrass**, auch **M-Test** genannt. Die meisten gleichmässig konvergenten Reihen lassen sich mit diesem einfachen Satz bedienen.

(11.2) *Gilt*

$$|f_k(x)| \leq c_k \qquad \forall x \in A,\ \forall k \geq k_0$$

und ist die konstante Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent, so ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

auf A (absolut und) gleichmässig konvergent gegen eine Funktion $s : A \to \mathbb{X}$.

⌜ Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz **(5.4)** ein n_0 mit

$$n \geq m > n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon\ .$$

Folglich gilt für alle $n \geq m > \max\{n_0, k_0\}$ die Abschätzung

$$|s_n(x) - s_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon \,,$$

und die Behauptung ergibt sich mit dem vorangehenden Satz. ┘

① Wir zeigen: Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert lokal gleichmässig auf der Kreisscheibe $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

┌ Betrachte ein festes $z_0 \in D$ und setze

$$r := \frac{1 + |z_0|}{2} < 1 \ .$$

Die Menge $B_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ ist eine Umgebung von z_0; es gilt $|z^k| \leq r^k$ für alle $z \in B_r$, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ ist konvergent. Somit konvergiert die Ausgangsreihe gleichmässig auf B_r, und da $z_0 \in D$ beliebig war, lokal gleichmässig in D. ┘

○

Stetigkeit der Grenzfunktion

Der zentrale Satz dieses Abschnitts lautet:

(11.3) *Konvergieren die Funktionen $f_n : A \to \mathbb{X}$ auf A lokal gleichmässig gegen die Funktion $f : A \to \mathbb{X}$ und sind alle f_n stetig (stetig an der Stelle x_0), so ist auch die Grenzfunktion f stetig (stetig an der Stelle x_0).*

┌ Es genügt, die eingeklammerte Variante zu beweisen. — Der Punkt x_0 besitzt eine Umgebung U_1, auf der die f_n gleichmässig gegen f konvergieren: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n (wir benötigen nur eines) mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in A \cap U_1 \ .$$

Da f_n im Punkt x_0 stetig ist, gibt es weiter eine Umgebung U_2 von x_0 mit

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in A \cap U_2 \ .$$

Die Menge $U := U_1 \cap U_2$ ist eine Umgebung von x_0, und für alle $x \in A \cap U$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ┘

(11.4) *Die Summe einer lokal gleichmässig konvergenten Reihe von stetigen Funktionen ist stetig.*

Funktionen als Punkte eines Funktionenraums

Bevor wir weiterfahren, wollen wir die Sätze **(11.1)** und **(11.3)** noch in einem ganz anderen Licht betrachten. Es sei $A \subset \mathbb{X}$ ein festgehaltener Grundbereich, zum Beispiel das Intervall $[0,1]$. Wie allgemein üblich, bezeichnen wir den Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ (bzw. $\to \mathbb{C}$, falls gewünscht) mit $C(A)$. Ist A *kompakt*, was wir von nun an voraussetzen wollen, so ist jedes $f \in C(A)$ beschränkt und besitzt damit eine endliche sup-**Norm** (im folgenden kurz: **Norm**)

$$\|f\| := \sup\bigl\{|f(x)| \bigm| x \in A\bigr\} .$$

Diese Norm spielt in $C(A)$ die Rolle der Betragsfunktion, denn sie genügt den folgenden Rechenregeln:

(NR1) $\qquad \|f\| \geq 0\,, \qquad \|f\| = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv 0\,,$

(NR2) $\qquad \|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\| \qquad (\lambda \in \mathbb{R} \;\text{ bzw. } \in \mathbb{C})\,,$

(NR3) $\qquad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \;.$

⌜ Für alle $x \in A$ gilt

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\| \,;$$

folglich ist auch das Supremum der linken Seite $\leq \|f\| + \|g\|$. — Der Rest ist klar. ⌟

Damit ist $C(A)$ ein **normierter Vektorraum**. Die Analogie mit $\mathbb{X}$ legt nahe, mit Hilfe der Norm auf $C(A)$ eine Metrik zu definieren:

$$d(f,g) := \|f - g\| \;. \tag{2}$$

Aus den Eigenschaften der Norm folgt sofort, dass die Abstandsfunktion $d(\cdot,\cdot)$ den Axiomen (MR1)–(MR3) für eine Metrik genügt. Damit wird die Menge $C(A)$ zu einem metrischen Raum; jeder "Punkt" dieses Raumes ist eine stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ (bzw. $\to \mathbb{C}$). Vor allem aber gilt:

(11.5) *Die gleichmässige Konvergenz einer Folge von stetigen Funktionen*

$$f_n : \quad A \to \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \to \mathbb{C} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gegen eine Funktion $f \in C(A)$ ist nichts anderes als die Konvergenz der "Punkt"folge $f_. : \mathbb{N} \to C(A)$ gegen f im metrischen Raum $C(A)$.

⌜ Gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ für alle $x \in A$, so ist $\|f_n - f\| \leq \varepsilon/2$ und folglich $f_n \in U_\varepsilon(f)$. Umgekehrt: Ist $f_n \in U_\varepsilon(f)$, so gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in A$. ⌟

Die Sätze **(11.1)** und **(11.3)** lassen sich damit folgendermassen auf den Punkt bringen:

(11.6) *Es sei $A \subset \mathbb{X}$ eine beliebige kompakte Menge. Dann ist $C(A)$, versehen mit der Metrik* (2), *ein vollständiger metrischer Raum.*

⌜ Es sei $f.$ eine Cauchy-Folge in $C(A)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ für alle $m, n > n_0$. Hieraus folgt aber nach Definition der Norm:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in A,\ \forall m,\, n > n_0\ .$$

Nach dem Kriterium **(11.1)** sind daher die f_n auf A gleichmässig konvergent gegen eine Funktion f, und nach **(11.3)** ist $f \in C(A)$. Wegen **(11.5)** gilt folglich $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ im Sinn des metrischen Raumes $C(A)$. ⌟

Ein normierter Vektorraum, der bezüglich der Metrik (2) vollständig ist, heisst ein (**reeller** bzw. **komplexer**) **Banachraum**. Also: Die Grundstrukturen $\mathbb{X}$ sowie die Funktionenräume $C(A)$, $A \subset \mathbb{X}$ kompakt, sind Banachräume.

Ableitung der Grenzfunktion

Über die Ableitung der Grenzfunktion beweisen wir:

(11.7) *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f.$ eine punktweise gegen f konvergente Folge von differenzierbaren Funktionen $f_n\colon I \to \mathbb{X}$, deren Ableitungen auf I lokal gleichmässig konvergieren. Dann ist f auf I differenzierbar, und es gilt $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.*

⌜ Wir dürfen die f_n reellwertig annehmen. Betrachte ein festes $t_0 \in I$. Die Hilfsfunktionen

$$\phi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} & (t \neq t_0) \\ f_n'(t_0) & (t = t_0) \end{cases}$$

sind an der Stelle t_0 stetig und konvergieren auf I punktweise gegen die Funktion

$$\phi(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} & (t \neq t_0) \\ \lim_{n\to\infty} f_n'(t_0) & (t = t_0) \end{cases} .$$

Wie wir gleich zeigen werden, ist diese Konvergenz sogar lokal gleichmässig. Hieraus folgt aber mit Satz **(11.3)**: Die Grenzfunktion ϕ ist an der Stelle t_0 stetig, und das heisst $\lim_{t\to t_0} \phi(t) = \phi(t_0)$ oder eben

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{n\to\infty} f_n'(t_0)\ ,$$

wie behauptet.

Um zu zeigen, dass die ϕ_n tatsächlich lokal gleichmässig konvergieren, setzen wir zur Abkürzung $f_n - f_m =: f_{mn}$. Für jedes $t \in I$ gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein τ zwischen t_0 und t, so dass folgendes zutrifft:

$$\phi_n(t) - \phi_m(t) = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{f_{mn}(t) - f_{mn}(t_0)}{t - t_0} \\ f'_{mn}(t_0) \end{matrix} \right\} = f'_{mn}(\tau) = f'_n(\tau) - f'_m(\tau) \ .$$

Da die f'_n in einer geeigneten Umgebung U von t_0 gleichmässig konvergieren, ergibt sich hieraus mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums **(11.1)** die gleichmässige Konvergenz der ϕ_n auf U und damit die Behauptung. ⌟

Wendet man diesen Satz auf die Partialsummen s_n einer Funktionenreihe an, so ergibt sich:

(11.8) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sei auf dem Intervall I konvergent gegen eine Funktion $s\colon I \to \mathbb{X}$, und die gliedweise differenzierte Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k$ sei auf I lokal gleichmässig konvergent. Dann ist s auf I differenzierbar, und es gilt $s' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k$.*

Man sagt in diesem Fall, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *lasse sich* **gliedweise differenzieren**.

② Gesucht ist ein **geschlossener** (das heisst: Σ-freier) **Ausdruck** für die Funktion

$$s(t) := e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-kt} \qquad (t > 0) \ .$$

Die gliedweise differenzierte Reihe $-\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}$ ist nach **(11.2)** auf $\mathbb{R}_{>0}$ lokal gleichmässig konvergent, da sie für $t \geq h > 0$ von der konvergenten konstanten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kh}$ majorisiert wird. Somit ist

$$s'(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} = -\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \qquad (t > 0) \ .$$

Es folgt

$$s(t) = \log \frac{1}{1 - e^{-t}} + C$$

für ein gewisses $C \in \mathbb{R}$. Wegen

$$0 < s(t) < \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}$$

ist $\lim_{t \to \infty} s(t) = 0$ und damit $C = 0$. ○

Aufgaben

1. Die Funktion $f_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ sei stetig und genüge der Ungleichung

$$0 \leq f_0(t) \leq \frac{t}{2+t} \qquad (t \geq 0) \ .$$

Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ sei rekursiv definiert durch $f_{n+1} := f_0 \circ f_n \quad (n \geq 0)$. Zeige: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert und stellt eine stetige Funktion dar.

2. Durch $f_0(t) := \dfrac{1}{1+t^2}$ und die Rekursionsvorschrift

$$f_{n+1}(t) := 1 - \cos\bigl(f_n(t)\bigr)$$

wird eine Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert.

