2

Zahlen und Vektoren

In diesem Kapitel beschreiben wir die verschiedenen Zahlensysteme: Wir behandeln ihre Grundeigenschaften und zeigen, wie sie durch stufenweise Erweiterung auseinander hervorgehen. Im ganzen erhält man einen "Turm"

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

mit den natürlichen Zahlen als Fundament und den komplexen Zahlen als oberstem Stockwerk. Am meisten Arbeit macht der Schritt $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{D}$) $\rightsquigarrow \mathbb{R}$, die sogenannte **Vervollständigung** der rationalen Zahlen. — Der Leser wird wohl gewisse Vorstellungen von den Eigenschaften der Zahlensysteme

$\mathbb{N}$: natürliche Zahlen 0, 1, 2, ... ,

$\mathbb{Z}$: (positive und negative) ganze Zahlen,

$\mathbb{D}$: (endliche) Dualbrüche, *Bsp:* -11010.1001101,

$\mathbb{Q}$: rationale Zahlen,

$\mathbb{R}$: reelle Zahlen,

$\mathbb{C}$: komplexe Zahlen

besitzen, und wir dürfen in den Beispielen darauf Bezug nehmen.

2.1 Die natürlichen Zahlen

Die Peano-Axiome

Die natürlichen Zahlen kommen vom Zählen her: Mit 0 beginnend folgt auf jede Zahl n eine neue Zahl $\nu(n)$, der **Nachfolger** von n. In den sogenannten **Peano-Axiomen** wird dieser Zählprozess formalisiert:

(N0) Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{N}$ mit einem ausgezeichneten Element 0.

(N1) Auf $\mathbb{N}$ ist eine Abbildung $\nu\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ erklärt.

(N2) $n_1 \neq n_2 \quad \Longrightarrow \quad \nu(n_1) \neq \nu(n_2)$; das heisst: ν ist injektiv.

(N3) **(Prinzip der vollständigen Induktion)** Enthält eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ die Zahl 0 und gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$n \in A \quad \Longrightarrow \quad \nu(n) \in A\,,$$

so ist $A = \mathbb{N}$.

Anstelle von

$$0, \quad \nu(0), \quad \nu\bigl(\nu(0)\bigr), \quad \nu\left(\nu\bigl(\nu(0)\bigr)\right), \quad \nu\left(\nu\left(\nu\bigl(\nu(0)\bigr)\right)\right), \quad \ldots$$

schreibt man üblicherweise

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \qquad \text{bzw.} \qquad 0,\ 1,\ 10,\ 11,\ 100,\ \ldots\ .$$

Alle übrigen Eigenschaften der natürlichen Zahlen lassen sich "rein logisch" aus den Peano-Axiomen herleiten. Wir wollen das nicht im einzelnen durchführen und verweisen den interessierten Leser auf das klassische Werk von Landau: *Grundlagen der Analysis* (1930). Jedenfalls gelingt es, auf $\mathbb{N}$ eine Addition, eine Multiplikation und eine Ordnung einzurichten, so dass insgesamt die üblichen Rechenregeln (s.u.) gelten. Mit der Nachfolgeoperation ν sind diese Dinge verknüpft durch $\nu(n) = n + 1$, so dass wir fortan auf das ν verzichten können.

Bevor wir die Diskussion der verschiedenen Zahlensysteme fortsetzen, verweilen wir noch einen Moment bei den natürlichen Zahlen. Dabei geht es weniger ums Rechnen mit diesen Zahlen als um ihre fundamentalere Natur, die eben beim Zählen zum Ausdruck kommt.

Ein wichtiges Beweismittel und letzten Endes äquivalent mit dem Induktionsaxiom ist der Satz

(2.1) *Jede nichtleere Menge $B \subset \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.*

⌜ Nach Voraussetzung gibt es ein $n_0 \in B$. Die Menge

$$A := \bigl\{n \in \mathbb{N} \bigm| n \le k \quad \forall\, k \in B\bigr\}$$

der unteren Schranken von B enthält jedenfalls die Zahl 0, aber nicht die Zahl $n_0 + 1$, folglich ist $A \neq \mathbb{N}$. Nach dem Induktionsaxiom muss es daher ein n geben mit $n \in A$, aber $n + 1 \notin A$, und somit weiter ein $k \in B$ mit $n \le k < n + 1$. Hiernach ist $k = n$ das kleinste Element von B. ⌟

① Um zu beweisen, dass jede natürliche Zahl ≥ 1 eine Zerlegung in endlich viele Primfaktoren besitzt, können wir nicht den "Schluss von n auf $n + 1$"

anwenden, denn n und $n+1$ (zum Beispiel 20 und 21) haben ganz verschiedene Zerlegungen. Wir schliessen stattdessen mit Hilfe von **(2.1)**: Ist die Behauptung falsch, so gibt es eine kleinste Zahl, die sich nicht in Primfaktoren zerlegen lässt. Diese Zahl n_0 ist dann sicher keine Primzahl, besitzt also eine Zerlegung in zwei von 1 verschiedene Faktoren: $n_0 = pq$. Hier sind p und q beide kleiner als n_0 und besitzen daher eine Zerlegung in endlich viele Primfaktoren. Somit besitzt auch n_0 eine solche Zerlegung, im Widerspruch zur Definition von n_0. ◯

Induktionsbeweise

Eine sehr verbreitete Fassung des Induktionsaxioms handelt von Aussageformen über natürliche Zahlen n. Wie in Abschnitt 1.1 angedeutet, versteht man darunter eine Formel (oder einen Text) $\mathcal{A}(n)$ mit einer freien Variablen n, die für jede an Stelle von n eingesetzte natürliche Zahl entweder in eine richtige oder in eine falsche Aussage übergeht. — Hier also die angekündigte Version des Induktionsaxioms:

(N3′) Es sei $\mathcal{A}(n)$ eine Aussageform über natürliche Zahlen n. Trifft $\mathcal{A}(0)$ zu und gilt für alle $n \geq 0$ die Implikation

$$\mathcal{A}(n) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(n+1)\,,$$

so trifft $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu.

(Zum "Beweis" betrachte man die Menge A derjenigen n, für die $\mathcal{A}(n)$ zutrifft.)

Um mit Hilfe dieses Prinzips nachzuweisen, dass eine vorgelegte Aussageform $\mathcal{A}(n)$ für alle natürlichen n zutrifft, hat man hiernach folgende Leistungen zu erbringen:

1. Verifikation, dass $\mathcal{A}(0)$ zutrifft. **(Verankerung)**
2. Beweis, dass für jedes n unter Voraussetzung von $\mathcal{A}(n)$ auch die Aussage $\mathcal{A}(n+1)$ zutrifft. **(Induktionsschritt)**

Wir geben einige Beispiele.

② Für jedes $n \geq 0$ gilt die Formel

$$\mathcal{A}(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

$\mathcal{A}(n)$ ist richtig für $n = 0$ (die Summe linker Hand ist dann "leer") und treffe zu für ein beliebiges $n \geq 0$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k \ + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}\ ,$$

und dies ist $\mathcal{A}(n+1)$.

Der Induktionsschritt lässt sich auch für die Aussageform

$$\mathcal{B}(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}$$

durchführen: Wird $\mathcal{B}(n)$ als richtig angenommen, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2} + (n+1) = \frac{\bigl((n+1)+\frac{1}{2}\bigr)^2}{2} ,$$

also $\mathcal{B}(n+1)$. Trotzdem ist $\mathcal{B}(n)$ für alle $n \geq 0$ falsch. ○

③ Wir beweisen die sogenannte **Bernoullische Ungleichung** (für eine allgemeinere Fassung siehe Satz **(7.27)**):

(2.2) *Für alle reellen $t > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1+t)^n \;\geq\; 1 + nt \; . \tag{1}$$

Ist dabei $t \neq 0$ und $n > 1$, so hat man sogar $(1+t)^n > 1 + nt$.

⌜ Der Fall $t = 0$ sowie die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ sind trivial. Es genügt daher, folgendes zu zeigen: Ist $t > -1$, $t \neq 0$ und $n \geq 1$, so folgt aus der Ungleichung (1) die (strenge) Ungleichung

$$(1+t)^{n+1} > 1 + (n+1)t \; .$$

Wegen $1 + t > 0$ und $nt^2 > 0$ erhält man aber sofort:

$$\begin{aligned}(1+t)^{n+1} &= (1+t)(1+t)^n \geq (1+t)(1+nt) = 1 + (n+1)t + nt^2 \\ &> 1 + (n+1)t \; .\end{aligned}$$ ⌟

○

Rekursion

Zur allgemeinen Theorie der natürlichen Zahlen gehört auch das "Prinzip der rekursiven Definition". Eine Folge $x_. : \mathbb{N} \to X$ wird **rekursiv definiert** durch die Vorgabe von $x_0 \in X$ und eine Vorschrift, die für jedes $n \geq 0$ den Wert x_{n+1} zu berechnen gestattet, wenn alle vorangehenden Werte x_0, x_1, …, x_n bekannt sind. Steht nur ein beschränkter Arbeitsspeicher zur Verfügung, so ist man darauf angewiesen, dass x_{n+1} nur von den N (zum Beispiel $N = 2$) zuletzt gefundenen Werten x_k abhängt. — Wir verzichten auf eine formale Beschreibung des Rekursionsprinzips und beschränken uns auf einige Beispiele.

④ Die Rekursionsvorschrift

$$x_0 := 0\,, \qquad x_{n+1} := 2^{x_n} \quad (n \geq 0)$$

generiert die Folge

$$(0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 16, 65536,\ 2.0035\ldots \cdot 10^{19728},\ \ldots \quad)\ .$$

— Die berühmte **Fibonacci-Folge**

$$(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots \quad)$$

wird rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0\,, \quad a_1 := 1\,, \qquad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 1)\ .$$

— Für festes $a \in K$, K ein beliebiger Körper (s.u.), werden die **Potenzen** a^n, $n \in \mathbb{N}$, rekursiv definiert durch

$$a^0 := 1 \qquad a^{n+1} := a \cdot a^n \quad (n \geq 0)$$

(auch $0^0 := 1$!). Hieraus folgen ("mit vollständiger Induktion") die üblichen Regeln über das Rechnen mit Potenzen, zum Beispiel

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n\ .$$

— Die **Fakultät(funktion)**

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k \ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

(gelesen: "n-Fakultät") wird rekursiv definiert durch

$$0! := 1\,, \qquad (n+1)! := (n+1)\,n! \quad (n \geq 0)\ .$$

Bekanntlich gibt es genau $n!$ verschiedene bijektive Abbildungen einer n-elementigen Menge A, zum Beispiel $A := \{1, 2, \ldots, n\}$, auf eine n-elementige Menge B. Im Gegensatz zur Summe $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ lässt sich $n!$ nicht mühelos berechnen. Für grosse n gilt die **Stirlingsche Näherungsformel**

$$n! \ \doteq\ \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad .$$

Für Details und einen Beweis dieser Formel verweisen wir auf Abschnitt 10.2.

Bsp: $10! = 3\,628\,800$; die Stirlingsche Formel liefert $10! \doteq 3\,598\,695.622$.

○

⑤ Auf wieviele verschiedene Arten lassen sich $n \geq 1$ nicht unterscheidbare Erbsen in nichtleere Häufchen aufteilen? Es bezeichne $p(n)$ die Anzahl dieser **Partitionen** von n. Durch systematisches Auflisten der Fälle findet man für kleine n die folgenden Werte:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	…

,

und es bewährt sich, auch $p(0) := 1$ zu setzen. Für die Partitionsfunktion $n \mapsto p(n)$ gilt nun die folgende auf Euler zurückgehende (und schwierig zu beweisende) Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} p(n) &= \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \Big(p\big(n - \tfrac{1}{2}k(3k-1)\big) + p\big(n - \tfrac{1}{2}k(3k+1)\big) \Big) \\ &= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + \ldots\ , \end{aligned}$$

wobei die Summation abzubrechen ist, sobald negative Argumente $n - r$ auftreten. ○

Anzahlen

Für Mengen von aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen verwenden wir die folgenden Notationen:

$$[\,p\,..\,q\,] \;:=\; \big\{ k \in \mathbb{Z} \;\big|\; p \leq k \leq q \big\}\,, \qquad [n] \;:=\; [\,1\,..\,n\,] \quad (n \geq 0)\ .$$

Eine beliebige Menge A heisst **endlich**, wenn es eine natürliche Zahl n gibt und eine bijektive Abbildung

$$\phi: \quad [n] \to A\ .$$

Dieses n ist dann eindeutig bestimmt (lassen wir den Beweis!) und heisst **Anzahl der Elemente** oder auch **Kardinalität** von A. Man verwendet dafür Bezeichnungen wie $|A|$ oder $\#A$.

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen der Menge $[n]$ bezeichnet man mit

$$\binom{n}{k} \qquad (0 \leq k \leq n)\ .$$

Um diese Anzahl zu berechnen, betrachten wir die Anzahl Arten, aus n Personen eine Arbeitsgruppe mit k Mitgliedern auszuwählen, wobei ein Mitglied die Gruppe leiten soll. Man kann *entweder* zuerst aus den n Personen die k Mitglieder auswählen und anschliessend eines von ihnen zur Vorsitzenden machen *oder* zuerst aus den n Personen die Vorsitzende und anschliessend aus den restlichen $n-1$ Personen die übrigen $k-1$ Mitglieder auswählen.

Damit kommen wir zweimal auf dieselbe Anzahl von Möglichkeiten — das heisst, es gilt:

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

und folglich

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} .$$

Aus dieser Rekursionsformel ergibt sich mit vollständiger Induktion (wir überlassen die Details dem Leser):

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Diese auch **Binomialkoeffizienten** (s.u.) genannten Anzahlen genügen verschiedenen Identitäten, so zum Beispiel der folgenden, die dem sogenannten **Pascalschen Dreieck** (Tabelle der Binomialkoeffizienten) zugrundeliegt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} .$$

⌜ Man erhält sämtliche k-elementigen Teilmengen der Menge $[n+1]$, und zwar jede genau einmal, indem man *entweder* beliebige $k-1$ Elemente aus $[n]$ wählt und das Element $n+1$ hinzunimmt *oder* beliebige k Elemente aus $[n]$ wählt. ⌟

Es seien $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ gegebene reelle (oder komplexe) n-Tupel. Wird das Produkt

$$\prod_{j=1}^{n}(a_j + b_j) = (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)$$

distributiv ausmultipliziert, so entsteht eine Summe von insgesamt 2^n Termen, jeder ein Produkt von n Faktoren a_j bzw. b_j. Diese 2^n Terme entsprechen den 2^n Möglichkeiten, unabhängig voneinander bei jedem der n Binome $a_j + b_j$ das ‘ a_j ’ oder das ‘ b_j ’ zu wählen. Dabei kann man auf $\binom{n}{r}$ Arten in r Binomen das ‘ b_j ’ und in den restlichen $n-r$ Binomen das ‘ a_j ’ wählen. Haben alle a_j denselben Wert a und alle b_j denselben Wert b, so liefern alle diese $\binom{n}{r}$ Auswahlen einen Term vom Wert $a^{n-r}b^r$. Damit haben wir schon den **Binomischen Lehrsatz** bewiesen; er lautet:

(2.3) $$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \qquad (a,\, b \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}) .$$

Setzt man hier speziell $a := 1$ und betrachtet $b := t$ als Variable, so ergibt sich

$$(1+t)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^r \ .$$

Wir werden später sehen, dass diese Formel auf beliebige reelle Exponenten α (anstelle von n) umgeschrieben werden kann. Dabei entsteht die sogenannte *Binomialreihe*.