(a) Zeige: Die Reihe $s(t) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmässig konvergent. *Hinweis:* Man benötigt eine für kleine $|u|$ gültige Abschätzung der Form $|1 - \cos u| \leq C|u|$.

(b) Zeige: Die Funktion s ist differenzierbar.

3. Ist die Funktion $f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2(t/k)$ differenzierbar?

11.3. Grenzübergang unter dem Integralzeichen

Wir beginnen mit dem folgenden Standardsatz:

(11.9) *Sind die Funktionen $f_n : [\,a,b\,] \to \mathbb{X}$ über $[\,a,b\,]$ integrierbar und für $n \to \infty$ gleichmässig konvergent gegen f, so ist auch f über $[\,a,b\,]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt\ .$$

$\ulcorner$ Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit

$$|f_n(t) - f(t)| \le \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \qquad \forall t \in [\,a,b\,],\ \forall n > n_0\ . \tag{1}$$

Fixiere ein $m > n_0$. Nach Voraussetzung über f_m gibt es eine Teilung T von $[\,a,b\,]$ mit $D_T(f_m) < \varepsilon/2$. Wegen (1) lässt sich die Schwankung von f auf den Teilintervallen Q_k von T folgendermassen abschätzen:

$$|\Delta f|_{Q_k} \le |\Delta f_m|_{Q_k} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (1 \le k \le N)\ .$$

Somit gilt

$$D_T(f) = \sum_{k=1}^N |\Delta f|_{Q_k} \mu(Q_k) \le D_T(f_m) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^N \mu(Q_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Hiernach ist f über $[\,a,b\,]$ integrierbar, und aus (1) ergibt sich weiter

$$\Bigl|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\Bigr| \le \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall n > n_0\ . \qquad \lrcorner$$

Vom Integral als Funktion der oberen Grenze handelt

(11.10) *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $c \in I$ fest gewählt. Konvergieren die lokal integrierbaren Funktionen $f_n : I \to \mathbb{X}$ auf I lokal gleichmässig gegen die Funktion f, so konvergieren die Funktionen $F_n(x) := \int_c^x f_n(t)\,dt$ auf I lokal gleichmässig gegen $F(x) := \int_c^x f(t)\,dt$.*

$\ulcorner$ Betrachte ein beliebiges kompaktes Intervall $[\,a,b\,] \subset I$, das den Punkt c enthält. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung ein n_0 mit

$$|f_n(t) - f(t)| \le \frac{\varepsilon}{1 + (b-a)} \qquad \forall t \in [\,a,b\,]\,, \quad \forall n > n_0\ .$$

Für alle $x \in [\,a,b\,]$ und alle $n > n_0$ gilt daher

$$\Bigl|\int_c^x f_n(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt\Bigr| = \Bigl|\int_c^x \bigl(f_n(t) - f(t)\bigr)\,dt\Bigr| \le \frac{\varepsilon}{1+(b-a)}|x-c| < \varepsilon\ ,$$

was zu beweisen war. $\lrcorner$

Aus **(11.9)** und **(11.10)** ergibt sich für Funktionenreihen der Satz

(11.11) (a) *Sind die Funktionen* $f_k\colon [\,a,b\,] \to \mathbb{X}$ *über* $[\,a,b\,]$ *integrierbar und ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *auf* $[\,a,b\,]$ *gleichmässig konvergent, so ist auch ihre Summe* s *über* $[\,a,b\,]$ *integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b s(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(t)\,dt\ .$$

(b) *Es sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein beliebiges Intervall und* $c \in I$ *fest gewählt. Sind die Funktionen* $f_k : I \to \mathbb{X}$ *lokal integrierbar und ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *auf* I *lokal gleichmässig konvergent gegen* s*, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_c^x f_k(t)\,dt$$

auf I *lokal gleichmässig gegen* $S(x) := \int_c^x s(t)\,dt$.

Liegt der in Satz **(11.11)** beschriebene Sachverhalt vor, so sagt man, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ lasse sich **gliedweise integrieren**.

① Es gilt

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k$$

mit lokal gleichmässiger Konvergenz auf dem Intervall $]\,-1,1\,[$, siehe Beispiel 11.2.①. Wir dürfen daher rechter Hand gliedweise integrieren:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k t^k\,dt\ .$$

Es ergibt sich

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad (|x|<1)\ ,$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat von Beispiel 7.6.①.

Wird in analoger Weise die Formel

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \qquad (|t|<1)$$

von 0 bis x aufintegriert:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt \qquad (|x|<1)\ ,$$

so entsteht die **Arcustangensreihe**:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (|x|<1)\ .$$

○

② Wir bemerken, dass sich die Sätze **(11.9)** und **(11.11)**(a) nicht auf uneigentliche Integrale ausdehnen lassen. Die Funktionen

$$f_n(t) := \frac{1}{n} e^{-t/n}$$

genügen für $t \geq 0$ der Abschätzung $|f_n(t)| \leq 1/n$ und konvergieren damit auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ gleichmässig gegen $f(t) \equiv 0$. Trotzdem gilt für alle $n \geq 1$:

$$\int_0^\infty f_n(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{1}{n} e^{-t/n}\, dt = -e^{-t/n}\Big|_0^\infty = 1 \ .$$

○

"Dominated Convergence"

Wir haben bis dahin verschwiegen, dass es neben dem Riemannschen Integral noch andere ("modernere") Integralbegriffe gibt, in erster Linie das sogenannte **Lebesgue-Integral**. Welche Bewandtnis hat es damit? Eine über $[\,a, b\,]$ Riemann-integrierbare Funktion f ist auch Lebesgue-integrierbar, und der Wert des Integrals ist derselbe. Unter dem Lebesgue-Regime ist aber die Klasse der integrierbaren Funktionen wesentlich umfangreicher. So sind zum Beispiel die Funktionen

$$f(t) := \begin{cases} 1 & (t \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (t \notin \mathbb{Q}) \end{cases} \ , \qquad\qquad g(t) := \frac{1}{\sqrt{t}}$$

ohne weiteres über $[\,0, 1\,]$ integrierbar. Das Integral hat im ersten Fall den Wert 0, im zweiten immer noch den Wert 1/2. Vor allem aber tritt an die Stelle von **(11.9)** ein viel stärkerer Satz — von gleichmässiger Konvergenz ist da nicht mehr die Rede: Die f_n müssen nur fast überall gegen f konvergieren, und es muss eine integrable positive Funktion g geben, die sämtliche f_n absolut dominiert:

$$\forall n,\ \forall t: \quad |f_n(t)| \leq g(t)\ , \qquad \int_a^b g(t)\, dt < \infty \ .$$

Leider ist der Zugang zur Lebesgueschen Theorie wesentlich beschwerlicher als der von uns eingeschlagene Weg zum Integral; fürs erste muss es daher bei diesen Andeutungen bleiben.

Nun gibt es auch für das Riemannsche Integral einen Satz von der eben beschriebenen Art; er ist allerdings wesentlich schwieriger zu beweisen als **(11.9)**. Wir bringen hier diesen **Satz über die beschränkte Konvergenz** samt Beweis, erklären aber dessen eingehendes Studium als fakultativ ...

(11.12) *Die Funktionen* $f_n : [\,a,b\,] \to \mathbb{X}$ *seien über* $[\,a,b\,]$ *integrierbar und für* $n \to \infty$ *punktweise konvergent gegen eine integrierbare Funktion* f. *Gibt es eine universelle Schranke* M *mit*

$$|f_n(t)| \le M \qquad \forall t \in [\,a,b\,]\,, \quad \forall n\,,$$

so gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt\ .$$

⌜ Die Funktionen

$$g_n(t) := |f_n(t) - f(t)|$$

konvergieren punktweise gegen 0, und es gilt

$$0 \le g_n(t) \le 2M \qquad \forall t \in [\,a,b\,]\,, \quad \forall n\ .$$

Wegen

$$\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \int_a^b g_n(t)\,dt$$

genügt es, das folgende zu beweisen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(t)\,dt = 0\ . \tag{2}$$

Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für jedes n gibt es eine Menge

$$A_n := \bigl\{ t \in [\,a,b\,] \bigm| \exists k \ge n :\ g_k(t) \ge \varepsilon \bigr\} \qquad (n \ge 0)$$

von "problematischen" t-Werten. Die A_n bilden eine monoton abnehmende Folge; und da die g_n punktweise gegen 0 konvergieren, ist

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset\ . \tag{3}$$

Es bezeichne T_r die Teilung von $[\,a,b\,]$ in 2^r gleiche Teilintervalle, $A_{n,r}$ die Vereinigung derjenigen Teilintervalle Q_k von T_r, die ganz in A_n enthalten sind (Fig. 11.3.1), und $\mu(A_{n,r})$ die Gesamtlänge dieser Intervalle. Wegen $A_{n+1} \subset A_n$ bilden die Grössen

$$\alpha_n := \sup_{r \ge 0} \mu(A_{n,r})$$

eine monoton abnehmende Folge. Wir behaupten: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\ . \tag{4}$$

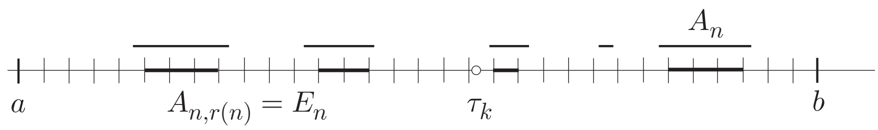

Fig. 11.3.1

⌜ Ist (4) falsch, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $\alpha_n \geq 3\delta$ für alle n. Nach Definition der α_n lässt sich weiter für jedes n ein $r =: r(n)$ finden mit

$$\mu(A_{n,r(n)}) \geq \alpha_n - \frac{\delta}{2^n} \ .$$

Wir schreiben zur Abkürzung $A_{n,r(n)} =: E_n$. Die Mengen

$$H_n := \bigcap_{l=0}^{n} A_{l,r(l)} = \bigcap_{l=0}^{n} E_l \qquad (n \geq 0)$$

sind abgeschlossen, und für alle n gilt $H_{n+1} \subset H_n \subset A_n$. Betrachte jetzt ein festes n und setze $r := \max_{0 \leq l \leq n} r(l)$. Dann lässt sich jedes $E_l,\ 0 \leq l \leq n$, als Vereinigung gewisser Teilintervalle Q_k der Teilung T_r auffassen. Ein Q_k, das in E_n, aber nicht in H_n liegt, gehört wenigstens einem E_l mit $0 \leq l \leq n-1$ nicht an. Wir können dies folgendermassen ausdrücken:

$$E_n \quad \subset \quad H_n \ \cup \ \bigcup_{l=0}^{n-1} \left(\bigcup_{Q_k \subset E_n \setminus E_l} Q_k \right) \ .$$