Aufgaben

1. Man stelle durch Punkte und Pfeile,

$$\textit{Bsp:} \qquad \begin{tikzcd} & & & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & & & \bullet & & \end{tikzcd} \quad ,$$

je ein System dar, in dem

(a) die Axiome (N0), (N1) und (N2) gelten, nicht aber (N3);

(b) die Axiome (N0), (N1) und (N3) gelten, nicht aber (N2);

(c) die Axiome (N0)–(N3) gelten mit der Abänderung, dass 0 ebenfalls ein Nachfolger ist.

2. Zeige mit vollständiger Induktion:

(a) Durch n Geraden “in allgemeiner Lage” wird die Ebene in $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegt. *Hinweis:* Jede weitere Gerade zerlegt eine ganz bestimmte Anzahl der schon vorhandenen Gebiete in zwei Teile.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (q \neq 1).$

(c) Ist $n \geq 2$ und $0 < x_k < 1 \ \ (1 \leq k \leq n)$, so gilt

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) > 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k \ .$$

(d) Die Summe aller weder durch 2 noch durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen $< 10n$ beträgt $20n^2$.

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2.2 Geordnete Körper

Körperaxiome

Um die “Verknüpfungen”, die in den verschiedenen Zahlensystemen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ..., $\mathbb{C}$ vorhanden sind, in der Sprache der Mengen und Abbildungen (Funktionen) beschreiben zu können, benötigen wir noch die folgenden Begriffe:

Es sei A eine beliebige Menge. Funktionen $\phi\colon A \times A \to A$, die also für je ein $x \in A$ und ein $y \in A$ einen Wert $\phi(x, y) \in A$ festlegen, heissen **binäre Operationen** auf A; man verwendet dafür Symbole wie $+$, $\cdot$, $\circ$, $*$ usw. und schreibt $x + y$, $x \cdot y$ usw. anstelle von $+(x, y)$, $\cdot(x, y)$. Eine binäre Operation $*$ auf A heisst **kommutativ**, wenn für alle x, $y \in A$ gilt:

$$x * y = y * x\ ,$$

und **assoziativ**, wenn für alle x, y, $z \in A$ gilt:

$$(x * y) * z = x * (y * z)\ ;$$

für den gemeinsamen Wert des letzten Ausdrucks schreibt man dann einfach $x * y * z$.

① Die Addition und die Multiplikation der reellen Zahlen sind kommutativ und assoziativ (s.u.). Das Potenzieren $(x, y) \mapsto x^y$ ist keins von beiden:

$$2^3 \neq 3^2\ , \qquad \left(2^2\right)^3 \neq 2^{\left(2^3\right)}\ .$$

○

Eine Menge K heisst ein **Körper**, wenn K mit zwei binären Operationen $+$ und $\cdot$, genannt **Addition** und **Multiplikation**, versehen ist, die folgende Eigenschaften besitzen:

(K1) (a) $x + y = y + x\ ,$ (b) $x \cdot y = y \cdot x\ .$

(K2) (a) $(x + y) + z = x + (y + z)\ ,$ (b) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\ .$

(K3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\ .$

(K4) In K gibt es zwei ausgezeichnete Elemente 0 **(Null)** und 1 **(Eins)**, $0 \neq 1$, so dass für alle $x \in K$ gilt:
(a) $x + 0 = x\ ,$ (b) $x \cdot 1 = x\ .$

(K5) (a) Zu jedem $x \in K$ gibt es ein $y \in K$ mit $x + y = 0$ **(additives Inverses)**.
(b) Zu jedem $x \in K^* := K \setminus \{0\}$ gibt es ein $z \in K^*$ mit $x \cdot z = 1$ **(multiplikatives Inverses)**.

Die Axiome (K1)(a), (K2)(a), (K4)(a) und (K5)(a) besagen zusammen, dass K eine **(kommutative) Gruppe** bildet bezüglich der Addition, die entsprechenden Axiome (b), dass K^* eine Gruppe bildet bezüglich der Multiplikation. Die beiden Operationen sind verknüpft durch das **Distributivgesetz** (K3); seiner Schreibweise liegt die Vereinbarung zugrunde, dass '$\cdot$' enger bindet als '$+$'. Eigentlich müsste man ja schreiben $x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$. Der $\cdot$ wird im übrigen meist weggelassen: $x \cdot y =: xy$.

Die beiden Inversen eines Elements x sind durch x eindeutig bestimmt: Gilt gleichzeitig $x + y = 0$ und $x + y' = 0$, so ist $x + y + y'$ einerseits gleich y', anderseits gleich y; folglich ist $y = y'$. Analog schliesst man für das multiplikative Inverse. Das additive Inverse von x wird mit $-x$, das multiplikative Inverse mit $1/x$ bezeichnet; ferner schreibt man zur Abkürzung

$$x + (-y) =: x - y\,, \qquad x \cdot \frac{1}{y} =: \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)\ .$$

Die binäre Operation $(x, y) \mapsto x-y$ heisst **Subtraktion**. Die **Division** $(x, y) \mapsto x/y$ ist keine binäre Operation auf K, wohl aber auf K^*.

Eine Struktur, in der alle Körperaxiome gelten mit Ausnahme von (K5)(b) (Existenz von multiplikativen Inversen), heisst ein **Ring mit Einselement**.

② Beispiele von Körpern sind $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, aber auch die Menge $\mathbb{B} := \{0, 1\}$, versehen mit den Operationen

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

In der Algebra wird gezeigt, dass es zu jeder Primzahlpotenz p^k "bis auf Isomorphie" genau einen Körper mit p^k Elementen gibt.

Die stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die "im Unendlichen verschwinden", das heisst: mit $x \to \pm\infty$ gegen 0 konvergieren, bilden zusammen einen Ring *ohne* Einselement. ○

In jedem Körper gelten die "üblichen Regeln der Algebra". Wir beginnen mit

(2.4) *Ist $*$ eine assoziative binäre Operation auf einer Menge A, so kommt es auch bei mehr als drei Operanden nicht auf die Stellung der Klammern an.*

⌜ Wir legen für $n \geq 1$ Operanden $x_1, \ldots, x_n$ durch

$$\bigl(\cdots\bigl((x_1 * x_2) * x_3\bigr) * x_4 \cdots\bigr) * x_n$$

eine Normalform der Beklammerung fest und behaupten: Alle endlichen Klammerausdrücke haben denselben Wert wie ihre Normalform. Klammerausdrücke der Länge 1 oder 2 stehen von selbst in der Normalform. Die Behauptung sei daher richtig für Klammerausdrücke der Länge n, und es sei P ein Klammerausdruck der Länge $n+1$, zum Beispiel ($n = 7$):

$$\bigl(x_1 * (x_2 * x_3)\bigr) \underset{\uparrow}{*} \Bigl((x_4 * x_5) * \bigl((x_6 * x_7) * x_8\bigr)\Bigr) \ .$$

Die letzte Operation beim Aufbau von P (im Beispiel durch einen Pfeil markiert) fügt zwei Klammerausdrücke P_1 und P_2 der Länge $\leq n$ zusammen: $P = P_1 * P_2$. Nach Induktionsvoraussetzung lässt sich P_2 durch seine Normalform, also insbesondere durch einen Ausdruck der Form $P_3 * x_{n+1}$ ersetzen, und es ergibt sich weiter

$$P = P_1 * (P_3 * x_{n+1}) = (P_1 * P_3) * x_{n+1} =: P_4 * x_{n+1} \ ,$$

dabei hat der Ausdruck P_4 genau n Operanden. Er lässt sich daher, wiederum nach Induktionsvoraussetzung, durch seine Normalform P_4' ersetzen, und wir erhalten $P = P_4' * x_{n+1}$. Damit ist P auf Normalform gebracht. ⌟

Nach diesem Satz sind wir berechtigt, auch bei beliebig vielen Operanden die Klammern wegzulassen. — Ganz ähnlich (ebenfalls via eine Normalform) beweist man den analogen Satz über kommutative binäre Operationen (wir überlassen den Beweis dem Leser):

(2.5) *Ist $*$ eine kommutative und assoziative Operation auf einer Menge A, so kommt es auch bei mehr als zwei Operanden nicht auf die Reihenfolge an.*

Aus diesen beiden Sätzen zieht man noch den folgenden Schluss: Ist I eine beliebige endliche Indexmenge und ist $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen einer (additiv geschriebenen) kommutativen Gruppe A, so ist die **Summe**

$$\sum\nolimits_{i \in I} a_i$$

dieser Familie wohlbestimmt.

Rechenregeln

Nun zu den Rechenregeln im eigentlichen Sinn. Die folgende kleine Liste zeigt, was damit gemeint ist:

$$-(-x) = x\,, \qquad \frac{1}{1/x} = x \quad (x \neq 0) \tag{1}$$

$$0 \cdot x = 0\,, \qquad (-1)\cdot x = -x\,, \tag{2}$$

$$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z\,,$$

$$x \cdot y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \;\vee\; y = 0\,. \tag{3}$$

⌜ (1) folgt aus $(-x) + x = 0$ bzw. $(1/x)\cdot x = 1$ und der eindeutigen Bestimmtheit der Inversen. — Die Formelzeilen

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x - 0 \cdot x = (0+0)\cdot x - 0\cdot x = 0\cdot x - 0 \cdot x = 0$$

und

$$x + (-1)\cdot x = 1 \cdot x + (-1)\cdot x = \bigl(1 + (-1)\bigr)\cdot x = 0 \cdot x = 0$$

beweisen (2). — Schliesslich noch (3): Ist $x \neq 0$, so existiert $1/x$, und aus $x \cdot y = 0$ folgt dann $y = 1 \cdot y = (1/x)\cdot x \cdot y = (1/x)\cdot 0 = 0$. ⌟

Eine Menge K heisst ein **geordneter Körper**, wenn K erstens ein Körper und zweitens geordnet ist, wobei drittens die Körperstruktur und die Ordnung verknüpft sind durch

(OK1) $x > y \quad \Longrightarrow \quad x + z > y + z\,.$

(OK2) $x > 0 \;\wedge\; y > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y > 0\,.$

Ein Element $x \in K^*$ heisst **positiv** oder **negativ**, je nachdem, ob $x > 0$ oder $x < 0$ ist. — In jedem geordneten Körper gelten die "üblichen Regeln über das Rechnen mit Ungleichungen". Wir zählen einige davon auf:

$$x > y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y > 0\,,$$

$$x > y \;\wedge\; u > v \quad \Longrightarrow \quad x + u > y + v\,,$$

$$x > 0 \;\wedge\; y < 0 \quad \Longrightarrow \quad xy < 0\,, \qquad x < 0 \;\wedge\; y < 0 \quad \Longrightarrow \quad xy > 0\,,$$

$$x > y \;\wedge\; a > 0 \quad \Longrightarrow \quad ax > ay\,, \qquad x > y \;\wedge\; a < 0 \quad \Longrightarrow \quad ax < ay\,,$$

$$x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 > 0\,, \qquad 1 > 0\,, \tag{4}$$

$$x > y > 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}\,, \tag{5}$$

$$x > y > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{y} > 1\,.$$

⌜ Wir beweisen nur (5): Es gilt

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = (x - y)\cdot \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\,,$$

und hier sind alle Faktoren rechter Hand positiv. ⌟

③ $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind geordnete Körper, $\mathbb{C}$ nicht, und zwar lässt sich $\mathbb{C}$ grundsätzlich nicht zu einem geordneten Körper machen, denn $i^2 = -1$ ist mit Regel (4) nicht verträglich.

Legt man auf der Menge

$$K := \{r + s\sqrt{2} \mid r,\, s \in \mathbb{Q}\}$$

die gewöhnliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen sowie die von $\mathbb{R}$ geerbte Ordnung zugrunde, so wird K ein geordneter Körper. Es gilt nämlich

$$(r + s\sqrt{2}) \cdot (r' + s'\sqrt{2}) = (rr' + 2ss') + (rs' + r's)\sqrt{2}\,,$$
$$\frac{1}{r + s\sqrt{2}} = \frac{r}{r^2 - 2s^2} - \frac{s}{r^2 - 2s^2}\sqrt{2}\,,$$

wobei benutzt wurde, dass $r^2 - 2s^2$ für rationale r, s nur verschwindet, wenn $r = s = 0$ ist. ○

Betrags- und Signumfunktion

Auf einem geordneten Körper K definiert man den **absoluten Betrag**, eine Funktion $\mathrm{abs} : K \to K_{\geq 0}$ (Fig. 2.2.1), durch

$$|x| := \mathrm{abs}\, x := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x \leq 0) \end{cases}\,.$$

Beispiel: $-5 < 0 \quad \Longrightarrow \quad |-5| := -(-5) = 5\,.$

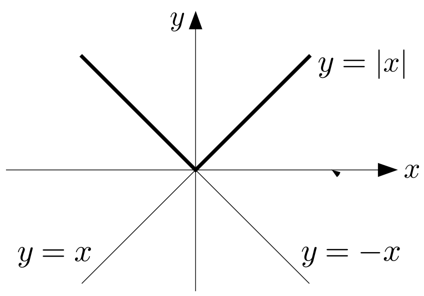

Fig. 2.2.1

Die Grösse $|x|$ ist immer ≥ 0 und stellt den Abstand des Punktes x vom Ursprung dar. Es gilt (Fig. 2.2.2):

$$|x| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad -\varepsilon < x < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)\,.$$

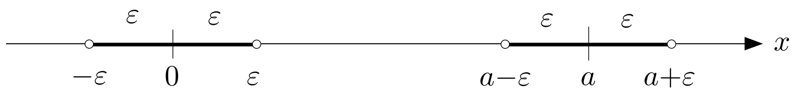

Fig. 2.2.2

Allgemein ist $|x - a|$ der Abstand des Punktes x vom Punkt a auf der Zahlengeraden, und es gilt:

$$|x-a| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \qquad\qquad (\varepsilon > 0)\ .$$

Die Betragsfunktion ist multiplikativ:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|\ ,$$

und sie genügt der **Dreiecksungleichung**

$$|x+y| \le |x| + |y|\ . \tag{6}$$

Beide Seiten von (6) bleiben unverändert, wenn x und y gleichzeitig mit -1 multipliziert werden. Wir dürfen daher $x + y \ge 0$ annehmen und haben dann wegen $x \le |x|$:

$$|x+y| = x + y \le |x| + |y|\ .$$

4 Wir behandeln die folgende Aufgabe: Man zeichne den Graphen der Funktion

$$f(x) := \bigl|2 - |1-x|\bigr| \ -\ |x|\ .$$

Die Terme $|1 - x|$ und $|x|$ bewirken, dass jedenfalls an den Stellen 0 und 1 “etwas passiert”. Wir haben daher vorweg drei Fälle, die sich (wegen der äusseren $|\cdot|$-Klammer) unter Umständen weiter aufteilen.