Es bestehen die Inklusionen $E_n \setminus E_l \subset A_n \setminus E_l \subset A_l \setminus E_l$. Nach Definition von α_l und E_l haben daher die $Q_k \subset E_n \setminus E_l$ einen Totalinhalt $\leq \delta/2^l$; somit gilt

$$3\delta - \frac{\delta}{2^n} \leq \alpha_n - \frac{\delta}{2^n} \leq \mu(E_n) \leq \mu(H_n) + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\delta}{2^l} = \mu(H_n) + \delta\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \ .$$

Hieraus folgt

$$\mu(H_n) \geq \delta\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) > \delta\ ;$$

insbesondere ist $H_n \neq \emptyset$ für alle n. Wähle jetzt in jedem H_n einen Punkt t_n; dann liegen auch alle t_k mit $k \geq n$ in H_n. Die t_n besitzen einen Häufungspunkt τ, und für alle n gilt $\tau \in H_n \subset A_n$, im Widerspruch zu (3). ⌟

Es gibt also ein n_0 mit $\alpha_n < \varepsilon$ für alle $n > n_0$. Betrachte jetzt ein beliebiges $g_n,\ \ n > n_0$. Aufgrund von Satz **(9.7)** gibt es ein r, so dass für beliebige Riemannsche Summen $R_r(g_n)$ zu T_r gilt:

$$\left| R_r(g_n) - \int_a^b g_n(t) \right| < \varepsilon\ . \tag{5}$$

Um ein derartiges $R_r(g_n)$ festzulegen, wählen wir in den Teilintervallen $Q_k \not\subset A_{n,r}$ Messpunkte $\tau_k \notin A_n$; für diese k gilt daher $g_n(\tau_k) < \varepsilon$. Für die restlichen k gilt jedenfalls $g(\tau_k) \le 2M$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} R_r(g_n) &= \sum_{Q_k \not\subset A_{n,r}} g_n(\tau_k)\,\mu(Q_k) + \sum_{Q_k \subset A_{n,r}} g_n(\tau_k)\,\mu(Q_k) \\ &\le \varepsilon\,(b-a) + 2M\alpha_n < \bigl((b-a) + 2M\bigr)\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Zusammen mit (5) ergibt sich hieraus

$$\int_a^b g_n(t)\,dt < \bigl((b-a) + 2M + 1\bigr)\varepsilon\ ;$$

und da dies für alle $n > n_0$ zutrifft, folgt (2). ⌟

Aufgaben

1. Es sei
$$f_n(t) := \frac{n^\alpha\, t}{1 + n^2 t^2} \qquad (0 \le t \le 1)\ .$$
Für welche Werte des reellen Parameters α treffen die folgenden Sachverhalte zu:
(a) Die Folge $(f_n)_{n\ge1}$ konvergiert punktweise.
(b) Die Folge $(f_n)_{n\ge1}$ konvergiert gleichmässig.
(c) $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$.
2. Die Folge der stetigen Funktionen $f_n : \mathbb{R}_{\ge0} \to \mathbb{R}$ konvergiere mit $n \to \infty$ lokal gleichmässig gegen 0; überdies gelte
$$0 \le f_n(t) \le e^{-t} \qquad \forall t \ge 0\ ,\ \forall n\ .$$
Unter diesen Umständen ist $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,dt = 0$.
3. Es bezeichne $\lfloor t \rfloor$ die grösste ganze Zahl $\le t$. Berechne das uneigentliche Integral
$$\int_0^1 2^{-\lfloor 1/x \rfloor}\,dx\ .$$

11.4 Integrale mit einem Parameter

Wir betrachten die folgende Situation: Eine Funktion

$$f: \quad [\,a,b\,] \times I \to \mathbb{X}\,, \qquad (t,\lambda) \mapsto f(t,\lambda) \tag{1}$$

hängt ab von der primären Variablen t und zusätzlich von dem Parameter λ, wobei t das Intervall $[\,a,b\,]$ durchläuft und λ beliebig in dem Intervall I gewählt werden kann. Unter diesen Umständen heisst

$$F(\lambda) := \int_a^b f(t,\lambda)\,dt \tag{2}$$

ein **Integral mit einem Parameter**. Wir beweisen darüber:

(11.13) *Ist die Funktion* (1) *stetig auf dem Rechteck* $[\,a,b\,] \times I$ *der* (t,λ)*-Ebene, so stellt* (2) *eine stetige Funktion* $F\colon I \to \mathbb{X}$ *dar.*

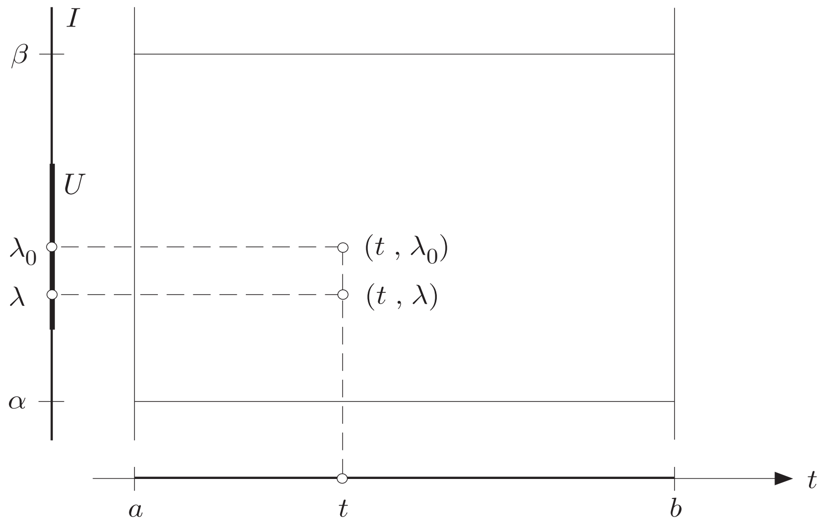

Fig. 11.4.1

⌜ Wir betrachten ein festes $\lambda_0 \in I$ und denken uns ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es sei $[\,\alpha,\beta\,] \subset I$ eine kompakte Umgebung von λ_0 (Fig.11.4.1). Die Funktion f ist auf dem kompakten Rechteck $[\,a,b\,] \times [\,\alpha,\beta\,]$ gleichmässig stetig, somit gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

für alle $t \in [\,a,b\,]$ und alle $\lambda \in U := U_\delta(\lambda_0) \cap [\,\alpha,\beta\,]$. Hieraus folgt: Für alle $\lambda \in U$ gilt

$$\begin{aligned}|F(\lambda) - F(\lambda_0)| &= \left|\int_a^b (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0|\,dt \\ &\le \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) = \varepsilon\,,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. ┘

Ableitung unter dem Integralzeichen

Im weiteren geht es darum, die Funktion (2) nach der Parametervariablen λ abzuleiten, ohne erst das Integral zu berechnen. Hierzu benötigen wir den Begriff der **partiellen Ableitung**: Existiert für jeden Punkt $(t_0,\lambda_0) \in \mathrm{dom}\,(f)$ der Grenzwert

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f(t_0,\lambda) - f(t_0,\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} =: f_{.2}(t_0,\lambda_0)\,, \tag{3}$$

so heisst f **partiell nach der zweiten Variablen differenzierbar**, und die durch (3) definierte Funktion $f_{.2}$ ist die **partielle Ableitung von f nach der zweiten Variablen**. Anstelle von $f_{.2}$ sind auch die Bezeichnungen f_λ und $\partial f/\partial\lambda$ üblich. (Wir werden auf diese Begriffe im nächsten Kapitel ausführlicher eingehen.)

(11.14) *Die Funktion f sowie ihre partielle Ableitung f_λ seien stetig auf dem Rechteck $[\,a,b\,] \times I$ der (t,λ)-Ebene. Dann ist die Funktion*

$$F(\lambda) := \int_a^b f(t,\lambda)\,dt$$

auf I stetig differenzierbar, und zwar gilt

$$F'(\lambda) = \int_a^b f_\lambda(t,\lambda)\,dt \qquad (\lambda \in I)\ .$$

Dies ist die sogenannte **Leibnizsche Regel für die Differentiation unter dem Integralzeichen**. Wir werden sie in Abschnitt 12.3 auf den Fall ausdehnen, wo auch die Integrationsgrenzen a und b von λ abhängen.

┌ Wir betrachten wiederum einen festen Punkt $\lambda_0 \in I$ und denken uns ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wie im Beweis des vorangehenden Satzes zeigt man: Es gibt eine Umgebung V von λ_0 mit

$$|f_\lambda(t,\mu) - f_\lambda(t,\lambda_0)| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{4}$$

für alle $t \in [\,a, b\,]$ und alle $\mu \in V$. Für beliebiges $\lambda \neq \lambda_0$ gilt

$$\frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \int_a^b f_\lambda(t, \lambda_0)\, dt = \int_a^b R(t, \lambda)\, dt\,, \tag{5}$$

wobei $R(t, \lambda)$ den folgenden Ausdruck bezeichnet:

$$R(t, \lambda) := \frac{f(t, \lambda) - f(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - f_\lambda(t, \lambda_0)\ .$$

Wir dürfen f reellwertig annehmen; dann gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein μ zwischen λ und λ_0 mit

$$R(t, \lambda) = f_\lambda(t, \mu) - f_\lambda(t, \lambda_0)\,,$$

und hieraus folgt wegen (4): Für alle $t \in [\,a, b\,]$ und alle $\lambda \in \dot{V}$ gilt

$$|R(t, \lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}\ .$$

Die rechte Seite von (5) hat somit für alle $\lambda \in \dot{V}$ einen Betrag $\leq \varepsilon$; folglich existiert $F'(\lambda_0)$ und hat den behaupteten Wert.