$\underline{\mathbf{1}:\quad x \le 0}$ $\quad(\Longrightarrow\ 1 - x \ge 0)$

Hier ist

$$f(x) = \bigl|2 - (1-x)\bigr| \ -\ (-x) = |1+x| \ +\ x\ .$$

Wir unterscheiden daher weiter: Im Fall

$\underline{\mathbf{1.1}:\quad x \le -1}$ $\quad(\Longrightarrow\ 1 + x \le 0)$

gilt

$$f(x) = -(1+x) - (-x) = -1\ ,$$

und im Fall

$\underline{\mathbf{1.2}:\quad -1 \le x \le 0}$ $\quad(\Longrightarrow\ 1 + x \ge 0)$

hat man

$$f(x) = 1 + x - (-x) = 1 + 2x\ .$$

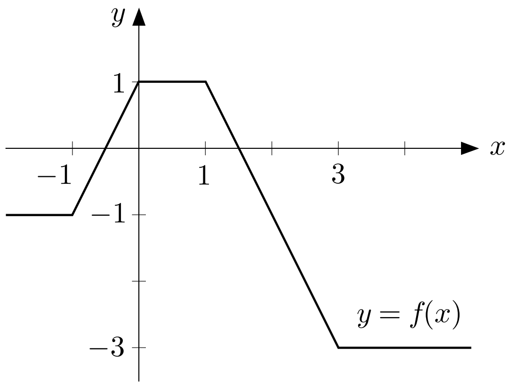

Fig. 2.2.3

2 : $0 \leq x \leq 1$ $\quad (\Longrightarrow\ 1 \pm x \geq 0)$.
Hier ist

$$f(x) = \bigl|2 - (1 - x)\bigr| \ - \ x = |1 + x| \ - \ x = 1 + x - x = 1 \ .$$

3 : $x \geq 1$ $\quad (\Longrightarrow\ 1 - x \leq 0)$.
Man hat

$$f(x) = \bigl|2 + (1 - x)\bigr| \ - \ x = |3 - x| \ - \ x$$

und muss daher weiter unterscheiden: Im Fall

3.1 : $1 \leq x \leq 3$ $\quad (\Longrightarrow\ 3 - x \geq 0)$

gilt

$$f(x) = 3 - x - x = 3 - 2x \ ,$$

und im Fall

3.2 : $x \geq 3$

schliesslich

$$f(x) = -(3 - x) - x = -3 \ .$$

Alles in allem erhalten wir den in Fig. 2.2.3 dargestellten Graphen. ○

Die in der Betragsfunktion verlorengegangene Information über x ist gespeichert in der **Signumfunktion** (Fig. 2.2.4)

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \ .$$

Es gelten die folgenden Identitäten:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x| \ , \qquad \operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \ \cdot \ \operatorname{sgn} y \ ;$$

die Signumfunktion ist also ebenfalls multiplikativ.

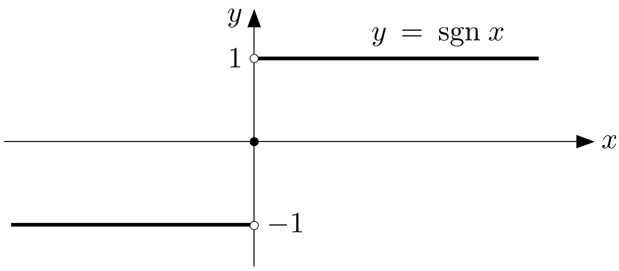

Fig. 2.2.4

Aufgaben

1. In $\mathbb{R}^2$ werden folgende Operationen eingeführt:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2)\ ,\\ (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &:= (x_1 y_1, x_2 y_2)\ .\end{aligned}$$

   Wird damit ein Körper definiert?

2. Beweise: Für beliebige x, $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x| + |y| + \bigl|\, |x| - |y| \,\bigr| = |x - y| + |x + y|\ .$$

   Hinweis: Verifiziere vorweg, dass die beiden Seiten dieser Identität gegenüber $x \rightsquigarrow -x$, $y \rightsquigarrow -y$ und $x \leftrightsquigarrow y$ invariant sind. Man darf daher im weiteren $x \geq y \geq 0$ annehmen.

3. Die Funktion f sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x + 2 & (x < -1) \\ -x & (-1 \leq x \leq 1) \\ x - 2 & (x > 1) \end{cases} \quad .$$

   Stelle f mit Hilfe der Betragsfunktion durch einen einzigen, für alle $x \in \mathbb{R}$ gültigen Ausdruck dar.

4. Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien rekursiv definiert durch

$$f_0(x) := |x|\ , \qquad f_{n+1}(x) := \bigl|1 - f_n(x)\bigr| \quad (n \geq 0)\ .$$

   Zeichne den Graphen von f_{100}.

5. Zeige: Die drei reellen Zahlen a, b, c sind genau dann alle positiv, wenn die folgenden Ungleichungen simultan erfüllt sind:

$$a + b + c > 0\ , \qquad ab + bc + ca > 0, \qquad abc > 0\ . \tag{$*$}$$

   Hinweis: Sind die drei Ungleichungen $(*)$ erfüllt, so hat die Gleichung $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = 0$ keine Lösungen ≤ 0.

2.3 Konstruktion von $\mathbb{R}$

Ganze und rationale Zahlen

Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen entsteht aus $\mathbb{N}$ mit Hilfe einer gewissen algebraischen Konstruktion. Das Ergebnis ist uns von Kindsbeinen an vertraut:

(2.6) (a) *Die ganzen Zahlen bilden ein System $\mathbb{Z}$ mit einer Addition, einer Multiplikation und einer Ordnung, in dem alle Axiome eines geordneten Körpers gelten mit Ausnahme von* (K5)(b) *(Existenz des multiplikativen Inversen).*

(b) *$\mathbb{Z}$ enthält die natürlichen Zahlen (mit ihrer Addition, Multiplikation und Ordnung).*

(c) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

In $\mathbb{Z}$ ist nun auch die Subtraktion unbeschränkt möglich, und es gelten alle Regeln der Algebra, soweit sie nicht ausdrücklich die Existenz des multiplikativen Inversen voraussetzen. Insbesondere gilt in $\mathbb{Z}$ auch der Schluss

$$x \cdot y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad y = 0 \, ,$$

bzw. die damit äquivalente **Kürzungsregel**

$$ax = bx \quad \wedge \quad x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad a = b \, .$$

Auch die Erweiterung von $\mathbb{Z}$ zum Körper $\mathbb{Q}$ erfolgt im Rahmen der Algebra, wir haben das in Beispiel 1.3.4 skizziert. Diese Konstruktion führt zu dem folgenden, uns ebenfalls vertrauten Ergebnis:

(2.7) (a) *Die rationalen Zahlen bilden einen geordneten Körper $\mathbb{Q}$.*

(b) *$\mathbb{Q}$ enthält die ganzen Zahlen (mit ihrer Addition, Multiplikation und Ordnung).*

(c) *Jedes Element $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar:*

$$\alpha = \frac{p}{q} \, , \qquad p \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{N}^* \, .$$

Diese Darstellung ist durch α nicht eindeutig bestimmt, und zwar gilt

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \quad \Longleftrightarrow \quad pq' = p'q \, .$$

(d) *Die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist wie folgt mit derjenigen auf $\mathbb{Z}$ verknüpft:*

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad ps < rq \, .$$

Zum numerischen Rechnen sind die gemeinen Brüche eher weniger geeignet, da beim Aufaddieren von Zahlenkolonnen die Nenner ins Uferlose zu wachsen pflegen. Dazu kommt, dass sehr nahe beieinanderliegende Zahlen sehr verschieden aussehende Darstellungen haben können.

Bsp: $\left|\frac{233}{610} - \frac{377}{987}\right| = 0.00000166\,.$

Dualbrüche

In unserem täglichen Umgang mit nichtganzen Zahlen verlassen wir uns natürlich seit jeher auf Dezimalbrüche. Für die Konstruktionen dieses Abschnitts wollen wir allerdings statt *Dezimal*brüchen lieber *Dual*brüche verwenden. Inhaltlich läuft das auf dasselbe hinaus, aber die Formeln werden etwas einfacher. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\mathbb{D}_n := \left\{ \frac{z}{2^n} \;\middle|\; z \in \mathbb{Z} \right\} \quad (n \geq 0)\,, \qquad \mathbb{D} := \bigcup\nolimits_{n\geq 0} \mathbb{D}_n\,;$$

die Elemente von $\mathbb{D}$ nennen wir **Binärzahlen**. Mit der Abkürzung

$$\iota_n \;:=\; 2^{-n} \qquad (n \geq 0)$$

besitzt jedes $a \in \mathbb{D}$ eine (bis auf überflüssige Nullen) wohlbestimmte **endliche Dualbruchentwicklung** der Form

$$a = \sum_{k=0}^{n} x_k\, \iota_k \;\; =: \;\; x_0 \,.\, x_1\, x_2\, \ldots\, x_n \tag{1}$$

mit Ziffern

$$x_0 = \lfloor a \rfloor \in \mathbb{Z}\,, \qquad x_k \in \{0,1\} \quad (1 \leq k \leq n)\,;$$

dabei hängt n von a ab. Beachte, dass in diesem Zahlenformat die sämtlichen Vorkommastellen sowie das Vorzeichen von a in der Anfangsziffer x_0 abgelegt werden.

Bsp: $a = -9\,.\,1101$ bezeichnet den Sachverhalt $a = -9 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = -\frac{131}{16}$.

Wir wollen hier das (genaue) Rechnen mit Binärzahlen bzw. endlichen Dualbrüchen nicht weiter hinterfragen. Besonders erfreulich ist, dass die "natürliche" Ordnung der Binärzahlen mit der lexikographischen Ordnung der zugehörigen Dualbrüche übereinstimmt. Es ist daher möglich, eine Liste von Dualbrüchen von blossem Auge der Grösse nach zu ordnen.

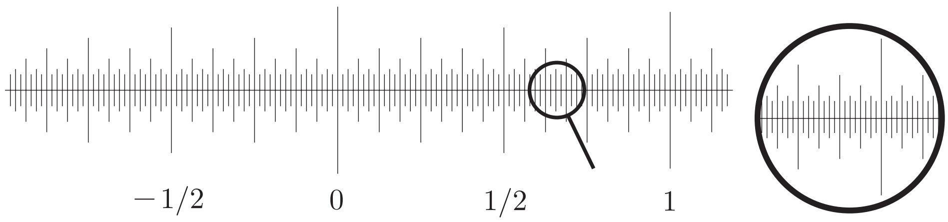

Fig. 2.3.1

In Fig. 2.3.1 wurde versucht, den **selbstähnlichen**, das heisst: sich in unendlich vielen Massstäben reproduzierenden Charakter der Menge $\mathbb{D}$ zeichnerisch umzusetzen. Algebraisch gesehen ist $\mathbb{D}$ ein Ring, aber kein Körper mehr, da die Division von Dualbrüchen im allgemeinen nicht aufgeht. Nur durch Potenzen von 2 kann man jederzeit dividieren. Das wird in Kauf genommen, da $\mathbb{D}$ in der Menge aller reellen Zahlen dicht liegt (s.u.) und man sich in der Praxis mit einer hinreichenden Approximation zufrieden gibt.

So läuft zum Beispiel der in der Schule gelernte Divisionsalgorithmus auf folgendes hinaus: Es seien a und b gegebene Dualbrüche, $b > 0$, deren Quotient a/b als Dualbruch dargestellt werden soll, und es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine vorgegebene Toleranz, zum Beispiel $\varepsilon := \iota_{20}$. Dann kann man (durch "Herunterholen von Nullen") immer ein $q \in \mathbb{D}$ finden, so dass gilt:

$$q \leq \frac{a}{b} < q + \varepsilon \ .$$

In anderen Worten: Der vom Divisionsalgorithmus gelieferte Dualbruch q ist weniger als ε von der "gemeinten" Zahl a/b entfernt.

① Es soll die Zahl $a/b := 53/11$ in einen Dualbruch "entwickelt" werden. Der Divisionsalgorithmus (mit expandierten Vorkommastellen) liefert

$$
\begin{array}{rlcccc}
\overbrace{110101}^{a}. & & : & \overbrace{1011}^{b} & = & \overbrace{100\,.\,1101}^{q} \\
1001\ \ 0 & & & & & \\
11\ \ 10 & & & & & \\
1100 & & & & & \\
1 & (\text{“Rest”})\ . & & & &
\end{array}
$$

Wird an dieser Stelle abgebrochen, so ist $b\,q < a$ (wegen des Rests) und $b(q + \iota_4) > a$ (sonst wäre q grösser ausgefallen). Damit ist die Eingabelung $q < a/b < q + \iota_4$ sichergestellt. ○

Reelle Zahlen, intuitiv

Schon die Pythagoräer wussten, dass die rationalen Zahlen für eine befriedigende Theorie zum Beispiel des Quadrats nicht ausreichen, und es heisst, dass "der Mann, der als erster die Betrachtung der irrationalen Grössen aus dem Verborgenen an die Öffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei, und zwar deshalb, weil das Unaussprechliche und Bildlose für immer hätte verborgen bleiben sollen."

② Wir zeigen: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

⌜ Ist $\sqrt{2}$ rational, so gibt es eine Darstellung $\sqrt{2} = p/q$, p und q nicht beide gerade. Wegen $p^2 = 2q^2$ ist jedenfalls p gerade: $p = 2r$, und wir haben $4r^2 = 2q^2$ bzw. $q^2 = 2r^2$. Hiernach ist auch q gerade, im Widerspruch zur Annahme über p und q. ⌟

○

Wir sind also gezwungen, den Zahlenbereich $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{D}$) zu einem umfassenderen System zu erweitern, in dem dann auch Zahlen wie $\sqrt{2}$ (bzw. 53/11 wieder) vorhanden sind und mindestens in Gedanken mit unendlicher Genauigkeit erfasst, addiert und multipliziert werden können. Dies wird das System $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sein.

Die "reellen Zahlen" sind gewisse ideale Objekte, mit denen wir von der Schule her und im täglichen Leben etwa folgende Vorstellungen verknüpfen:

(a) Die reellen Zahlen bilden einen geordneten Körper.

(b) Jede reelle Zahl α lässt sich beliebig genau durch Dualbrüche von unten annähern. Genau: Zu jeder noch so kleinen Toleranz $\varepsilon > 0$ (zum Beispiel $\varepsilon := \iota_{20}$) gibt es ein $a \in \mathbb{D}$ mit

$$a \leq \alpha < a + \varepsilon \ .$$

(c) Ist $a \doteq \alpha$ und $b \doteq \beta$, so gilt $a + b \doteq \alpha + \beta$ und $a \cdot b \doteq \alpha \cdot \beta$.

Dieser entscheidende Sachverhalt ermöglicht, in Gedanken und Formeln zwei "unendlich genaue" reelle Zahlen exakt miteinander zu multiplizieren, für die "numerische Simulation" dieser Rechnung aber endliche Dualbrüche zu verwenden.

(d) Jeder "unendliche Dualbruch" stellt eine reelle Zahl dar, und umgekehrt: Jede reelle Zahl besitzt eine im wesentlichen eindeutige Darstellung als "unendlicher Dualbruch".

(Die Elemente von $\mathbb{D}$ besitzen genau zwei derartige Darstellungen, alle andern reellen Zahlen genau eine. So stellen zum Beispiel 0.1111... und 1.0000... beide die Zahl $1 \in \mathbb{R}$ dar — darüber unten mehr.)

③ Die reelle Zahl $\alpha := 4/7$ besitzt die nicht abbrechende Dualbruchentwicklung

$$0.10010010010010\ldots \qquad \left(= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{1024} + \ldots = \tfrac{4}{7}\right)$$

und lässt sich folglich durch die endlichen Dualbrüche

$$\begin{array}{l} 0.1 \\ 0.1001 \\ 0.1001001 \\ 0.1001001001001 \\ \quad\vdots \end{array}$$

besser und besser approximieren. ○

Dass sich nach diesen vagen Vorstellungen tatsächlich ein logisch konsistentes System $\mathbb{R}$ fabrizieren lässt, hat Dedekind 1872 als erster bewiesen. Dedekind hat sogenannte "Schnitte" (s.u.) von $\mathbb{Q}$ betrachtet. Wir bringen im folgenden eine von Timothy Gowers vorgeschlagene Konstruktion, die die reellen Zahlen elementweise als eine "überabzählbare Liste" von Dualbrüchen präsentiert. Wer es auch so glaubt, darf direkt zum Axiom (R) am Schluss dieses Abschnitts springen.

Reelle Zahlen als unendliche Dualbrüche

Ein **unendlicher Dualbruch** ist eine unendliche Folge

$$\mathbf{x} = (x_k)_{k\geq 0} =: x_0 \,.\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \ldots$$

mit

$$x_0 \in \mathbb{Z}\,, \qquad x_k \in \{0,1\} \quad (k \geq 1)\ .$$

Die Gesamtheit dieser Folgen bezeichnen wir mit X. Die Menge X ist von vorneherein lexikographisch geordnet und enthält die speziellen Elemente

$$0\,.\,0000\ldots =: \mathbf{0}\,, \qquad 1\,.\,0000\ldots =: \mathbf{1}\ .$$

Die zu Grunde liegende Vorstellung ist natürlich die, dass ein $\mathbf{x} \in X$ die "unendlichstellige" Zahl

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k\, \iota_k = x_0\,.\,x_1x_2x_3x_4\ldots$$

repräsentiert. Immerhin lässt sich jede Binärzahl a resp. jeder endliche Dualbruch (1) durch Anhängen von unendlich vielen Nullen als Element von X

auffassen. Damit erscheint $\mathbb{D}$ als Teilmenge von X, und zwar unter Erhaltung der Ordnung. In diesem Zusammenhang treffen wir die folgende Vereinbarung: Wenn eine Folge $\mathbf{x} \in X$ mit lauter Nullen endet:

$$\exists\, n: \quad x_k = 0 \quad (k > n)\,,$$

so bezeichnet $\mathbf{x}$ auch die Binärzahl $\sum_{k=0}^{n} x_k\, \iota_k$, und für zwei derartige Folgen $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ bezeichnet $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ die Summe der betreffenden Zahlen, ausgedrückt als ein Element von X; analog für das Produkt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Die Elemente $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ haben die besondere Eigenschaft, dass sie in X einen unmittelbaren lexikographischen Vorgänger $\mathbf{x}'$ besitzen: Bezeichnet $\mathbf{x}$ die ganze Zahl z, so ist

$$\mathbf{x} = z\,.\,0000\ldots\,, \qquad \mathbf{x}' = (z-1)\,.\,1111\ldots\ .$$

Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$, so weist $\mathbf{x}$ eine letzte 1 nach dem Komma auf, und man hat

$$\mathbf{x} = x_0\,.\,x_1\ldots x_{n-1}\,1\,0000\ldots\,, \qquad \mathbf{x}' = x_0\,.\,x_1\ldots x_{n-1}\,0\,1111\ldots\ .$$

Bsp: $\mathbf{x} = 5\,.\,0110000\ldots$, $\mathbf{x}' = 5\,.\,0101111\ldots$.

In diesen Fällen lässt sich kein $\mathbf{y} \in X$ angeben, das echt zwischen $\mathbf{x}'$ und $\mathbf{x}$ liegt. Dies widerspricht unserer vielfach erhärteten Gewissheit, dass zwischen je zwei verschiedenen Zahlen unendlich viele weitere Zahlen liegen. Der Ausweg aus diesem Dilemma ist einfach: Wir betrachten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ als zwei verschiedene Darstellungen ein und derselben reellen Zahl. Abstrakt: Die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* ist die Quotientenmenge von X bezüglich der so definierten Äquivalenz $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$, $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$. Da die Sache so übersichtlich ist, führen wir keine eigene Bezeichnung für die Äquivalenzklassen ein, sondern arbeiten weiterhin mit den Folgen $\mathbf{x} \in X$ selbst und werden die notwendigen Überprüfungen an Ort und Stelle vornehmen.

Das Hauptwerkzeug unserer Konstruktion sind die **Abrunde-Operatoren**

$$T_n:\ X \to \mathbb{D}_n \quad (\subset X)\,, \quad \mathbf{x} \to T_n\mathbf{x} \qquad (n \geq 0)\,,$$

die wie folgt definiert sind:

$$\bigl(T_n\mathbf{x}\bigr)_k := \begin{cases} x_k & (0 \leq k \leq n)\,, \\ 0 & (k > n)\,. \end{cases}$$

Man hat die folgenden Rechenregeln:

(a) $$T_n\mathbf{x} \leq \mathbf{x}\,; \qquad n \leq n' \ \Rightarrow\ T_n\mathbf{x} \leq T_{n'}\mathbf{x} < T_n\mathbf{x} + \iota_n\,;$$

(b) $$T_n\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \forall n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \leq \mathbf{y}\,;$$

(c) $$|T_n\mathbf{x}| \leq |x_0| + 1 \qquad (n \geq 0)\,;$$

(d) $$T_n \circ T_m = T_{\min\{n,m\}}\ .$$

Wir zeigen als erstes, dass sich zwei *verschiedene* reelle Zahlen nicht beliebig nahe kommen können, sondern immer durch ein "binäres Intervall" positiver Länge voneinander getrennt sind:

(2.8) *Sind* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *zwei Elemente von* X *mit* $\mathbf{x} \lnapprox \mathbf{y}$, *so gibt es ein* $r \in \mathbb{N}$ *und Binärzahlen* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{D}_r$ *mit*

$$\mathbf{x} \le \mathbf{u} < \mathbf{v} \le \mathbf{y} \ . \tag{2}$$

⌜ Wegen $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ ist $y_0 - x_0 \ge 1$, oder es gibt ein $m \ge 1$ mit

$$T_{m-1}\mathbf{x} = T_{m-1}\mathbf{y} =: \mathbf{a}\,, \qquad x_m = 0\,, \quad y_m = 1\ .$$

Es wird genügen, den Fall $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $x_m = 0$, $y_m = 1$ ($m = 0$ zugelassen) weiter zu verfolgen. Wegen $\mathbf{x} \not\approx \mathbf{y}$ trifft mindestens eines der beiden folgenden zu:

(I) In der Folge $\mathbf{y}$ erscheint nach y_m eine erste weitere 1, das heisst, es gibt ein $r > m$ mit

$$\mathbf{x} = \ldots 000\,\underset{m}{0}\ x_{m+1} \ldots\ , \qquad \mathbf{y} = \ldots 000\,\underset{m}{1}\,00\ldots 00\underset{r}{1}\ y_{r+1} \ldots\ .$$

In diesem Fall trennen die Zahlen $\mathbf{u} := \iota_m$ und $\mathbf{v} := \iota_m + \iota_r$ die beiden Folgen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wie angegeben.

(II) In der Folge $\mathbf{x}$ erscheint nach x_m eine erste weitere 0, das heisst, es gibt ein $r > m$ mit

$$\mathbf{x} = \ldots 000\,\underset{m}{0}\,11\ldots 11\underset{r}{0}\ x_{r+1} \ldots\ , \qquad \mathbf{y} = \ldots 000\,\underset{m}{1}\ y_{m+1} \ldots\ .$$

In diesem Fall trennen die Zahlen $\mathbf{u} := T_r\mathbf{x} + \iota_r = \iota_m - \iota_r$ und $\mathbf{v} := \iota_m$ die beiden Folgen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wie angegeben. ⌟

Eine unendlichstellige reelle Zahl als Resultat einer Rechnung (Addition, Multiplikation, …) können wir nur über einen "Grenzprozess" erhalten. Wir betrachten also Folgen

$$j \mapsto \mathbf{x}_j \quad (j \ge 0), \qquad (\mathbf{x}_j)_k =: x_{j.k}\ ,$$

von unendlichen Dualbrüchen. Eine derartige Folge ist **monoton wachsend**, wenn für alle $j \ge 0$ gilt: $\mathbf{x}_{j+1} \ \ge\ \mathbf{x}_j$, und **beschränkt**, wenn es ein $M \in \mathbb{N}$ gibt mit $|x_{j.0}| \le M$ für alle $j \ge 0$.

Das universelle Instrument zur Erzeugung von bestimmten reellen Zahlen ist der folgende Satz:

(2.9) (e) *Es sei* $\left(\mathbf{x}_j\right)_{j\geq 0}$ *eine monoton wachsende und beschränkte Folge in* X*. Dann gibt es ein wohlbestimmtes Element* $\mathbf{s} \in X$ *und für alle* $n \geq 0$ *ein* j_n *mit*

$$T_n\mathbf{s} \;=\; T_n(\mathbf{x}_j) \qquad (j \geq j_n)\ .$$

(f) *Dabei gilt* $\mathbf{x}_j \leq \mathbf{s}$ *für alle* $j \geq 0$ *.*

In Worten: Die auf n Stellen nach dem Komma abgerundeten "Zahlen" $\mathbf{x}_j$ sind für alle $j \geq j_n$ gleich der auf n Stellen angegebenen "Limeszahl" $\mathbf{s}$.

⌜ (e) Es kann höchstens ein derartiges $\mathbf{s}$ geben. Für den Existenzbeweis halten wir $n \geq 0$ zunächst fest. Die Folge

$$j \mapsto T_n(\mathbf{x}_j) \qquad (j \geq 0)$$

ist nach Regel (a) monoton wachsend. Da ihr nur $(2M+1)\cdot 2^n$ mögliche Werte zur Verfügung stehen, muss dieses Wachstum nach endlich vielen Schritten zum Stillstand kommen. Es gibt also ein j_n und ein $\mathbf{s}_n \in \mathbb{D}_n$ mit

$$T_n(\mathbf{x}_j) = \mathbf{s}_n \qquad (j \geq j_n)\ .$$

Dieses $\mathbf{s}_n$ inkorporiert die ersten n Stellen der gesuchten "Limeszahl" $\mathbf{s}$: Ist $n' \geq n$, so gilt für $j := \max\{j_n, j_{n'}\}$ die Beziehung

$$T_n(\mathbf{s}_{n'}) = T_n \circ T_{n'}(\mathbf{x}_j) = T_n(\mathbf{x}_j) = \mathbf{s}_n\ ;$$

in Worten: Die einmal berechneten Stellen der Limesfolge $\mathbf{s}$ ändern sich bei höherem Genauigkeitsanspruch nicht mehr und können als definitive Ziffern von $\mathbf{s}$ verwendet werden. Der unendliche Dualbruch $\mathbf{s} = (s_k)_{k\geq 0}$ wird also erklärt durch

$$s_k := s_{n.k} \qquad (n \geq k \geq 0)\ .$$

Dann gilt

$$T_n\mathbf{s} = \mathbf{s}_n = T_n(\mathbf{x}_j) \qquad (j \geq j_n)\ ,$$

wie behauptet.

(f) Gäbe es ein j mit $\mathbf{x}_j > \mathbf{s}$, so hätte man $T_n(\mathbf{x}_j) > T_n\mathbf{s}$ für ein gewisses n und folglich

$$T_n(\mathbf{x}_{j'}) \geq T_n(\mathbf{x}_j) > T_n\mathbf{s} = \mathbf{s}_n \qquad (j' \geq j)\ ,$$

im Widerspruch zur Definition von $\mathbf{s}_n$. ⌟

Wir bezeichnen das in **(2.9)** beschriebene $\mathbf{s}$ im Weiteren mit $\lim_{j\to\infty} \mathbf{x}_j$. Beachte: Der so definierte Grenzwert ist "rein digital" erklärt; es werden keine Abstände gemessen. Wir notieren noch die folgende Rechenregel:

(g) *Ist* $(\mathbf{x}_j)_{j\geq 0}$ *eine Folge der in Satz* **(2.9)** *beschriebenen Art und gilt* $\mathbf{x}_j \leq \mathbf{y}$ *für alle* j*, so folgt* $\lim_{j\to\infty} \mathbf{x}_j \;\leq\; \mathbf{y}$ *.*

Rechnen mit reellen Zahlen

Wir kommen nun zur Definition der Rechenoperationen. Für das Rechnen mit reellen Zahlen müssen wir uns natürlich auf das etablierte Rechnen mit endlichen Dualbrüchen abstützen. Dabei verwenden wir weiterhin $+$ und $\cdot$ für die vorhandene Addition und Multiplikation in $\mathbb{D}$ und verwenden $\oplus$ und $\odot$ für die in $\mathbb{R}$ neu einzurichtenden Operationen.