Die Stetigkeit von F' ergibt sich nun unmittelbar aus dem vorangehenden Satz (angewandt auf f_λ). ⌟

① Die Funktion

$$F(\alpha) := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt$$

lässt sich nicht elementar ausdrücken, da $\dfrac{\sin t}{t}$ keine elementare Stammfunktion besitzt. Hier nun die Ableitung von F:

$$F'(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\alpha t) \cdot t}{t}\, dt = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t)\Big|_{t=-\pi}^{\pi} = \begin{cases} \dfrac{2\sin(\alpha\pi)}{\alpha} & (\alpha \neq 0) \\ 2\pi & (\alpha = 0) \end{cases}\ .$$

○

Anwendung auf Taylor-Entwicklungen

Als Anwendung von **(11.14)** behandeln wir einen Satz über die Taylor-Entwicklung. Wir beginnen mit der folgenden Integraldarstellung des Restglieds:

(11.15) *Es sei I ein Intervall, $a \in I$, und die Funktion $f\colon I \to \mathbb{X}$ sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar auf I. Dann gilt*

$$f(x) = j_a^n f(x) + R_n(x) \qquad (x \in I)$$

mit

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt\ .$$

Die Behauptung trifft zu für $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \cdot 1\, dt\ ,$$

und die folgende Rechnung liefert den Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_a^x \underset{\downarrow}{f^{(n+1)}(t)}\ \underset{\uparrow}{(x-t)^n}\ dt \\
&\qquad = \frac{1}{n!}\left(-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{t=a}^{x} + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\, dt \\
&\qquad = f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, dt\ .
\end{aligned}$$

Der angekündigte Satz präzisiert den Satz **(7.36)**:

(11.16) *Die Funktion $f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ sei r-mal stetig differenzierbar in einer Umgebung U des Punktes a, und es sei $r \geq n \geq 1$. Dann gilt*

$$f(x) = j_a^{n-1} f(x) + (x-a)^n g(x) \tag{6}$$

mit einer Funktion $g \in C^{r-n}(U)$; dabei ist $g(a) = f^{(n)}(a)/n!\,$.

Durch (6) ist $g(x)$ in allen Punkten $x \neq a$ bestimmt, und man erkennt unmittelbar, dass g auf $\dot{U}$ sogar r-mal stetig differenzierbar ist. An der Stelle a hingegen müssen wir einen gewissen Regularitätseinbruch hinnehmen. — Aufgrund von **(11.15)** haben wir

$$f(x) = j_a^{n-1} f(x) + R(x)$$

mit

$$R(x) = \int_a^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt \ .$$

Die Substitution

$$\begin{array}{rl} & t := a + \tau(x-a) \qquad (0 \le \tau \le 1) \\ \big(\Longrightarrow & dt = (x-a)\, d\tau \ , \quad x - t = (1-\tau)(x-a)\,\big) \end{array}$$

verwandelt dies in

$$R(x) = (x-a)^n \int_0^1 f^{(n)}\big(a + \tau(x-a)\big) \frac{(1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\tau \ ,$$

womit nun die Funktion g als Integral dargestellt ist. Die Variable x ist in diesem Integral ein Parameter, und der Integrand lässt sich noch $(r-n)$-mal stetig partiell nach x differenzieren. Mit **(11.14)** folgt hieraus: $g \in C^{r-n}(U)$. Endlich ist

$$g(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\, d\tau = \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n} \ ,$$

wie angegeben. $\lrcorner$

Ist $r = \infty$, so ist auch g beliebig oft differenzierbar. Damit ergibt sich zum Beispiel das folgende Korollar:

(11.17) *Die Funktion f sei in einer Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, und es gelte*

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0 \ .$$

Dann ist auch die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x^n} & (x \ne 0) \\ f^{(n)}(0)/n! & (x = 0) \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar in U.

② Wir zeigen: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} & (0 < |x| < \pi) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(Fig. 11.4.2) ist beliebig oft differenzierbar; insbesondere ist $f'(0) = 1/6$.

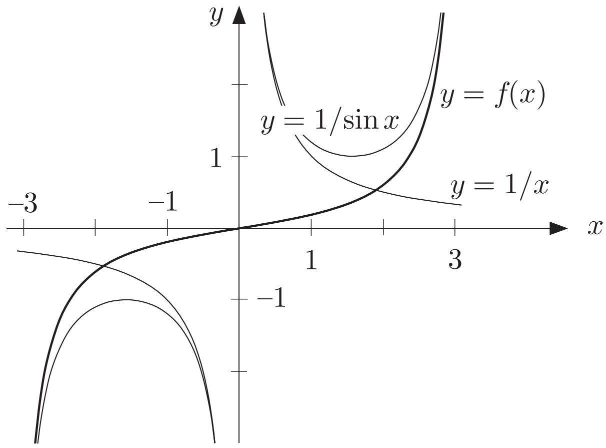

Fig. 11.4.2

Auf Grund von **(11.17)** gibt es C^∞-Funktionen g und h, so dass folgendes zutrifft:

$$x - \sin x = x^3 g(x)\,, \qquad g(0) = \frac{1}{6}\,,$$
$$x \sin x = x^2 h(x)\,, \qquad h(0) = 1\ .$$

Für alle $x \neq 0$ gilt daher

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = x\,\frac{g(x)}{h(x)}\,,$$

und hier ist die rechte Seite auch an der Stelle 0 beliebig oft differenzierbar. Insbesondere ist $f'(0) = g(0)/h(0) = 1/6$. ○

Aufgaben

1. (a) Berechne die beiden Grenzwerte

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\arctan(\alpha \tan t)}{\tan t}\,, \qquad \lim_{t\to \frac{\pi}{2}-} \frac{\arctan(\alpha \tan t)}{\tan t}\ .$$

(b) Berechne das bestimmte Integral

$$F(\alpha) := \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\alpha \tan t)}{\tan t}\,dt \qquad (\alpha > 0)\ .$$

Hinweis: Berechne erst $F'(\alpha)$!

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei beliebig oft differenzierbar, und es gelte

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\,, \quad f'''(0) = 48\ .$$

Zeige: Es gibt eine C^∞-Funktion g, so dass in einer geeigneten Umgebung des Ursprungs gilt:

$$f(t) \equiv \bigl(g(t)\bigr)^3\,,$$

und berechne $g'(0)$.

3. Mit Hilfe von Satz **(11.17)** oder allgemeinen Sätzen über Potenzreihen folgt leicht, dass die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & (t \neq 0) \\ 1 & (t = 0) \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist. Beweise wenigstens $f \in C^2$, ohne die angeführten Sätze zu benützen.

11.5 Potenzreihen II

Wir kommen hier endlich dazu, die Regularitätseigenschaften von Funktionen zu untersuchen, die durch eine Potenzreihe definiert sind. Den Schlüssel dazu bildet

(11.18) *Jede Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1}$$

ist im Innern D_ρ ihres Konvergenzkreises lokal gleichmässig konvergent und stellt dort eine stetige Funktion dar.

⌜ Lokal gleichmässige Konvergenz auf D_ρ bedeutet, dass die Reihe auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe

$$B_r := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \le r \right\}, \qquad r < \rho,$$

gleichmässig konvergiert. Betrachte also ein festes $r < \rho$. Die konstante Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ ist nach **(5.17)** konvergent, und für alle $z \in B_r$ gilt

$$\left| a_k z^k \right| \le |a_k| r^k \;;$$

folglich ist die Reihe (1) nach dem Kriterium von Weierstrass **(11.2)** gleichmässig konvergent auf B_r.
Die Stetigkeit der durch (1) definierten Funktion $f : D_\rho \to \mathbb{C}$ ist damit garantiert durch **(11.4)**. ⌟

Für die Infinitesimalrechnung müssen wir uns natürlich auf die reellen Punkte t des Konvergenzkreises beschränken; man spricht in diesem Zusammenhang vom **Konvergenzintervall**.

(11.19) *Jede Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k =: f(t) \tag{2}$$

ist im Innern $\left]-\rho, \rho\right[$ ihres Konvergenzintervalles gliedweise differenzierbar und integrierbar; das heisst: Es gilt

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \qquad (|t| < \rho)\;, \tag{3}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \qquad (|x| < \rho)\;. \tag{4}$$

⌜ Wir müssen in erster Linie zeigen, dass der Konvergenzradius ρ' der gliedweise differenzierten Reihe mit ρ übereinstimmt. Es sei $0 < t < \rho$. Wähle ein r zwischen t und ρ und bestimme k_0 so, dass für alle $k \geq k_0$ gilt: $k\,(t/r)^k \leq t$. Für alle diese k gilt dann auch die Abschätzung

$$\left|k\,a_k t^{k-1}\right| = \frac{1}{t}\,k\,(t/r)^k\,|a_k| r^k \leq |a_k| r^k \ .$$

Dies beweist, dass die gliedweise differenzierte Reihe an der Stelle t konvergiert; und da dies für alle $t < \rho$ zutrifft, muss $\rho' \geq \rho$ sein. Ähnlich zeigt man $\rho' \leq \rho$.

Nach dem vorangehenden Satz konvergiert daher die gliedweise differenzierte Reihe auf $]-\rho, \rho[$ lokal gleichmässig, und (3) folgt mit Satz **(11.8)**. Analog ergibt sich (4) mit Satz **(11.11)**. ⌟

Potenzreihen sind Taylor-Reihen

Durch wiederholte Anwendung von **(11.19)** ergibt sich

(11.20) *Die Reihe* (2) *ist auf dem Intervall* $]-\rho, \rho[$ *beliebig oft gliedweise differenzierbar. Die Koeffizienten* a_k *sind mit den Ableitungen von* f *verknüpft durch*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k \in \mathbb{N}) \ . \tag{5}$$

In anderen Worten: Eine als Potenzreihe präsentierte Funktion f *ist von selbst beliebig oft differenzierbar, und die definierende Reihe ist auch schon die Taylor-Reihe von* f*.*

⌜ Es genügt, (5) zu beweisen. Für jedes $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-r+1)\, a_k\, t^{k-r} \ ,$$

und $f^{(r)}(0)$ ist gleich dem t-freien Glied dieser Reihe:

$$f^{(r)}(0) = r(r-1) \cdot \ldots \cdot 1\, a_r = r!\, a_r \ .$$ ⌟

Ein Korollar dieses Satzes ist das von jedermann bedenkenlos angewandte Prinzip des **Koeffizientenvergleichs:**

(11.21) *Gibt es ein* $\rho > 0$ *mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \qquad (-\rho < t < \rho) \ ,$$

so gilt $a_k = b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$.

① Wir haben seinerzeit die Exponentialfunktion und anschliessend auch Cosinus und Sinus mit Hilfe gewisser Potenzreihen definiert. In den Kapiteln 6 und 7 wurde mit Hilfe von *ad hoc*-Überlegungen bewiesen, dass diese Funktionen stetig bzw. differenzierbar sind. Dass ihre Taylor-Reihen mit den jeweiligen definierenden Reihen übereinstimmen, haben wir bereits in Abschnitt 7.6 festgestellt. ○

Die Binomialreihe

Als Anwendung behandeln wir die Binomialreihe. Sie erlaubt, Potenzen $(1+t)^\alpha$ für $|t|<1$ und beliebige Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ ohne Verwendung von Logarithmen mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.

Es sei also ein $\alpha \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Wie im kombinatorischen Fall (das heisst: $\alpha \in \mathbb{N}$) definiert man den **Binomialkoeffizienten** $\binom{\alpha}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1\,, \qquad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k \geq 1)\ .$$

Ohne weiteres verifiziert man: Ist $\alpha \in \mathbb{N}$, so gilt $\binom{\alpha}{k} = 0$ für alle $k > \alpha$; ist jedoch $\alpha \notin \mathbb{N}$, so sind alle $\binom{\alpha}{k} \neq 0$. Ferner gilt:

$$\binom{\alpha}{k+1}(k+1) = \binom{\alpha}{k}(\alpha - k) \qquad (k \geq 0)\ . \tag{6}$$

Mit Hilfe der $\binom{\alpha}{k}$ bilden wir nun die Potenzreihe

$$b_\alpha(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + \ldots\quad .$$

Ist $\alpha \in \mathbb{N}$, so ist diese **Binomialreihe** b_α in Wirklichkeit ein Polynom, und es gilt nach Satz **(2.3)**:

$$b_\alpha(t) = (1+t)^\alpha \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

Ist aber $\alpha \notin \mathbb{N}$, so sind alle Koeffizienten der Binomialreihe $\neq 0$, und mit (6) folgt

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \left|\binom{\alpha}{k} \Big/ \binom{\alpha}{k+1}\right| = \left|\frac{k+1}{\alpha-k}\right| \;\to\; 1 \qquad (k \to \infty)\ .$$

Nach **(5.17)** besitzt daher die Binomialreihe den Konvergenzradius 1, unabhhängig von α ($\notin \mathbb{N}$). Wir behaupten nun:

(11.22) *Für jedes feste* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = (1+t)^\alpha \qquad (-1 < t < 1)\ .$$

⌜ Differenzieren wir b_α gliedweise, so ergibt sich wegen (6):

$$b'_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k\, t^{k-1} = \sum_{k'=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k'+1} (k'+1) t^{k'} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\alpha - k) t^k \quad (7)$$

und somit

$$(1+t) b'_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\alpha - k) t^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k\, t^k\ ,$$

wobei wir für b'_α den dritten und den ersten Ausdruck (7) verwendet haben. Die beiden letzten Summen lassen sich zusammenfassen zu

$$(1+t) b'_\alpha(t) = \alpha b_\alpha(t) \qquad (-1 < t < 1)\ . \quad (8)$$

Betrachte nun die Hilfsfunktion

$$f(t) := (1+t)^{-\alpha}\, b_\alpha(t)\ .$$

Es ist $f(0) = 1$, ferner folgt aus (8):

$$f'(t) = (1+t)^{-\alpha-1} \big((1+t) b'_\alpha(t) - \alpha b_\alpha(t) \big) \equiv 0\ .$$

Hiernach ist $f(t) \equiv 1$, was zu zeigen war. ⌟

② Wir betrachten etwa den Fall $\alpha := -1/2$:

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2k-1}{2}\right) = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{k!\, 2^k}\ .$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1}{2} t + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} t^3 + \ldots \qquad (-1 < t < 1)\ .$$

Setzen wir hier $t := -u^2$, was für $|u| < 1$ zulässig ist, so folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} u^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} u^6 + \ldots \qquad (-1 < u < 1)\ .$$

Wir integrieren gliedweise und erhalten die **Arcussinusreihe**:

$$\arcsin u = u + \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{u^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{u^7}{7} + \ldots \qquad (-1 < u < 1)\ .$$

○

Der Satz von Abel

Wie schon in Abschnitt 5.4 bemerkt, gibt der Hauptsatz **(5.17)** keine Auskunft über das Verhalten einer Potenzreihe auf dem Rand ihres Konvergenzbereichs. Wir beweisen in diesem Zusammenhang noch den folgenden **Satz von Abel:**

(11.23) *Ist die (komplexe) Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k =: f(t) \qquad (0 \le t \le 1)$$

auf $[\,0,1\,]$ *gleichmässig. Insbesondere gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = f(1) = \lim_{t\to 1-} f(t)\ .$$

⌜ Mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} a_k t^k &= \sum_{k=n+1}^{m} \bigl((s_k - s_n) - (s_{k-1} - s_n)\bigr)\, t^k \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)(t^k - t^{k+1}) + (s_m - s_n) t^{m+1}\ .\end{aligned}$$

Es sei jetzt ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein n_0 mit

$$|s_k - s_n| \le \varepsilon \qquad (k \ge n > n_0)\ ;$$

folglich gilt für alle $m \ge n > n_0$ und alle $t \in [\,0,1\,]$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\Bigl|\sum_{k=n+1}^{m} a_k t^k\Bigr| &\le \sum_{k=n+1}^{m} |s_k - s_n|(t^k - t^{k+1}) + |s_m - s_n| t^{m+1} \\ &\le \varepsilon\Bigl(\sum_{k=n+1}^{m} (t^k - t^{k+1}) + t^{m+1}\Bigr) = \varepsilon\, t^{n+1} \le \varepsilon\ .\end{aligned}$$

Aufgrund von **(11.1)** ist damit die gleichmässige Konvergenz der betrachteten Reihe erwiesen, und mit **(11.4)** folgt, dass f auf $[\,0,1\,]$ stetig ist. Insbesondere gilt $f(1) = \lim_{t\to 1-} f(t)$. ⌟

② Die Logarithmusreihe und die Arcustangensreihe (siehe Beispiel 11.3.①) konvergieren auch noch für $x := 1$; somit gilt nach dem eben bewiesenen Satz:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \lim_{x\to 1-} \log(1+x) = \log 2$$

und

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \lim_{x\to 1-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\ .$$

○

③ Wir betrachten für ein *festes* ϕ, $0 < \phi < 2\pi$, die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\phi}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\phi)}{k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\phi)}{k} =: C + iS \ .$$

Da für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{ik\phi} \right| = \left| e^{i\phi} \right| \left| \frac{e^{in\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{i\phi} - 1|} \ ,$$

und da die Folge $1/k$ monoton fallend nach 0 konvergiert, sind diese Reihen nach dem Konvergenzkriterium von Abel (Satz **(5.14)**) konvergent, und die Grössen C und S sind wohldefiniert. Um diese Grössen mit Hilfe des Satzes von Abel berechnen zu können, müssen wir die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\phi}}{k} t^k =: f(t) =: c(t) + is(t)$$

ins Spiel bringen und einen Σ-freien Ausdruck für $c(t)$ bzw. $s(t)$ finden. Die Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius 1, somit gilt für $-1 < t < 1$:

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\phi} t^{k-1} = e^{i\phi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(te^{i\phi} \right)^k = \frac{e^{i\phi}}{1 - te^{i\phi}} = \frac{e^{i\phi} - t}{1 - 2t\cos\phi + t^2} \ ,$$

wobei der letzte Ausdruck durch Erweitern mit $1 - te^{-i\phi}$ zustandegekommen ist. Trennen wir hier Real- und Imaginärteil, so ergibt sich

$$c'(t) = \frac{\cos\phi - t}{1 - 2t\cos\phi + t^2} \ , \qquad s'(t) = \frac{\sin\phi}{1 - 2t\cos\phi + t^2} \ . \tag{10}$$

Wie man leicht verifiziert, befriedigen

$$c(t) = -\frac{1}{2}\log(1 - 2t\cos\phi + t^2) \ , \qquad s(t) = \arctan\left(\frac{t\sin\phi}{1 - t\cos\phi} \right)$$

sowohl (10) wie $f(0) = 0$. Mit Hilfe des Satzes von Abel erhalten wir nun:

$$C = \lim_{t \to 1-} c(t) = c(1) = -\frac{1}{2}\log(2 - 2\cos\phi)$$
$$S = \lim_{t \to 1-} s(t) = s(1) = \arctan\left(\frac{\sin\phi}{1 - \cos\phi} \right) \ .$$

Berücksichtigen wir noch die Relationen

$$1 - \cos\phi = 2\sin^2\frac{\phi}{2} \ , \qquad \frac{\sin\phi}{1 - \cos\phi} = \cot\frac{\phi}{2} = \tan\frac{\pi - \phi}{2} \ ,$$

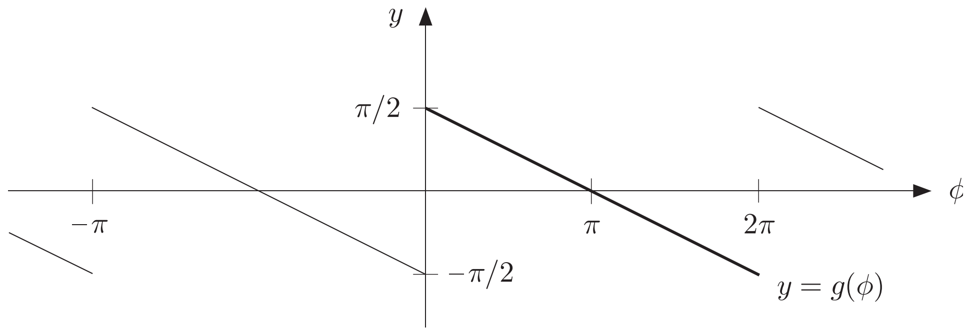

Fig. 11.5.1

so ergibt sich schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\phi)}{k} &= -\log\left(2\sin\frac{\phi}{2}\right) , \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\phi)}{k} &= \frac{\pi-\phi}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (0<\phi<2\pi) .$$

Die Resultate des vorangehenden Beispiels sind hierin enthalten.