Zunächst die Addition. Für beliebige $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$ sind die Folgen

$$j \mapsto T_j\mathbf{x}\,, \qquad j \mapsto T_j\mathbf{y}$$

monoton wachsend und beschränkt, und dasselbe ist dann auch für die Folge

$$j \mapsto \; T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y} \qquad (j \geq 0)$$

der Fall. Mit Hilfe von Satz **(2.9)** definieren wir nun

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} := \lim_{j\to\infty} (T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y})\ .$$

In Worten: Man erhält n korrekte Stellen der Summe $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$, indem man hinreichend genaue Approximationen $T_j\mathbf{x}$ und $T_j\mathbf{y}$ in $\mathbb{D}$ addiert und das Resultat auf n Stellen abrundet. Die so definierte Addition $\oplus : X \times X \to X$ ist offensichtlich kommutativ, und $\mathbf{0}$ wirkt als Neutralelement. Wie man leicht nachprüft, gilt

$$\text{(h)} \qquad \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{D})\,,$$

das heisst, die Operation $\oplus$ ist eine konsistente Erweiterung der in $\mathbb{D}$ vorhandenen Addition auf X.

Um die Assoziativität der Operation $\oplus$ zu beweisen, benötigen wir die für jedes $n \geq 0$ geltenden Ungleichungen

$$\text{(i)} \quad T_n(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \leq T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y} \quad (j \geq j_n)\,; \qquad T_n\mathbf{x} + T_n\mathbf{y} \leq T_n(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y})\ .$$

⌜ Erstens ist

$$T_n(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = T_n(T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y}) \leq T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y} \qquad (j \geq j_n)\,,$$

und zweitens hat man für $j := \max\{n, j_n\}$ die Abschätzung

$$T_n(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = T_n(T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y}) \geq T_n(T_n\mathbf{x} + T_n\mathbf{y}) = T_n\mathbf{x} + T_n\mathbf{y}\ .$$ ⌟

Damit schließen wir nun wie folgt: Zu jedem $n \geq 0$ gibt es ein j und ein j' mit

$$\begin{aligned} T_n\bigl((\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z}\bigr) &\leq T_j(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) + T_j\mathbf{z} \leq T_{j'}\mathbf{x} + T_{j'}\mathbf{y} + T_{j'}\mathbf{z} \\ &\leq T_{j'}\mathbf{x} + T_{j'}(\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \leq T_{j'}\bigl(\mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})\bigr) \\ &\leq \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})\ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt $(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} \leq \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})$ nach Regel (b), und aus Symmetriegründen gilt dann auch die umgekehrte Ungleichung.

Das Axiom (OK1) haben wir zunächst nur in der folgenden schwächeren Form:

(j) $$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x} + \mathbf{z} \ \leq \ \mathbf{y} + \mathbf{z}\ .$$

⌜ Für alle j gilt nach **(2.9)**(f)

$$T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{z} \leq T_j\mathbf{y} + T_j\mathbf{z} \leq \mathbf{y} \oplus \mathbf{z}\ ,$$

und mit (g) folgt die Behauptung. ⌟

Um weiter zu kommen, benötigen wir die folgende schlanke Version von **(2.8)** sowie deren Gegenstück:

(k) *Gilt* $\mathbf{x} \lnsim \mathbf{y}$, *so gibt es ein* $r \in \mathbb{N}$ *mit* $\mathbf{x} \oplus \iota_r \leq \mathbf{y}$.

(l) *Für alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ *und alle* $n \geq 0$ *gilt* $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}' \oplus \iota_n$.

⌜ Nach **(2.8)** gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ sowie Zahlen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{D}_r$, so dass (2) gilt. Hieraus folgt mit (j) und (h):

$$\mathbf{x} \oplus \iota_r \leq \mathbf{u} \oplus \iota_r \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{y}\ .$$

Zum Beweis von (l) betrachten wir ein festes $n \geq 0$. Für alle hinreichend grossen j gilt

$$T_j\mathbf{x} = T_j\mathbf{x}' + \iota_j \leq T_j\mathbf{x}' + \iota_n = T_j\mathbf{x}' \oplus \iota_n \leq \mathbf{x}' \oplus \iota_n\ ,$$

und hieraus folgt die Behauptung mit (a). ⌟

Damit können wir nun (OK1), also die Regel

$$\mathbf{x} \lnsim \mathbf{y} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x} \oplus \mathbf{z} \ \lnsim \ \mathbf{y} \oplus \mathbf{z}\,,$$

beweisen:

⌜ Es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{x} \oplus \iota_r \leq \mathbf{y}$, und hieraus folgt mit (j):

$$(\mathbf{x} \oplus \mathbf{z}) \oplus \iota_r \leq \mathbf{y} \oplus \mathbf{z}\ . \tag{3}$$

Die Äquivalenz $(\mathbf{x} \oplus \mathbf{z}) \sim (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})$ würde nach (l) die Ungleichungen

$$\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \leq (\mathbf{x} \oplus \mathbf{z}) \oplus \iota_n \qquad (n \geq 0)$$

nach sich ziehen, was für $n > r$ zu einem Widerspruch mit (3) führt. ⌟

Nun zu einem heiklen Punkt: Die Binärzahlen haben ja zwei Repräsentanten in X. Damit wir $\oplus$ tatsächlich als Addition auf $\mathbb{R}$ auffassen können, müssen wir die Äquivalenz

$$\mathbf{x}' \oplus \mathbf{y} \ \sim\ \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{D},\ \mathbf{y} \in X)$$

verifizieren.

⌜ Mit (j) folgt $\mathbf{x}' \oplus \mathbf{y} \leq \mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$. Wäre dabei $\mathbf{x}' \oplus \mathbf{y} \lnsim \mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$, so gäbe es nach (k) und (l) ein r, so dass

$$\mathbf{x}' \oplus \mathbf{y} \oplus \iota_r \leq \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \leq \mathbf{x}' \oplus \iota_n \oplus \mathbf{y}$$

für alle n zutrifft, im Widerspruch zu (j). ⌟

Bezüglich der Multiplikation können wir uns ein wenig kürzer fassen. Wir betrachten zwei beliebige $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$, wobei wir zunächst $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ voraussetzen. Dann ist die Folge

$$j \mapsto T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y} \qquad (j \geq 0)$$

monoton wachsend und beschränkt. Satz **(2.9)** garantiert daher die Existenz des Produkts

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} := \lim_{j\to\infty} (T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y}) \ .$$

Die so definierte Multiplikation $\odot :\ X_{>\mathbf{0}} \times X_{>\mathbf{0}} \to X$ ist offensichtlich kommutativ mit $\mathbf{1}$ als Neutralelement, und es gilt die Regel (OK2):

$$\mathbf{x} > \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{y} > \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x} \odot \mathbf{y} > \mathbf{0} \ .$$

Um die Assoziativität der Operation $\odot$ zu beweisen, benötigen wir die für jedes $n \geq 0$ geltenden Ungleichungen

(m) $\qquad T_n(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \leq T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y} \quad (j \geq j_n)\,; \qquad T_n\mathbf{x} \cdot T_n\mathbf{y} \leq T_{2n}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y})\ .$

⌜ Erstens ist

$$T_n(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = T_n(T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y}) \leq T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y} \qquad (j \geq j_n)\,,$$

und zweitens hat man für $j \geq \max\{n, j_{2n}\}$ die Abschätzung

$$T_{2n}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = T_{2n}(T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y}) \geq T_{2n}(T_n\mathbf{x} \cdot T_n\mathbf{y}) = T_n\mathbf{x} \cdot T_n\mathbf{y} \ .$$ ⌟

Damit schließen wir nun wie folgt: Zu jedem $n \geq 0$ gibt es ein j und ein j' mit

$$\begin{aligned} T_n\big((\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \odot \mathbf{z}\big) &\leq T_j(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \cdot T_j\mathbf{z} \leq T_{j'}\mathbf{x} \cdot T_{j'}\mathbf{y} \cdot T_{j'}\mathbf{z} \\ &\leq T_{2j'}\mathbf{x} \cdot T_{2j'}(\mathbf{y} \odot \mathbf{z}) \leq T_{4j'}\big(\mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z})\big) \\ &\leq \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z}) \ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt $(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \odot \mathbf{z} \le \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z})$ nach Regel (b), und aus Symmetriegründen gilt dann auch die umgekehrte Ungleichung.

Den ganz ähnlichen Beweis des Distributivgesetzes

$$\text{(n)} \qquad \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \;=\; (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \;\oplus\; (\mathbf{x} \odot \mathbf{z})$$

überlassen wir dem Leser.

Wie man leicht nachprüft, gilt

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{D}) ,$$

das heisst, die Operation $\odot$ ist eine konsistente Erweiterung der in $\mathbb{D}$ vorhandenen Multiplikation auf X. Damit wir $\odot$ tatsächlich als Multiplikation auf $\mathbb{R}$ auffassen können, müssen wir die Äquivalenz

$$\mathbf{x}' \odot \mathbf{y} \;\sim\; \mathbf{x} \odot \mathbf{y} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{D},\ \mathbf{y} \in X)$$

verifizieren.

Wie (j) beweist man

$$\text{(o)} \qquad \mathbf{0} < \mathbf{x} \le \mathbf{y} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x} \odot \mathbf{z} \;\le\; \mathbf{y} \odot \mathbf{z} ,$$

und hieraus folgt $\mathbf{x}' \odot \mathbf{y} \le \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$. Um nun $\mathbf{x}' \odot \mathbf{y} \underset{\not\sim}{<} \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ auszuschließen, nehmen wir nach (k) an, es gäbe ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$(\mathbf{x}' \odot \mathbf{y}) \oplus \iota_r \;\le\; \mathbf{x} \odot \mathbf{y} \; . \tag{4}$$

Es gibt ein N mit $T_j\mathbf{y} < y_0 + 1 \le 2^N$ für alle j, und hieraus folgt $\mathbf{y} \le 2^N$. Wähle nun $n > r + N$. Mit Hilfe von (l) und (o) ergibt sich dann

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \le (\mathbf{x}' \oplus \iota_n) \odot \mathbf{y} = (\mathbf{x}' \odot \mathbf{y}) \oplus (\iota_n \odot \mathbf{y}) \le (\mathbf{x}' \odot \mathbf{y}) \oplus (\iota_n \cdot 2^N) \; .$$

Dies steht wegen $2^N \iota_n < \iota_r$ im Widerspruch zu (4).

Wir kommen zu den Inversen. Sowohl das additive wie das mutiplikative Inverse sind in $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt: Gilt $\mathbf{y}_1 \oplus \mathbf{x}_1 \sim \mathbf{0}$ und $\mathbf{y}_2 \oplus \mathbf{x}_2 \sim \mathbf{0}$ und ist $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2$, so folgt nach dem schon Bewiesenen:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{0} \sim \mathbf{y}_1 \oplus \mathbf{x}_2 \oplus \mathbf{y}_2 \sim \mathbf{y}_1 \oplus \mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{y}_2 \sim \mathbf{0} + \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2 ,$$

und analog schließt man für das multiplikative Inverse.

Das additive Inverse eines beliebigen Dualbruchs $\mathbf{x} = x_0 \,.\, x_1\, x_2\, x_3 \ldots \in X$ lässt sich explizit angeben: Definiert man die Folge $\mathbf{y} = y_0 \,.\, y_1\, y_2\, y_3 \ldots \in X$ durch

$$y_0 := -x_0 - 1 , \qquad y_k := 1 - x_k \quad (k \ge 1) ,$$

so gibt es bei der Addition von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wegen $x_k + y_k = 1 \ \ (k \geq 1)$ keine Stellenüberträge; folglich erhält man ohne Weiteres

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = -1\,.\,1111\ldots \ \sim \mathbf{0}\ .$$

Hiernach ist $\mathbf{y}$ das additive Inverse von $\mathbf{x}$ und darf mit $-\mathbf{x}$ bezeichnet werden. Es gelten die Regeln $-(-\mathbf{x}) \sim \mathbf{x}$ und $-(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \sim (-\mathbf{x}) \oplus (-\mathbf{y})$.

Das multiplikative Inverse erhalten wir mit Hilfe des in Beispiel 1 angedeuteten Divisionsalgorithmus, wobei wir allerdings unendlichstellige Divisoren vorsehen müssen. Es sei also ein $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ gegeben, dessen Kehrwert konstruiert werden soll. Die Zahl $\mathbf{a}$ kann nicht beliebig klein sein: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $T_n\mathbf{a} \geq \iota_m$ für alle $n \geq m$. Betrachte jetzt die Mengen

$$Q_n := \bigl\{\mathbf{x} \in \mathbb{D}_n \bigm| (T_n\mathbf{a} + \iota_n) \cdot \mathbf{x} \leq 1\bigr\} \qquad (n \geq m)\ .$$

Für alle $\mathbf{x} \in Q_n$ gilt $\iota_m \cdot \mathbf{x} \leq (T_n\mathbf{a} + \iota_n) \cdot \mathbf{x} \leq 1$ und folglich $\mathbf{x} \leq 2^m$. Wegen $\mathbb{D}_n \subset \mathbb{D}_{n+1}$ und

$$T_{n+1}\mathbf{a} + \iota_{n+1} \leq T_n\mathbf{a} + \iota_{n+1} + \iota_{n+1} = T_n\mathbf{a} + \iota_n$$

hat man die Inklusionen $Q_n \subset Q_{n+1}$ $(n \geq m)$. Die Folge

$$n \mapsto \mathbf{q}_n := \max(Q_n) \in \mathbb{D}_n \qquad (n \geq m)$$

ist daher monoton wachsend und nach oben beschränkt durch 2^m. Nach Satz **(2.9)** existiert somit der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}_n =: \mathbf{q}$. Wir behaupten: Dieser Grenzwert ist der gesuchte Kehrwert von $\mathbf{a}$, das heisst, es gilt $\mathbf{q} \odot \mathbf{a} \sim \mathbf{1}$.

⌜ Betrachte ein festes $n \geq 0$. Nach (m) gibt es ein j und ein $l \geq j$ mit

$$T_n(\mathbf{q} \odot \mathbf{a}) \leq T_j\mathbf{q} \cdot T_j\mathbf{a} = T_j\mathbf{q}_l \cdot T_j\mathbf{a} \leq T_l\mathbf{q}_l \cdot T_l\mathbf{a} = \mathbf{q}_l \cdot T_l\mathbf{a} \leq 1\ .$$

Da dies für jedes n zutrifft, folgt $\mathbf{q} \odot \mathbf{a} \leq \mathbf{1}$.