Wenn man nun *post festum* ϕ trotzdem als variabel betrachtet, so kann man zum Beispiel die letzte Formel folgendermassen interpretieren: Die betrachtete Sinusreihe ist für alle $\phi \in \mathbb{R}$ konvergent und stellt eine gewisse 2π-periodische Funktion $\phi \mapsto g(\phi)$ dar. Die Formel besagt, dass g auf dem Intervall $\left]0, 2\pi\right[$ linear von $\frac{\pi}{2}$ nach $-\frac{\pi}{2}$ abnimmt; somit ist g die in Fig. 11.5.1 dargestellte "Sägezahnfunktion". Die Sinusreihe stellt dieses g als Superposition von harmonischen Schwingungen dar und heisst **Fourier-Reihe** dieser Sägezahnfunktion. ○

Aufgaben

1. Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

   (a) $\sum_{k=0}^{\infty}(1-\tanh k)\, t^k$, (b) $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(1+\dfrac{3}{k}\right)^{k^2} t^k$.

2. Berechne den Konvergenzradius und die Summe der folgenden Reihen:

   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\, t^k$, (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{t^k}{2k-1}$.

3. Entwickle die Funktion $f(t) := \sqrt[5]{30+t}$ in eine Potenzreihe mit dem Mittelpunkt 2.

4. Durch geeignete Wahl von t in der Reihe für $\log\dfrac{1+t}{1-t}$ berechne man $\log 2$ auf drei Stellen nach dem Komma genau. Hierzu wird eine Fehlerabschätzung benötigt: Man majorisiere die vernachlässigten Glieder durch eine geometrische Reihe.

5. Der Umfang U einer Ellipse mit Halbachsen a und b ist gegeben durch

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 t}\, dt\,, \qquad \kappa := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

(siehe Beispiel 13.5.2). Um einen für kleine Exzentrizität κ brauchbaren Näherungswert für U zu erhalten, kann man U nach Potenzen von κ entwickeln:

$$U = c_0 + c_1\kappa + c_2\kappa^2 + c_3\kappa^3 + \ldots\ .$$

Bestimme die Koeffizienten c_0 bis und mit c_4.

6. Betrachte die Funktion

$$F(\varepsilon) := \int_0^{\log 2} \log\bigl(1 + \varepsilon e^t\bigr)\, dt\ .$$

Gesucht ist ein Polynom $p(\varepsilon) := c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3$, das $F(\varepsilon)$ für kleine $|\varepsilon|$ möglichst gut approximiert.

7. Man stelle ein Rekursionsschema auf, das reelle Zahlen α als Input akzeptiert und eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ produziert mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 2^\alpha$. Dabei dürfen nur die vier Grundrechenarten, also keine Logarithmen, Fakultäten usw. verwendet werden. *Hinweis:* $2^\alpha = (1/2)^{-\alpha}$, Binomialreihe.

8. Berechne die Zahl $s := \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{5\cdot 6} + \ldots$ *Hinweis:* Betrachte die Funktion

$$s(t) := \frac{t^2}{1\cdot 2} + \frac{t^4}{3\cdot 4} + \frac{t^6}{5\cdot 6} + \ldots$$

und finde durch geeignete Manipulationen einen einfachen Ausdruck für $s(t)$. Nach dem Satz von Abel ist $s = s(1)$.

9. Es sei $f(t) := t/\sqrt{1+t^2}$. Bestimme eine für $t > 1$ gültige Reihenentwicklung der Form

$$f(t) = b_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \ldots$$

und berechne mit Hilfe dieser Reihe $f(1000)$ mit einem Fehler von weniger als 10^{-12}.

10. Als Kehrwert von 1.23456789 erscheint auf einem bescheidenen Taschenrechner die Zahl 0.81000000. Wie lassen sich die zahlreichen Nullen im Ergebnis begründen?

11.6 Differentialgleichungen III

In diesem Abschnitt wird endlich der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen, Satz **(EE)** von Abschnitt 8.1, exakt formuliert und bewiesen. Anstelle von Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ für *eine* unbekannte reelle Funktion $x \mapsto y(x)$ betrachten wir hier von Anfang an **Systeme von n Differentialgleichungen für n unbekannte Funktionen** $y_1(\cdot)$, ..., $y_n(\cdot)$:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \quad . \tag{1}$$

Man soll sich dabei folgendes vorstellen: Die Aktion eines gewissen mechanischen (elektrischen, ökologischen, ...) Systems lässt sich insgesamt beschreiben durch n reellwertige Funktionen $t \mapsto y_i(t)$, ein Momentanzustand des Systems also durch ein n-Tupel $(y_1, \ldots, y_n)$. Reflexion über die Wirkweise des Systems hat ergeben, dass die momentane zeitliche Änderungsrate jeder einzelnen "Lagekoordinate" y_i in bestimmter Weise von t und vor allem vom Systemzustand $(y_1, \ldots, y_n)$ abhängt. Die Gleichungen (1) halten das Ergebnis dieser Reflexion fest. Gefragt ist zunächst nach dem tatsächlichen Ablauf $t \mapsto \big(y_1(t), \ldots, y_n(t)\big)$ bei gegebenen Anfangsbedingungen; auf einer höheren Stufe interessieren allgemeine Aussagen über die möglichen Abläufe in irgendwelchen Systemen. Beispiel: Unter welchen Bedingungen kommt es zu stabilen periodischen Bewegungen?

Wir gehen zur vektoriellen Schreibweise über und haben dann folgende Situation: Gegeben ist eine Differentialgleichung der Form

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\ ; \tag{1'}$$

dabei ist

$$\mathbf{f}: \quad \Omega \to \mathbb{R}^n\ , \qquad (t, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \tag{2}$$

eine stetige vektorwertige Funktion mit einem offenen Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Funktion

$$\mathbf{y}(\cdot): \quad I \to \mathbb{R}^n\ , \qquad t \mapsto \mathbf{y}(t)$$

ist eine **Lösung** von (1′), wenn der Graph von $\mathbf{y}(\cdot)$ in Ω liegt und identisch in t gilt:

$$\mathbf{y}'(t) \equiv \mathbf{f}\big(t, \mathbf{y}(t)\big)\ .$$

Ist überdies ein Punkt $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ vorgegeben, so konstituieren (1′) und die Bedingung

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \tag{3}$$

zusammen ein **Anfangswertproblem**.

Verwandlung in eine Integralgleichung

Für das Weitere ist entscheidend, das Anfangswertproblem $(1') \wedge (3)$ in ein neuartiges Problem umzuformen:

(11.24) *Eine stetige Funktion* $\mathbf{y}(\cdot)\colon I \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$, *ist genau dann Lösung des Anfangswertproblems* $(1') \wedge (3)$, *wenn gilt:*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\bigl(\tau, \mathbf{y}(\tau)\bigr)\, d\tau \qquad \forall\, t \in I\ . \tag{4}$$

⌜ Ist $\mathbf{y}(\cdot)$ Lösung von $(1') \wedge (3)$ auf dem Intervall I, so gilt

$$\mathbf{y}'(\tau) = \mathbf{f}\bigl(\tau, \mathbf{y}(\tau)\bigr) \qquad \forall\, \tau \in I\ ,$$

und hieraus folgt durch Integration von t_0 bis zur variablen oberen Grenze t:

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\bigl(\tau, \mathbf{y}(\tau)\bigr)\, d\tau \qquad \forall\, t \in I\ ,$$

wie behauptet.

Umgekehrt: Aus (4) erhält man durch Ableitung nach t die Identität

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}\bigl(t, \mathbf{y}(t)\bigr) \qquad \forall\, t \in I\ ,$$

ferner natürlich $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Ein derartiges $\mathbf{y}(\cdot)$ löst daher das Anfangswertproblem $(1') \wedge (3)$. ⌟

Die **Integralgleichung** (4) für die unbekannte Funktion $\mathbf{y}(\cdot)$ ist folgendermassen zu interpretieren: Wird eine beliebige Funktion $\tau \mapsto \mathbf{y}(\tau)$ in den $\mathbf{y}$-Eingang von $\mathbf{f}(\tau, \cdot)$ eingesetzt, der entstehende Ausdruck nach τ integriert von t_0 bis zur variablen oberen Grenze t und das Resultat zu $\mathbf{y}_0$ addiert, so erhält man eine gewisse neue Funktion $t \mapsto \tilde{\mathbf{y}}(t)$. Ist die verwendete Funktion $\mathbf{y}(\cdot)$ "zufällig" die Lösung von $(1') \wedge (3)$, so fällt $\tilde{\mathbf{y}}(\cdot) = \mathbf{y}(\cdot)$ aus. Das Anfangswertproblem $(1') \wedge (3)$ ist also *äquivalent zu einem Fixpunktproblem* für die Operation

$$T: \quad \mathbf{y}(\cdot) \ \mapsto\ \tilde{\mathbf{y}}(\cdot)\,, \qquad\qquad \tilde{\mathbf{y}}(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\bigl(\tau, \mathbf{y}(\tau)\bigr)\, d\tau\ . \tag{5}$$

Nun tritt folgendes Wunder ein: Wird eine "falsche" Funktion $\mathbf{y}(\tau)$ ins Integral (5) eingelesen, so ist der Output $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ auch nicht die richtige Lösung, *liegt aber näher* am gesuchten "Fixpunkt" als der Input. Dies erlaubt, iterativ eine Folge $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, … zu konstruieren, die gegen die tatsächliche Lösung von (4) bzw. $(1') \wedge (3)$ konvergiert.