Es gibt ein N mit $2^m + a_0 + 2 \leq 2^N$. Um nun $\mathbf{q} \odot \mathbf{a} \lnsim \mathbf{1}$ auszuschliessen, nehmen wir nach (k) an, es gäbe ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$(\mathbf{q} \odot \mathbf{a}) \oplus \iota_r \leq \mathbf{1}\ . \tag{5}$$

Nach Konstruktion von $\mathbf{q}_n$ gilt aber für jedes $n \geq m$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} 1 &< (\mathbf{q}_n + \iota_n)(T_n\mathbf{a} + \iota_n) = T_n\mathbf{q}_n \cdot T_n\mathbf{a} + \iota_n(\mathbf{q}_n + T_n\mathbf{a} + \iota_n) \\ &\leq T_n\mathbf{q} \cdot T_n\mathbf{a} + 2^N\iota_n \leq (\mathbf{q} \odot \mathbf{a}) \oplus 2^N\iota_n\ . \end{aligned}$$

Dies steht für $n > r + N$ im Widerspruch zu (5). ⌟

Damit verbleibt als einzige Restanz die Ausdehnung der Multiplikation auf Faktoren $\mathbf{x} \le \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \le \mathbf{0}$. Gestützt auf die Regel

$$\mathbf{x} \lnsim \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (-\mathbf{x}) > \mathbf{0}$$

definieren wir

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \ := \begin{cases} \mathbf{0} & (\mathbf{x} \sim \mathbf{0} \ \vee \ \mathbf{y} \sim \mathbf{0})\,, \\ -\big((-\mathbf{x}) \odot \mathbf{y}\big) & (\mathbf{x} \lnsim \mathbf{0} \ \wedge \ \mathbf{y} > \mathbf{0})\,, \\ -\big(\mathbf{x} \odot (-\mathbf{y})\big) & (\mathbf{x} > \mathbf{0} \ \wedge \ \mathbf{y} \lnsim \mathbf{0})\,, \\ (-\mathbf{x}) \odot (-\mathbf{y}) & (\mathbf{x} \lnsim \mathbf{0} \ \wedge \ \mathbf{y} \lnsim \mathbf{0})\,. \end{cases}$$

Wie man sich leicht überlegt, sind damit Kommutativität, Assoziativität sowie die Regel

$$(-\mathbf{x}) \odot \mathbf{y} \ \sim \ -(\mathbf{x} \odot \mathbf{y})$$

auf ganz $\mathbb{R}$ sichergestellt, ebenso die Distributivität (n), mit $\sim$ an Stelle des Gleichheitszeichens, falls $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ dasselbe Vorzeichen haben oder eine der beteiligten Variablen $\sim\mathbf{0}$ ist. Damit verbleibt der Fall $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \lnsim \mathbf{0}$. Ist dabei $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \sim \mathbf{0}$, also $\mathbf{z} \sim (-\mathbf{y})$, so ist einerseits $\mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \sim \mathbf{0}$ und anderseits auch

$$(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \oplus (\mathbf{x} \odot \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \oplus \big(-(\mathbf{x} \odot \mathbf{y})\big) \sim \mathbf{0}\ .$$

Ist $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} > \mathbf{0}$, so hat man

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) &\sim \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \oplus \mathbf{x} \odot (-\mathbf{z}) \oplus \mathbf{x} \odot \mathbf{z} \\ &\qquad \sim \mathbf{x} \odot \big(\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \oplus (-\mathbf{z})\big) + \mathbf{x} \odot \mathbf{z} \sim (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \oplus (\mathbf{x} \odot \mathbf{z})\,, \end{aligned}$$

und analog schließt man im Fall $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \lnsim \mathbf{0}$.

Damit ist das System $\mathbb{R}$ in allen Punkten als geordneter Körper etabliert, und es gelten in $\mathbb{R}$ sowohl sämtliche "Regeln der Algebra" wie die "Regeln über das Rechnen mit Ungleichungen". Wir können daher die speziellen Notationen dieses Abschnitts wieder aufheben: Die reellen Zahlen erscheinen im Weiteren nicht mehr als unendliche Folgen $\mathbf{x}$; sondern wir betrachten sie als abstrakte Individuen x, zwischen denen gewisse Bindungen bestehen. Auf die Operationszeichen $\oplus$ und $\odot$ können wir fürderhin verzichten, und an Stelle von $\mathbf{x} \lnsim \mathbf{y}$ schreiben wir ganz einfach $x < y$.

Vollständigkeit

④ In $\mathbb{R}$ gibt es die Zahl $\sqrt{2}$. Zum Beweis argumentieren wir ähnlich wie bei der Konstruktion des Kehrwerts. Betrachte die Mengen

$$Q_n := \bigl\{\mathbf{x} \in \mathbb{D}_n \bigm| x > 0,\ x \cdot x \le 2\bigr\} \qquad (n \ge 0)\ .$$

Für alle $x \in Q_n$ gilt $x \le 2$, und für alle $n \ge 0$ ist $Q_n \subset Q_{n+1}$. Die Folge

$$n \mapsto q_n := \max(Q_n) \in \mathbb{D}_n \qquad (n \ge 0)$$

ist daher monoton wachsend und beschränkt, besitzt also nach Satz **(2.9)** einen Grenzwert $q \in X$. Wir behaupten: Es gilt $q \cdot q = 2$.

⌜ Betrachte ein festes $n \ge 0$. Nach (m) gibt es ein j und ein $l \ge j$ mit

$$T_n(q \cdot q) \le T_j q \cdot T_j q = T_j q_l \cdot T_j q_l \le T_l q_l \cdot T_l q_l = q_l \cdot q_l \le 2\ .$$

Da dies für jedes n zutrifft, folgt $q \cdot q \le 2$.
Um nun $q \cdot q < 2$ auszuschließen, nehmen wir nach (k) an, es gäbe ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$(q \cdot q) + \iota_r \le 2\,. \tag{6}$$

Nach Konstruktion von q_n gilt aber für jedes $n \ge 0$ die Abschätzung

$$2 < (q_n + \iota_n)(q_n + \iota_n) \le (q \cdot q) + \iota_n(2q_n + \iota_n) \le (q \cdot q) + 5\iota_n\ .$$

Dies steht für $n > r + 3$ im Widerspruch zu (6). ⌟

○

Damit wir nicht für jede Zahl, die wir gerne hätten, ein derartiges Kunststück vorführen müssen, benötigen wir allgemeine Prinzipien, die unter leicht zu verifizierenden Bedingungen die Existenz des angepeilten Objektes, zum Beispiel der n-ten Wurzel aus einer beliebigen reellen Zahl $c \ge 0$, garantieren. Der folgende Satz wird uns zu einem ersten derartigen Prinzip verhelfen:

(2.19) *Die Gesamtheit der reellen Zahlen sei auf irgend eine Weise in eine* **Untermenge** A *und eine* **Obermenge** B *zerlegt, d.h., es sei*

$$\mathbb{R} = A \cup B\,, \quad A \ne \emptyset\,, \quad B \ne \emptyset\,; \qquad a < b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B\ .$$

Dann gibt es eine wohlbestimmte Zahl $s \in \mathbb{R}$ *mit*

$$x < s \ \Rightarrow\ x \in A\,, \quad x > s \ \Rightarrow\ x \in B \qquad (x \in \mathbb{R})\ . \tag{7}$$

Die Zahl s selbst gehört *entweder* der Untermenge *oder* der Obermenge an; jedenfalls **erzeugt** s den **Schnitt** (A, B) von $\mathbb{R}$. Der in **(2.19)** beschriebene Sachverhalt wird als **Ordnungsvollständigkeit** der Menge $\mathbb{R}$ bezeichnet.

⌜ Es kann höchstens ein derartiges s geben. — Die Menge $Q_n := \mathbb{D}_n \cap A$ ist nach oben beschränkt durch jegliches $b \in B$; ferner gilt $Q_n \subset Q_{n+1}$ für alle $n \geq 0$. Hiernach ist

$$n \mapsto s_n := \max(Q_n) \qquad (n \geq 0)$$

eine monoton wachsende und beschränkte Folge von reellen Zahlen. Nach **(2.9)** existiert damit der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n =: s \in \mathbb{R}$, und wir behaupten, dass s die Eigenschaft (7) besitzt.

Betrachte ein beliebiges $x < s$. Wäre $x \in B$, so hätte man $s_n \leq x$ für alle n und folglich nach (g) auch $s \leq x$, was sich mit $x < s$ nicht verträgt.

Betrachte jetzt ein $x > s$. Nach **(2.8)** gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ und ein $v \in \mathbb{D}_r$ mit $s < v \leq x$. Wäre $v \in A$, so hätte man $v \leq s_r \leq s$. Folglich ist $v \in B$ und damit auch $x \in B$. ⌟

5 Die Menge $\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig.

⌜ Die beiden Mengen

$$A := \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\right\}, \qquad B := \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\right\}$$

zerlegen $\mathbb{Q}$ wie verlangt in eine Untermenge und eine Obermenge; aber es gibt keine Zahl $s \in \mathbb{Q}$, die diesen Schnitt erzeugt: Ein derartiges s wäre jedenfalls $\neq \sqrt{2}$, also zum Beispiel $< \sqrt{2}$. Nach Satz **(2.8)** gäbe es dann ein $v \in \mathbb{D}$ mit $s < v < \sqrt{2}$. Dieses v gehörte weder zu A noch zu B — ein Widerspruch. ⌟

○

Man kann zeigen, dass das System $\mathbb{R}$ durch den einen Satz

(R) *Die reellen Zahlen bilden einen ordnungsvollständigen geordneten Körper*

vollständig charakterisiert wird. Das heisst: Jede Konstruktion eines derartigen Körpers, ob mit Dualbrüchen, Dezimalbrüchen, Schnitten, Intervallschachtelungen oder Fundamentalfolgen (Cauchy-Folgen), liefert letzten Endes dasselbe System.

Aufgaben

1. Es sei $\tau \in \mathbb{R}$ eine irrationale Zahl. Untersuche, unter welchen Bedingungen über a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ die Zahl
$$\lambda := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$
rational ist.
2. Bestimme die ersten 15 Stellen der Dualbruchentwicklung von π.
3. Betrachte zwei Folgen $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$, die den folgenden Bedingungen genügen:
$$x_0 = y_0 = 0\,, \quad x_k = y_k = 1 \ (k = 2^m,\ m \geq 0)\,, \quad x_k + y_k = 1 \ (\text{sonst}).$$
   (a) Bestimme $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$ als Element von X.
   (b) Wieviele Stellen von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ müssen zur Berechnung von $T_{20}(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y})$ herangezogen werden? In anderen Worten: Bestimme j_{20} !
4. Verifiziere das Distributivgesetz (n) im Fall $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, $\mathbf{z} > \mathbf{0}$.
5. Beweise $\bigl($vgl. Beispiel ④$\bigr)$: In $\mathbb{R}$ gibt es beliebige Wurzeln
$$\sqrt[q]{a} \qquad \bigl(a,\ q \in \{2, 3, 4, \ldots\}\bigr)\ .$$
6. Zeige: Ist (A, B) ein Schnitt von $\mathbb{R}$, so besitzt *entweder* A ein maximales Element *oder* B ein minimales Element.
7. Betrachte den Bereich $B := \bigl\{(x, y) \bigm| x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1\bigr\}$ sowie die Mengen
$$Q_n := B \cap (\mathbb{D}_n \times \mathbb{D}_n) \qquad (n \geq 1)\ .$$
   Zeige: Die Folge
$$n \ \mapsto \ s_n := \frac{\#Q_n}{4^n} \qquad (n \geq 1)$$
   ($\#Q_n$ bezeichnet die Anzahl der Elemente von Q_n) ist monoton wachsend und beschränkt. Identifiziere die Zahl $\lim_{n\to\infty} s_n$.

2.4 Supremum und Infimum

Maximum vs. Supremum

Im folgenden geht es um die “Extremalpunkte” von irgendwelchen Mengen $A \subset \mathbb{R}$.

Es sei A eine ganz beliebige nichtleere Menge von reellen Zahlen. Gibt es ein $s \in A$ mit $s \geq x$ für alle $x \in A$, so ist s das **maximale Element** von A und wird mit $\max A$ bezeichnet. Analog ist das **minimale Element** $\min A$ erklärt, so vorhanden.

Aus den Ordnungsaxiomen ergibt sich mit vollständiger Induktion, dass jede *endliche* Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ sowohl ein maximales wie ein minimales Element enthält. *Unendliche* Mengen können sich erstens unbeschränkt über $\mathbb{R}$ ausbreiten, und auch wenn sie beschränkt sind, brauchen sie kein maximales Element zu enthalten.

Bsp: $\quad B := \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{99}{100}, \ldots\}$.

Eine Menge A von reellen Zahlen ist **beschränkt**, wenn es eine Zahl M gibt mit $|x| \leq M$ für alle $x \in A$; die Menge A ist **nach oben beschränkt**, wenn es ein M gibt mit $x \leq M$ für alle $x \in A$. Ein derartiges M heisst eine **Schranke** bzw. eine **obere Schranke** für die Menge A. Gibt es kein solches M, so ist die Menge A **unbeschränkt** bzw. **nach oben unbeschränkt**.

Besitzt A ein maximales Element s, so ist s die “optimale”, das heisst, die kleinste obere Schranke von A. Gibt es in A kein maximales Element, so müsste die “optimale” obere Schranke “unmittelbar rechts” von A liegen. Damit kommen wir zur Hauptdefinition dieses Abschnitts:

Das **Supremum** $\sup A \quad (=: \sigma)$ einer nach oben beschränkten Menge A ist folgendermassen charakterisiert (Fig. 2.4.1): In A gibt es keine Zahlen $a > \sigma$; aber für jede links von σ gesetzte Marke $\sigma' := \sigma - \varepsilon,\ \varepsilon > 0$, gibt es wenigstens ein $a \in A$ mit $a > \sigma'$. In anderen Worten: Das Supremum wird innerhalb A beliebig genau erreicht, vielleicht sogar angenommen, aber sicher nicht überschossen. Jedenfalls ist das Supremum die **kleinste obere Schranke** der Menge A. — Die Menge B des obigen Beispiels besitzt offensichtlich das Supremum 1.

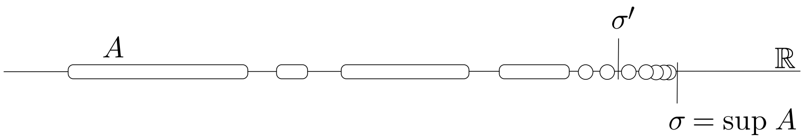

Fig. 2.4.1

Analog definiert man das **Infimum** $\inf A \quad (=: \rho)$ einer nach unten beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}$: In A gibt es keine Zahlen $< \rho$; aber für jede rechts von

ρ gesetzte Marke ρ' gibt es wenigstens ein $a \in A$ mit $a < \rho'$. Das Infimum ist die **grösste untere Schranke** der Menge A. — Die Menge B des obigen Beispiels besitzt ein minimales Element; dieses ist dann auch das Infimum dieser Menge.