① Für das Anfangswertproblem

$$y' \;=\; 1 + y^2 \qquad \bigl(:= f(t,y)\bigr)\,, \qquad y(0) = 0 \tag{6}$$

ergibt sich folgende Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned} y_0(t) \;&:\equiv\; 0\,, \\ y_{n+1}(t) \;&:=\; \int_0^t \bigl(1 + y_n^2(\tau)\bigr)\,d\tau\;. \end{aligned}$$

Damit erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_0^t \bigl(1 + y_0^2(\tau)\bigr)\,d\tau = \int_0^t 1\,d\tau =\; t\,, \\ y_2(t) &= \int_0^t \bigl(1 + y_1^2(\tau)\bigr)\,d\tau = \int_0^t (1+\tau^2)\,d\tau =\; t + \frac{t^3}{3}\,, \\ y_3(t) &= \int_0^t \left(1 + \Bigl(\tau + \frac{\tau^3}{3}\Bigr)^2\right)d\tau = \int_0^t \left(1 + \tau^2 + \frac{2\tau^4}{3} + \frac{\tau^6}{9}\right)d\tau \\ &= t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + ?t^7\,, \\ y_4(t) &= \int_0^t \left(1 + \Bigl(\tau + \frac{\tau^3}{3} + \frac{2\tau^5}{15} + ?\tau^7\Bigr)^2\right)d\tau \\ &= \int_0^t \left(1 + \tau^2 + \frac{2\tau^4}{3} + \Bigl(\frac{4}{15} + \frac{1}{9}\Bigr)\tau^6 + ?\tau^8\right)d\tau \\ &= t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{17t^7}{7\cdot 45} + ?t^9\;. \end{aligned}$$

(Da die Polynome $y_n(\cdot)$ in erster Linie für kleine $|t|$ betrachtet werden, haben wir ihre hintersten Koeffizienten zum Teil nicht mehr berechnet.)

Durch Separation der Variablen findet man anderseits als exakte Lösung des Anfangswertproblems (6) die Funktion

$$y(t) \;=\; \tan t\,;$$

sie besitzt an der Stelle 0 die Taylor-Entwicklung

$$\tan t \;=\; t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{17t^7}{315} + ?t^9\;.$$

Die berechneten Iterierten $y_0, \ldots, y_4$ stellen also für kleine $|t|$ tatsächlich von Mal zu Mal bessere Approximationen an die exakte Lösung dar. ○

Der allgemeine Fixpunktsatz

Der folgende **allgemeine Fixpunktsatz**, auch **Kontraktionsprinzip** genannt, ist das abstrakte Kondensat der vorangegangenen Bemerkungen und Beobachtungen. Dank seiner Allgemeinheit besitzt dieser Satz unzählige Anwendungen in den verschiedensten Gebieten der Mathematik.

(11.25) *Es seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und*

$$T: \quad X \to X, \qquad x \mapsto Tx$$

eine Abbildung mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine Zahl $q < 1$ mit

$$d(Tx, Ty) \leq q\, d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X\ . \tag{7}$$

Dann trifft folgendes zu:

(a) *Die Abbildung T besitzt genau einen Fixpunkt $\xi \in X$.*

(b) *Für jeden Anfangspunkt $x_0 \in X$ konvergiert die durch*

$$x_{n+1} := Tx_n \qquad (n \geq 0) \tag{8}$$

definierte Iterationsfolge $x.$ gegen ξ.

⌜ Die Abbildung T besitzt höchstens einen Fixpunkt: Ist ξ ein Fixpunkt und $x \neq \xi$, so folgt mit (7):

$$d(\xi, Tx) = d(T\xi, Tx) \leq q\, d(\xi, x) < d(\xi, x)\ ,$$

und dies ist mit $Tx = x$ nicht vereinbar.

Betrachte jetzt eine beliebige Iterationsfolge $x.$. Wir behaupten: Für alle $n \geq 0$ gilt

$$d(x_0, x_n) \leq R := \frac{1}{1-q}\, d(x_0, x_1)\ ,$$

das heisst: Alle x_n liegen in einer Kugel vom Radius R um den Punkt x_0. Dies trifft jedenfalls zu für $n = 0$ und sei richtig für n, $n \geq 0$. Mit (7) und nach Induktionsvoraussetzung ergibt sich dann die folgende Kette von Ungleichungen:

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{n+1}) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1}) = d(x_0, x_1) + d(Tx_0, Tx_n) \\ &\leq d(x_0, x_1) + q\, d(x_0, x_n) \leq \left(1 + \frac{q}{1-q}\right) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{1}{1-q}\, d(x_0, x_1)\ , \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Es bezeichne
$$T^n := \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ Faktoren}}$$
die n-**fache Iterierte** von T. Aus (7) ergibt sich mit vollständiger Induktion: Für beliebige $x,\ y \in X$ und beliebige $n \geq 0$ gilt:
$$d(T^n x, T^n y)\ \leq\ q^n\, d(x,y)\ .$$
Wenden wir das auf unsere Iterationsfolge $x_{\cdot}$ an, so erhalten wir die folgende, für beliebige $n \geq 0,\ \ p \geq 0$ gültige Abschätzung:
$$d(x_n, x_{n+p}) = d(T^n x_0, T^n x_p) \leq q^n d(x_0, x_p) \leq q^n R\ .$$
Damit ist $x_{\cdot}$ als Cauchy-Folge erwiesen, denn für alle hinreichend grossen n ist $q^n R$ kleiner als irgendein vorgegebenes ε.
Aufgrund der Vollständigkeit von X existiert daher der Limes
$$\lim_{n\to\infty} x_n =: \xi \in X\ .$$
Führt man jetzt in (8) den Grenzübergang $n \to \infty$ durch, so folgt
$$\xi = \lim_{n\to\infty} T x_n = T\xi\ ,$$
denn T ist nach (7) lipstetig und damit stetig. — Damit ist alles bewiesen.

$\lrcorner$

Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes

Um diesen Satz auf Anfangswertprobleme $(1') \wedge (3)$ bzw. deren Transkription (4) anwenden können, benötigen wir Voraussetzungen über $\mathbf{f}$, die, wenn alles angerichtet ist, die Existenz eines $q < 1$ und damit Existenz und Einzigkeit der Lösung sicherstellen. Beispiel 8.1.3 zeigt, dass die Stetigkeit der rechten Seite $\mathbf{f}$ hierfür nicht ausreicht. Die "Rückwärtsanalyse" des angestrebten Beweises legt folgenden Begriff nahe: Die rechte Seite (2) der Differentialgleichung $(1')$ heisst **zulässig**, wenn sie stetig ist und **lokal lipstetig bezüglich** $\mathbf{y}$. Das zweite bedeutet folgendes (Fig. 11.6.1): Zu jedem Punkt $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U dieses Punktes und eine Konstante L, so dass für je zwei "senkrecht übereinanderliegende" Punkte $(t, \mathbf{y}_1)$, $(t, \mathbf{y}_2) \in U$ gilt:
$$\bigl|\mathbf{f}(t,\mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y}_2)\bigr|\ \leq\ L\,|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|\ .$$
Wir werden in Beispiel 12.3.3 sehen, dass eine rechte Seite $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ zulässig ist, falls sie stetig ist und stetige partielle Ableitungen nach den Koordinatenvariablen y_k besitzt. Der letztgenannte Sachverhalt lässt sich im allgemeinen von blossem Auge feststellen.

Die definitive Fassung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Differentialgleichungen lautet nunmehr:

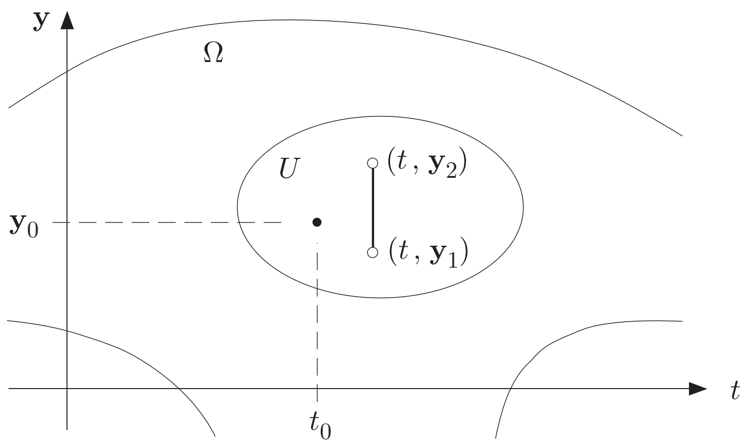

Fig. 11.6.1

(11.26) *Es seien* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge,*

$$\mathbf{f}: \quad \Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad (t, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

eine als rechte Seite zulässige Funktion und $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ *ein beliebiger Punkt. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \tag{9}$$

für alle hinreichend kleinen $\rho > 0$ *genau eine Lösung*

$$\mathbf{y}(\cdot): \quad [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \to \mathbb{R}^n .$$

⌜ Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(t_0, \mathbf{y}_0) = (0, \mathbf{0})$ annehmen. — Nach Voraussetzung über $\mathbf{f}$ gibt es eine Umgebung U von $(0, \mathbf{0})$ sowie zwei Konstanten $M > 0$ und $L > 0$, so dass für beliebige $(t, \mathbf{y}.) \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t, \mathbf{y})| &\le M, \\ |\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)| &\le L\,|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2| . \end{aligned} \tag{10}$$

Es gibt weiter ein $\rho > 0$, so dass gleichzeitig gilt:

$$L\rho =: q < 1,$$

$$[-\rho, \rho] \times \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{y}| \le M\rho\} =: Q \subset U$$

(Fig. 11.6.2). Setze nun $I := [-\rho, \rho]$. Die Teilmenge

$$X := \{\mathbf{y}(\cdot) \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid |\mathbf{y}(t)| \le M\rho \quad \forall t \in I\}$$

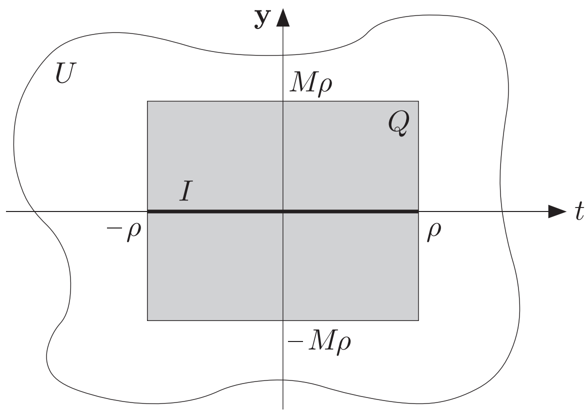

Fig. 11.6.2

des vollständigen metrischen Raumes $C(I, \mathbb{R}^n)$ ist ebenfalls ein vollständiger metrischer Raum: Eine Cauchy-Folge in X konvergiert jedenfalls gegen ein $\mathbf{y}^*(\cdot) \in C(I, \mathbb{R}^n)$, und es ist leicht einzusehen, dass auch $\mathbf{y}^*(\cdot)$ der Bedingung $|\mathbf{y}^*(t)| \leq M\rho$ genügt.