Es ist ein Ausdruck der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass jede beschränkte Menge A von reellen Zahlen ein Supremum $\sup A \in \mathbb{R}$ besitzt. Genau:

(2.20) *Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein wohlbestimmtes Supremum $\sup A \in \mathbb{R}$, und jede nichtleere nach unten beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein wohlbestimmtes Infimum $\inf A \in \mathbb{R}$.*

⌜ Aus Symmetriegründen genügt es, über das Supremum zu argumentieren. Es kann höchstens *eine* kleinste obere Schranke geben: Von zwei verschiedenen oberen Schranken ist stets eine kleiner. — Um nun die Existenz des Supremums nachzuweisen, definieren wir einen Schnitt (R, S) von $\mathbb{R}$ wie folgt:

$$R := \{r \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A: \ a > r\} \qquad S := \{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A: \ a \leq s\} .$$

In Worten: R ist die Menge aller Zahlen r, die von mindestens einem $a \in A$ überschossen werden, und S ist die Menge der oberen Schranken von A. Damit gilt $r < s$ für alle $r \in R$, $s \in S$, und es ist $R \cup S = \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gibt es ein $a \in A$, folglich liegt jedenfalls $a - 1$ in R, und da A nach oben beschränkt ist, ist auch S nichtleer. Das Paar (R, S) ist damit als Schnitt von $\mathbb{R}$ erwiesen.

Nach **(2.19)** gibt es ein $\sigma \in \mathbb{R}$, das diesen Schnitt erzeugt. Wäre $\sigma \in R$, so gäbe es ein $a \in A$ mit $a > \sigma$. Die Zahl $\sigma' := (\sigma + a)/2$ wäre dann gleichzeitig $< a$, also in R, und $> \sigma$, also in S, was nicht geht. Somit ist $\sigma \in S$, und σ ist die kleinste obere Schranke von A. ⌟

① In einer "rationalen Welt" ist die zu **(2.20)** analoge Aussage falsch, das heisst: Eine nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{Q}$ braucht kein Supremum $\sigma \in \mathbb{Q}$ zu besitzen. Zum Beweis betrachten wir wieder die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$$

(siehe Beispiel 2.3.⑤). Eine Zahl $r < \sqrt{2}$ ist nach Satz **(2.16)** nicht obere Schranke von A, und eine Zahl $r > \sqrt{2}$ ist nach demselben Satz nicht die kleinste obere Schranke von A. — Als Teilmenge von $\mathbb{R}$ aufgefasst besitzt A ein Supremum; nach dem Vorangehenden kommt dafür nur $\sqrt{2}$ in Frage. ○

Ist eine nichtleere Menge A von reellen Zahlen nach oben unbeschränkt, so wird $\sup A := \infty$ gesetzt. Damit bleibt es dabei, dass jede links von $\sup A$ gesetzte Marke σ' von wenigstens einem $x \in A$ überschossen wird. Analog besitzt eine nach unten unbeschränkte Menge definitionsgemäss das Infimum $\inf A := -\infty$. (Über die beiden Zusatzpunkte $\pm\infty$ wirden wir in Abschnitt 3.4, im Zusammenhang mit "uneigentlichen Grenzwerten", noch ausführlicher sprechen.)

Setzt man noch Spasses halber $\sup\emptyset := -\infty,\ \inf\emptyset := \infty$, so sind die Funktionen sup und inf auf der ganzen Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiert.

Intervalle

Zur Einübung von inf und sup behandeln wir hier den Intervallbegriff. Intervalle sind "natürliche" Definitionsbereiche von Funktionen *einer* reellen Variablen. Sie lassen sich durch folgende Eigenschaft charakterisieren: Ein **Intervall** ist eine nichtleere Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$, die mit je zwei Zahlen auch alle dazwischenliegenden Zahlen enthält, in Zeichen:

$$\text{(I)} \qquad x_1, x_2 \in I \quad \wedge \quad x_1 < y < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad y \in I\ .$$

Jedes Intervall I besitzt ein wohlbestimmtes Infimum $\inf I\ \ (\geq -\infty)$ und ein Supremum $\sup I\ \ (\leq \infty)$; dies sind die beiden **Endpunkte** von I. Der folgende Satz zeigt, dass ein Intervall I durch seine Endpunkte im wesentlichen bestimmt ist. Wir benützen die Gelegenheit, die allgemein übliche Notation für Intervalle einzuführen.

(2.21) *Es seien I ein Intervall und*

$$\alpha := \inf I \geq -\infty\ , \qquad \beta := \sup I \leq \infty$$

die Endpunkte von I. Dann ist I eine der vier folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} [\,\alpha,\beta\,] &:= \bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| \alpha \leq x \leq \beta\bigr\}\ , \\ ]\,\alpha,\beta\,] &:= \bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| \alpha < x \leq \beta\bigr\}\ , \\ [\,\alpha,\beta\,[&:= \bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| \alpha \leq x < \beta\bigr\}\ , \\ ]\,\alpha,\beta\,[&:= \bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| \alpha < x < \beta\bigr\}\ . \end{aligned}$$

⌜ Aus kombinatorischen Gründen genügt es, die Inklusionen

$$]\,\alpha,\beta\,[\ \subset\ I\ \subset\ [\,\alpha,\beta\,]$$

zu beweisen. Die rechte Inklusion ist trivial. Für die linke Inklusion betrachten wir ein beliebiges $y \in\,]\,\alpha,\beta\,[$. Wegen $\alpha < y < \beta$ gibt es nach Definition von α und von β (auch in den Fällen $\alpha = -\infty$ oder $\beta = \infty$) ein $x_1 \in I$ mit $x_1 < y$ und ein $x_2 \in I$ mit $x_2 > y$. Hieraus folgt $y \in I$ wegen (I). ⌟

Ein beschränktes Intervall wird auch **endlich** genannt. Ein endliches Intervall mit den Endpunkten α und β, $\alpha \leq \beta$, besitzt die **Länge** $\beta - \alpha \quad (\geq 0)$. Das Intervall I heisst **abgeschlossen**, wenn es alle im Endlichen gelegenen Endpunkte (0, 1 oder 2) enthält, **offen**, wenn es diese Endpunkte nicht enthält. Ein endliches Intervall, das nur einen seiner beiden Endpunkte enthält, heisst **halboffen**.

Als Variable für irgendwelche Intervalle verwenden wir weiterhin den Buchstaben I, als Variable für abgeschlossene endliche Intervalle $[\,\alpha, \beta\,]$ den Buchstaben Q; dabei haben wir an einen (eindimensionalen) Quader gedacht. Für die offene und die abgeschlosssene **positive Halbachse** benützen wir gelegentlich die folgenden selbsterklärenden Bezeichnungen:

$$]\,0, \infty\,[=: \mathbb{R}_{>0} \,, \qquad [\,0, \infty\,[=: \mathbb{R}_{\geq 0} \ .$$

Aufgaben

1. Bestimme Infimum und Supremum der folgenden Mengen. Welche dieser Mengen besitzen ein minimales oder ein maximales Element?
   (a) $\left\{ \dfrac{|x|}{1+|x|} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$, (b) $\left\{ \dfrac{x}{1+x} \;\middle|\; x > -1 \right\}$,
   (c) $\left\{ x + \dfrac{1}{x} \;\middle|\; \dfrac{1}{2} < x < 2 \right\}$,
   (d) $\big\{ x \in \mathbb{R} \;\big|\; \exists y \in \mathbb{R} :\ (x+1)^2 + 5y^2 < 4 \big\}$.
2. Für ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ wird eine Folge $a_.$ rekursiv wie folgt definiert:
   $$a_0 := 1 \,, \quad a_1 := \lambda \,, \qquad a_k := 2a_{k-1} - a_{k-2} \quad (k \geq 2) \ .$$
   (a) Finde eine explizite Formel für a_k.
   (b) Bestimme Infimum und Supremum der Menge $A := \big\{ a_k \;\big|\; k \in \mathbb{N} \big\}$ in Abhängigkeit von λ.
3. Es sei $\big(A_\iota\big)_{\iota \in I}$ eine nichtleere Familie von nichtleeren Mengen $A_\iota \subset \mathbb{R}$, und es sei $A := \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$. Dann gilt für die zugehörigen Suprema $s_\iota := \sup A_\iota$ und $s := \sup A$ die Beziehung
   $$s = \sup\big\{ s_\iota \;\big|\; \iota \in I \big\} \ .$$

2.5 Abzählbarkeit

Im Anschluss an die Erweiterung von $\mathbb{D}$ bzw. $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ schalten wir hier einige Bemerkungen über die Mächtigkeit von unendlichen Mengen ein. Cantor, der Begründer der Mengenlehre, hat als erster bemerkt, dass "unendlich" nicht einfach "unendlich" ist.

Abzählbare Mengen

Eine Menge A von irgendwelchen Objekten heisst **abzählbar unendlich**, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\phi : \quad \mathbb{N} \to A \qquad k \mapsto \phi(k) =: a_k$$

gibt. Diese Abbildung stellt eine Liste aller Elemente von A her; wir wollen sie daher als **Aufzählung** der Menge A bezeichnen. Die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : A \to \mathbb{N}$ weist jedem $a \in A$ seine wohlbestimmte Nummer $\phi^{-1}(a) \in \mathbb{N}$ zu und stellt daher eine **Abzählung** (oder **Nummerierung**) der Elemente von A dar. Für "endlich oder abzählbar unendlich" sagt man kurz **abzählbar**.

① Die drei Mengen $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sind abzählbar unendlich. Eine Aufzählung von $\mathbb{Z}$ wird zum Beispiel durch die Funktion

$$\phi(k) := \frac{1}{4}\bigl((-1)^k(2k+1) \; - 1\bigr)$$

bewerkstelligt, die für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ nacheinander die Zahlen 0, -1, 1, -2, 2, -3, $\ldots$ produziert. Die Mengen der geraden natürlichen Zahlen, der natürlichen Zahlen und der ganzen Zahlen sind also "gleichmächtig", obwohl jede von ihnen scheinbar doppelt soviele Elemente enthält wie die vorangehende. Diese Paradoxie tritt bei endlichen Mengen nicht auf. ○

Die Mächtigkeit von Mengen (Anzahl der Elemente bei endlichen Mengen, "abzählbar unendlich", $\ldots$) ist invariant gegenüber bijektiven Abbildungen. Ist zum Beispiel die Menge A abzählbar unendlich und $\psi : A \to B$ eine bijektive Abbildung, so ist auch die Menge B abzählbar unendlich. — Weniger trivial ist der folgende Satz:

(2.22) *Jede Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ ist entweder endlich oder abzählbar unendlich.*

⌜ Entweder ist A beschränkt, oder es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k \in A$ mit $k > n$. Im ersten Fall ist A endlich (wir unterdrücken die Einzelheiten). Im zweiten Fall können wir rekursiv eine Funktion $\phi : \mathbb{N} \to A$ definieren durch

$$\phi(0) := \min A\,, \qquad \phi(n+1) := \min\bigl\{k \in A \bigm| k > \phi(n)\bigr\} \quad (n \geq 0)\,,$$

wobei die Annahme über A garantiert, dass die Rekursion nicht abbricht. Für alle n gilt $\phi(n) \in A$ und vor allem

$$\phi(n+1) > \phi(n) \qquad \text{bzw.} \qquad \phi(n+1) \geq \phi(n) + 1 \; .$$

Mit vollständiger Induktion folgt hieraus

$$\phi(n+p) \geq \phi(n) + p \qquad (p > 0) \; ;$$

das heisst: ϕ ist injektiv, ferner gilt $\phi(n) \geq n$ für alle n. Um zu beweisen, dass jedes Element $a \in A$ durch ϕ tatsächlich produziert wird, halten wir a fest und setzen

$$n_0 := \min\bigl\{n \bigm| \phi(n) \geq a\bigr\}$$

$\bigl($die Menge rechter Hand ist nicht leer wegen $\phi(a) \geq a\bigr)$. Dann gilt

$$\phi(n_0 - 1) < a \leq \phi(n_0) \; ,$$

ausgenommen im Fall $n_0 = 0$, wo nur die rechte Ungleichung zutrifft. Hieraus folgt aber $\phi(n_0) = a$, denn sonst wäre $\phi(n_0)$ nicht das kleinste zur "Zeit" n_0 noch nicht produzierte Element von A.
Die Funktion $\phi : \mathbb{N} \to A$ ist also sowohl injektiv wie surjektiv und damit in der Tat eine Aufzählung von A. ⌟

Die dem Satz vorangestellte Bemerkung führt zu der folgenden allgemeineren Aussage:

(2.23) *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*

In Beispiel ① haben wir gesehen, dass "zwei mal abzählbar" immer noch abzählbar ist. Der folgende Satz zeigt, dass sogar "abzählbar mal abzählbar" nicht aus der Abzählbarkeit herausführt:

(2.24) *Die Menge* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

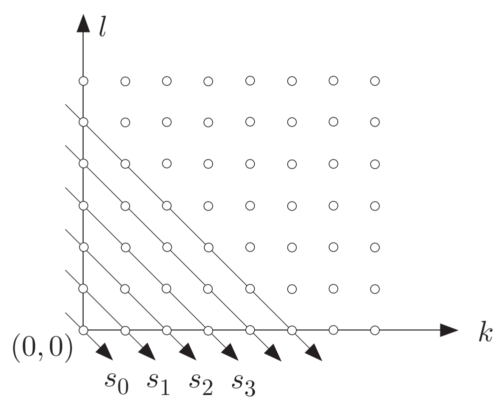

Fig. 2.5.1

⌜ Die Figur 2.5.1 zeigt, wie die Elemente von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tatsächlich eins nach dem anderen nummeriert werden können. Der Leser mag sich selbst davon überzeugen, dass die Funktion $\psi := \phi^{-1}$, die für jedes Zahlenpaar $(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ die zugehörige Nummer festlegt, wie folgt explizit angegeben werden kann:

$$\psi(k,l) = \frac{(k+l)(k+l+1)}{2} + k\ .$$

Hinweis: Der Punkt (k,l) ist der $(k+1)$-te Punkt auf der Diagonalen s_r, $r := k+l$. Nach Durchlaufen der Diagonalen s_0, s_1, …, s_{r-1} hat man $1+2+3+\ldots+r = r(r+1)/2$ Nummern verbraucht. ⌟

(2.25) *Das kartesische Produkt zweier abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Für die Analysis hat das vor allem die folgende Konsequenz:

(2.26) *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

⌜ Jede rationale Zahl α besitzt eine wohlbestimmte Darstellung

$$\alpha = \frac{p}{q}\,, \qquad p\in\mathbb{Z}\,,\quad q\in\mathbb{N}^*\,,$$

mit minimalem q, und zwei verschiedene Zahlen α, $\beta\in\mathbb{Q}$ besitzen verschiedene solche Darstellungen. Damit haben wir eine injektive Abbildung

$$\psi:\quad \mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$$

definiert. Dieses ψ vermittelt eine bijektive Beziehung zwischen $\mathbb{Q}$ und einer Teilmenge der abzählbaren Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$; somit ist $\mathbb{Q}$ abzählbar. ⌟