Wir beweisen zunächst: Jede Lösung $\mathbf{y}(\cdot) : I \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (9) liegt notwendigerweise in X.

⌜ Jede Lösung ist natürlich stetig. Angenommen, es gibt ein $t \in [\,0, \rho\,]$ mit $|\mathbf{y}(t)| > M\rho$. Die Zahl

$$\rho' := \inf\bigl\{t > 0 \bigm| |\mathbf{y}(t)| > M\rho\bigr\}$$

ist dann nach **(3.9)** echt kleiner als ρ, und aus Stetigkeitsgründen gilt

$$|\mathbf{y}(\rho')| = M\rho\ .$$

Der zum Intervall $[\,0, \rho'\,]$ gehörende Teil des Graphen von $\mathbf{y}(\cdot)$ liegt nun vollständig in Q, somit gilt

$$|\mathbf{y}'(t)| = \bigl|\mathbf{f}\bigl(t, \mathbf{y}(t)\bigr)\bigr| \leq M \qquad (0 \leq t \leq \rho')\ ,$$

und mit **(7.15)** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) folgt

$$M\rho = |\mathbf{y}(\rho')| = |\mathbf{y}(\rho') - \mathbf{y}(0)| \leq M\,\rho'\ .$$

Dies ist mit $\rho' < \rho$ nicht vereinbar, und das heisst: Die am Anfang getroffene Annahme führt auf einen Widerspruch. ⌟

Betrachte jetzt die Abbildung

$$T:\ X \to X\ , \quad \mathbf{y}(\cdot) \mapsto \tilde{\mathbf{y}}(\cdot)\ , \qquad\qquad \tilde{\mathbf{y}}(t) := \int_0^t \mathbf{f}\bigl(\tau, \mathbf{y}(\tau)\bigr)\, d\tau\ .$$

Es gilt zu verifizieren, dass der angegebene Bild"punkt" $\tilde{\mathbf{y}}(\cdot)$ tatsächlich in X liegt. Als Stammfunktion einer stetigen Funktion ist $\tilde{\mathbf{y}}(\cdot)$ natürlich stetig; ferner liegen nach Voraussetzung über $\mathbf{y}(\cdot)$ alle Punkte $\big(\tau, \mathbf{y}(\tau)\big)$, $\tau \in [\,-\rho, \rho\,]$, in Q. Folglich ist

$$|\tilde{\mathbf{y}}(t)| = \left| \int_0^t \mathbf{f}\big(\tau, \mathbf{y}(\tau)\big)\, d\tau \right| \le M\,|t| \le M\rho \qquad (t \in I)\ .$$

Die Menge der Lösungen von (9) auf dem Intervall I ist identisch mit der Menge der Fixpunkte von T: Jede Lösung liegt in X und ist nach **(11.24)** ein Fixpunkt von T. Umgekehrt: Jeder Fixpunkt von T ist nach **(11.24)** eine Lösung von (9) auf dem Intervall I.

Es ist nun alles so eingerichtet, dass T den Voraussetzungen des allgemeinen Fixpunktsatzes **(11.25)** genügt: Betrachte zwei beliebige Punkte $\mathbf{y}_1(\cdot)$, $\mathbf{y}_2(\cdot)$ in X. Dann gilt für jedes feste $t \in [\,0, \rho\,]$:

$$\tilde{\mathbf{y}}_1(t) - \tilde{\mathbf{y}}_2(t) = \int_0^t \Big(\mathbf{f}\big(\tau, \mathbf{y}_1(\tau)\big) - \mathbf{f}\big(\tau, \mathbf{y}_2(\tau)\big) \Big)\, d\tau$$

und somit wegen (10):

$$|\tilde{\mathbf{y}}_1(t) - \tilde{\mathbf{y}}_2(t)| \le \int_0^t L\,|\mathbf{y}_1(\tau) - \mathbf{y}_2(\tau)|\, d\tau \le L\,\|\mathbf{y}_1(\cdot) - \mathbf{y}_2(\cdot)\|\,\rho\ .$$

Dieselbe Abschätzung gilt auch für alle $t \in [\,-\rho, 0\,]$, folglich hat man

$$\|\tilde{\mathbf{y}}_1(\cdot) - \tilde{\mathbf{y}}_2(\cdot)\| \le L\,\rho\,\|\mathbf{y}_1(\cdot) - \mathbf{y}_2(\cdot)\|\ .$$

Wegen $L\rho =: q < 1$ erfüllt damit T die Kontraktionsbedingung des allgemeinen Fixpunktsatzes. Nach diesem Satz besitzt T genau einen Fixpunkt; folglich besitzt das Anfangswertproblem (9) genau eine Lösung $\mathbf{y}(\cdot) : I \to \mathbb{R}^n$.

$\lrcorner$

Satz **(11.26)** ist ein lokaler Satz: Er liefert nur ein verhältnismässig kurzes Teilstück der "maximalen" Lösungskurve durch einen gegebenen Anfangspunkt $(t_0, \mathbf{y}_0)$. Die nächste Aufgabe würde nun darin bestehen, durch "analytische Fortsetzung", das heisst: durch sukzessive Anwendung des lokalen Satzes, die "maximale Lösung" von (9) in den Griff zu bekommen und vor allem zu zeigen, dass sie "für alle Zeiten" eindeutig bestimmt ist. Wir gehen darauf nicht ein und verweisen den interessierten Leser auf den Beweis von Satz **(8.1)**, wo derartige Fortsetzungsüberlegungen in einem sehr speziellen Fall bereits durchgeführt wurden.

Differentialgleichungen höherer Ordnung

Durch einen kleinen Kunstgriff lässt sich aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz **(11.26)** ein entsprechender Satz für Anfangswertprobleme bei Differentialgleichungen höherer Ordnung gewinnen. Wir formulieren gleich das Resultat:

(11.27) *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge,*

$$F: \quad \Omega \to \mathbb{R}\,, \qquad (t, u_0, \ldots, u_{n-1}) \mapsto F(t, u_0, \ldots, u_{n-1})$$

eine stetige und bezüglich $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_{n-1})$ lokal lipstetige Funktion sowie $(t_0, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1}) \in \Omega$ ein beliebiger Punkt. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} &= F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y^{(k)}(t_0) &= \eta_k \qquad (0 \le k \le n-1) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

für alle hinreichend kleinen $\rho > 0$ genau eine Lösung

$$y(\cdot): \quad [\,t_0 - \rho, t_0 + \rho\,] \;\to\; \mathbb{R}\,.$$

⌜ Ist $y(\cdot)$ eine Lösung von (11), so ist die sogenannte $(n-1)$**-Jet-Extension**

$$\mathbf{u}(t) := \bigl(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\bigr)$$

eine Lösung des folgenden Systems von n (skalaren) Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} u_0' &= u_1 \\ u_1' &= u_2 \\ &\vdots \\ u_{n-2}' &= u_{n-1} \\ u_{n-1}' &= F(t, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{aligned}\right\}\,, \tag{12}$$

und es gilt

$$\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 := (\eta_0, \ldots, \eta_{n-1})\,. \tag{13}$$

Umgekehrt: Ist

$$t \mapsto \mathbf{u}(t) = \bigl(u_0(t), u_1(t), \ldots, u_{n-1}(t)\bigr) \tag{14}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems (12) $\wedge$ (13), so löst die Funktion

$$y(t) := u_0(t)$$

das Problem (11). Diese Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus der speziellen Gestalt des Systems (12); wir dürfen wohl auf die schriftliche Verifikation verzichten.

Betrachten wir nun die rechte Seite $\mathbf{f}$ der durch (12) konstituierten vektoriellen Differentialgleichung

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \quad ! \tag{12'}$$

Für beliebige zwei Punkte $(t, \mathbf{u})$, $(t, \mathbf{v}) \in \Omega$ gilt aufgrund von (12):

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t,\mathbf{u}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{v})| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \bigl| f_k(t,\mathbf{u}) - f_k(t,\mathbf{v}) \bigr| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} |u_k - v_k| \;+\; \bigl| F(t,\mathbf{u}) - F(t,\mathbf{v}) \bigr| \;. \end{aligned} \tag{15}$$

Nun war ja F lokal lipstetig bezüglich $\mathbf{u}$ vorausgesetzt. Ist L eine diesbezügliche Lipschitzkonstante, gültig in einem gewissen Bereich $U \subset \Omega$, so folgt aus (15): Für beliebige $(t, \mathbf{u})$, $(t, \mathbf{v}) \in U$ gilt

$$|\mathbf{f}(t,\mathbf{u}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{v})| \leq (n-1)|\mathbf{u} - \mathbf{v}| + L\,|\mathbf{u} - \mathbf{v}| \;;$$

somit ist dann $(n-1)+L$ eine Lipschitzkonstante für $\mathbf{f}$ in diesem Bereich. Hieraus folgt: $\mathbf{f}$ ist eine zulässige rechte Seite für (12′). Nach dem vorangehenden Satz besitzt daher das Problem (12) $\wedge$ (13) auf einem geeigneten Intervall I genau eine Lösung (14), und nach der Vorbemerkung ist dann $t \mapsto u_0(t)$ eine Lösung von (11). $\lrcorner$

Aufgaben

1. (a) Zeige: Die Funktion $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ ist lipstetig bezüglich y mit einer für ganz $\mathbb{R}^2$ gültigen Lipschitz-Konstanten C.

   (b) Berechne die Iterierte $y_2(\cdot)$ für das Anfangswertproblem

   $$y' = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad y(0) = 0$$

   (vgl. Beispiel 11.6.①).