② Es ist natürlich unmöglich, die rationalen Zahlen der Grösse nach zu nummerieren. Eine konkrete Abzählung von $\mathbb{Q}$ erhält man zum Beispiel, indem man aus der Folge

$$\begin{gathered}-\frac{1}{1},\frac{0}{1},\frac{1}{1},\ -\frac{4}{2},-\frac{3}{2},\ldots,\frac{0}{2},\ldots,\frac{3}{2},\frac{4}{2},\ -\frac{9}{3},\ldots,\frac{9}{3},\\ -\frac{q^2}{q},-\frac{q^2-1}{q},\ldots,-\frac{1}{q},\frac{0}{q},\frac{1}{q},\ldots,\frac{q^2-1}{q},\frac{q^2}{q},\ldots\end{gathered}$$

alle Zahlen herausstreicht, die schon weiter links aufgetreten sind. ○

Die für **(2.26)** benutzte Beweisidee liefert allgemein den folgenden Satz:

(2.27) *Die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar.*

⌜ (Skizze) Zu abzählbaren Mengen $A_i \quad (i \in \mathbb{N})$ gibt es injektive Funktionen

$$\psi_i : \quad A_i \to \mathbb{N}\,, \qquad x \mapsto \psi_i(x)\ .$$

Betrachte jetzt die Vereinigung

$$S := \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\ .$$

Jedes $x \in S$ liegt in wenigstens einem A_i und bestimmt damit *erstens* eine Zahl

$$i_{\min}(x) := \min\bigl\{i \in \mathbb{N} \bigm| x \in A_i\bigr\}\ .$$

Die Funktion $\psi_{i_{\min}(x)}$ weist *zweitens* dem x eine wohlbestimmte Nummer innerhalb der Menge $A_{i_{\min}(x)}$ zu, so dass wir insgesamt die Abbildung

$$\Psi : \quad S \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}\,, \qquad x \mapsto \bigl(i_{\min}(x),\, \psi_{i_{\min}(x)}(x)\bigr)$$

ansetzen können. Dieses Ψ ist injektiv und vermittelt damit eine bijektive Beziehung zwischen S und einer Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ⌟

Ein fundamentaler Satz der Mengenlehre

Nach diesen Erfahrungen wird der Leser mit Recht fragen, ob es überhaupt überabzählbare Mengen gibt. Die Antwort lautet: ja. Wir werden nämlich zeigen, dass es zu jeder Menge X eine “mächtigere” Menge, das heisst: eine Menge mit “echt” mehr Elementen, gibt, so dass der Mächtigkeit von Mengen nach oben keine Grenze gesetzt ist.

Das angekündigte Resultat ergibt sich aus dem folgenden fundamentalen Satz:

(2.28) *Es sei X eine beliebige Menge und*

$$\phi : \quad X \to \mathcal{P}(X) \qquad x \mapsto A_x$$

eine Funktion, die für jedes $x \in X$ eine Teilmenge $A_x \subset X$ festlegt. Dann ist ϕ nicht surjektiv.

⌜ Wir betrachten die Menge U derjenigen x, die nicht in “ihrem” A_x liegen:

$$U := \bigl\{x \in X \bigm| x \notin A_x\bigr\} \quad \in \mathcal{P}(X)\,,$$

und behaupten: Es gibt kein $x \in X$ mit $A_x = U$.

Jedes $x \in X$ liegt in "seinem" A_x oder eben nicht. Aus $x \in A_x$ folgt $x \notin U$, und aus $x \notin A_x$ folgt $x \in U$. Keins von beiden ist mit $A_x = U$ verträglich. ┘

Eine beliebige Menge A heisst **überabzählbar**, wenn es keine surjektive Abbildung $\phi\colon \mathbb{N} \to A$ gibt. Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist nach dem eben bewiesenen Satz überabzählbar. Für diesen Sachverhalt geben wir nun noch einen anschaulicheren Beweis (im Grunde ist es derselbe); es wird dann auch klarer werden, warum man in diesem Zusammenhang vom (Cantorschen) **Diagonalverfahren** spricht.

┌ Jede Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ lässt sich als Binärfolge

$$\mathbf{x}_A : \quad \mathbb{N} \to \mathbb{B}\,, \qquad k \mapsto \mathbf{x}_A(k) := \begin{cases} 1 & (k \in A) \\ 0 & (k \notin A) \end{cases}$$

codieren. Damit haben wir eine bijektive Beziehung zwischen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und der Menge $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ aller Binärfolgen hergestellt. Wir zeigen, dass $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist.

Wäre $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ abzählbar, so könnte man sich einen Computer vorstellen, der die sämtlichen Binärfolgen in unendlich langen Zeilen

$$\mathbf{x}_j := (x_{j.0}, x_{j.1}, x_{j.2}, \ldots) \qquad (j \geq 0)$$

nacheinander ausdruckt. Während der Computer an der Arbeit ist, betrachten wir die Hauptdiagonale der entstehenden Matrix $[x_{j.k}]$ und bilden eine besondere Folge $\mathbf{x}^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*, \ldots)$ gemäss der Vorschrift

$$x_k^* := \begin{cases} 0 & (x_{k.k} = 1) \\ 1 & (x_{k.k} = 0) \end{cases} .$$

Diese Folge wird vom Computer nicht produziert, denn sie unterscheidet sich von jeder ausgedruckten Folge an wenigstens einer Stelle. Eine Aufzählung von $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ kann daher nicht existieren. ┘

Für die Analysis ist natürlich das Folgende entscheidend:

(2.29) *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Es gibt also viel mehr irrationale Zahlen als rationale, oder, anders ausgedrückt: Die rationalen Zahlen bilden in $\mathbb{R}$ eine verschwindende Minderheit.

┌ Gemäss den Ausführungen in Abschnitt 2.3 stellt

$$\phi : \quad \mathbb{B}^{\mathbb{N}} \to [\,0,2\,]\,, \qquad \mathbf{x} \to x_0\,.\,x_1\,x_2x_3\ldots$$

eine surjektive Abbildung von $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ auf das reelle Intervall $[\,0,2\,]$ dar, wobei jede Zahl $\xi \in [\,0,2\,]$ höchstens zwei Urbilder besitzt. Wäre das Intervall $[\,0,2\,]$ abzählbar, müsste sich demnach auch $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ abzählen lassen, was oben als unmöglich erwiesen wurde. ┘

Aufgaben

1. Eine Folge $x.$ von natürlichen Zahlen heisse *zulässig*, wenn nur endlich viele x_k von 0 verschieden sind. Zeige: Die Menge der zulässigen Folgen von natürlichen Zahlen ist abzählbar. — Mit Hilfe von Primzahlpotenzen lässt sich übrigens eine Nummerierung dieser Folgen explizit angeben. Wie steht es mit der Menge *aller* Folgen von natürlichen Zahlen?

2. Im Beweis von Satz **(2.24)** wurde eine bijektive Abbildung $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ explizit angegeben. Leite Formeln her für die Umkehrabbildung $\psi^{-1} =: \phi$, die also für jedes $n \in \mathbb{N}$ den zugehörigen Gitterpunkt $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ produziert. *Hinweis:* Untersuche erst den Zusammenhang zwischen n und der Grösse $r := k + l$.

3. Von Calkin und Wilf stammt die folgende schöne Abzählung der positiven rationalen Zahlen:

   Mit $\frac{1}{1}$ an der Spitze (das ist die nullte Generation) wird nach dem Rekursionsschema
   $$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \frac{a}{b} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{a}{a+b} & & \frac{a+b}{b} \end{tikzcd}$$
   ein unendlicher binärer Baum generiert. Damit ist folgendes gemeint: Jeder hingeschriebene Bruch $\frac{a}{b}$ hat einen linken und einen rechten Nachfolger wie angegeben. Die n-te Generation enthält demnach 2^n Brüche.

   (a) Berechne die ersten vier Generationen dieses Baumes.
   (b) Zeige: Alle Brüche erscheinen in gekürzter Form.
   (c) Zeige: Kein Bruch erscheint mehr als einmal.
   (d) Zeige: Jede positive rationale Zahl $\frac{a}{b}$ kommt in dem Baum vor.

   Werden die in dem Baum erscheinenden Zahlen generationenweise nacheinander ausgelesen, erhält man eine Abzählung von $\mathbb{Q}_{>0}$.

4. Eine reelle Zahl ξ heisst *algebraisch*, wenn sie Lösung einer Gleichung
   $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,, \qquad a_n \neq 0,$$
   mit ganzzahligen Koeffizienten $a_k \quad (0 \leq k \leq n)$ ist. — Zeige: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar unendlich.

5. Konstruiere eine bijektive Abbildung der reellen Achse $\mathbb{R}$ auf
   (a) $\mathbb{R}^*$, (b) eine Kreislinie.

2.6 Komplexe Zahlen

Dieses Buch handelt in erster Linie von reeller Analysis. Trotzdem sollen hier gleich auch die komplexen Zahlen eingeführt werden, und zwar aus den folgenden Gründen: Zahlreiche Formeln und Sätze der Analysis gelten genauso im Komplexen wie im Reellen, ja, in noch viel allgemeinerem Zusammenhang, und wir möchten diese Sätze nicht auf jeder Stufe der Verallgemeinerung von neuem beweisen, sondern möglichst nur einmal. Zweitens werden uns die komplexen Zahlen bei der Einführung und Behandlung der trigonometrischen Funktionen zu Hilfe kommen und eine befriedigende, rein analytische Theorie dieser Funktionen ermöglichen. Diese Auffassung wird uns zum Beispiel auch dazu führen, die Lösungsfunktionen von linearen Differentialgleichungen (Schwingungsprobleme!) von Anfang an komplexwertig anzusetzen.

Konstruktion des Körpers $\mathbb{C}$

Die komplexen Zahlen bilden einen Körper $\mathbb{C}$, und zwar einen **Erweiterungskörper** von $\mathbb{R}$, das heisst: Die reellen Zahlen sind (mitsamt ihren Operationen und Unterstrukturen) in das System der komplexen Zahlen eingebaut. Zur Erweiterung von $\mathbb{R}$ wird man bekanntlich gedrängt durch die Tatsache, dass die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 = -1 \tag{1}$$

in $\mathbb{R}$ keine Lösung hat.

Wir stellen uns also vor, es sei K ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, in dem die Gleichung (1) lösbar ist: Es gibt ein Element $i \in K$ mit $i^2 = -1$. Dann ist jedenfalls $i \notin \mathbb{R}$. Auf Grund der Körperaxiome enthält K wenigstens alle “Zahlen” der Form

$$z := x + iy\,, \qquad x,\, y \in \mathbb{R}\;.$$

Dabei sind der **Realteil** $x =: \operatorname{Re} z$ und der **Imaginärteil** $y =: \operatorname{Im} z$ durch z eindeutig bestimmt: Aus $x + iy = u + iv$ folgt zunächst $y = v$, denn sonst hätte man

$$i = \frac{x-u}{v-y} \in \mathbb{R}\,,$$

und anschliessend $x = u$.

Es sei jetzt

$$C := \bigl\{x + iy \in K \bigm| x,\, y \in \mathbb{R}\bigr\}$$

die Menge der eben betrachteten z. Wir behaupten: Schon diese Teilmenge $C \subset K$ ist bezüglich der in K erklärten Operationen ein Körper.

$\ulcorner$ Es seien $z := x + iy$ und $w := u + iv$ zwei beliebige Elemente von C. Die in jedem Körper, also auch in K, geltenden Rechenregeln liefern folgende Werte für $z + w$, $-z$, $z \cdot w$ und $1/z$:

$$z + w = x + u + i(y + v)\,, \qquad -z = -x + i(-y)\,, \tag{2}$$

$$z \cdot w = xu + xiv + iyu + i^2yv$$

und somit wegen $i^2 = -1$:

$$z \cdot w = (xu - yv) + i(xv + yu)\,, \tag{3}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

und somit

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2} \tag{4}$$

— letzteres natürlich nur, falls $z \neq 0$, das heisst: $(x, y) \neq (0, 0)$ ist. Mit z, $w \in C$ sind also auch die "Zahlen" $z{+}w$, $-z$, $z{\cdot}w$ und $1/z$ von der Form $a{+}ib$ und damit in C. Die übrigen Körpereigenschaften vererben sich automatisch von K auf C. ⌟

Aus alledem lässt sich der folgende Schluss ziehen: Falls es überhaupt einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ gibt, in dem die Gleichung (1) lösbar ist, so gibt es einen kleinsten solchen Körper, und diese minimale Erweiterung ist ("bis auf Isomorphie") wohlbestimmt: Ihre Operationen sind notwendigerweise durch die Formeln (2), (3) und (4) mit denen von $\mathbb{R}$ verknüpft. Der so charakterisierte Körper heisst **Körper der komplexen Zahlen** und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Um die Existenz dieses Körpers wirklich nachzuweisen, präsentieren wir nun ein explizites "Modell", wobei wir uns natürlich von den Formeln (2)–(4) inspirieren lassen. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{R}^2 = \big\{(x, y) \bigm| x,\, y \in \mathbb{R}\big\}$ eine Addition durch

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

sowie eine Multiplikation durch

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$$

und bezeichnen das so erhaltene System mit K. Man rechnet in einigen Zeilen nach, dass diese beiden Operationen kommutativ und assoziativ sind, dass das Distributivgesetz gilt, ferner, dass das Paar $(0, 0)$ als Nullelement, das Paar $(1, 0)$ als Einselement wirkt und dass gilt:

$$-(x, y) = (-x, -y)$$
$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)\,,$$

letzteres natürlich nur, falls $(x, y) \neq (0, 0)$. Das System K ist somit ein Körper. Weiter enthält K als Teilmenge eine Kopie von $\mathbb{R}$, denn die speziellen

Paare $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, addieren und multiplizieren sich untereinander wie die entsprechenden reellen Zahlen, das heisst, es gilt

$$\begin{aligned} (x,0) + (u,0) &= (x+u,0)\ , \\ (x,0) \cdot (u,0) &= (x \cdot u, 0)\ . \end{aligned}$$

Endlich ist

$$(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0)\ .$$

Hiernach ist K ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, der ein Element i enthält, zum Beispiel $i := (0,1)$, mit $i^2 = -1$. Damit ist die Existenz des Körpers $\mathbb{C}$ bewiesen, und zwar ist das eben angegebene K gerade eine Realisierung von $\mathbb{C}$.

① Die komplexe Zahl $z := \left(\dfrac{8-i}{5+i}\right)^4$ soll in Real- und Imaginärteil zerlegt werden. — Zunächst ist

$$\frac{8-i}{5+i} = \frac{(8-i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{40 - 1 + i(-5-8)}{25+1} = \frac{1}{2}\,(3-i)\ .$$

Im weiteren dürfen wir die binomische Formel natürlich auch im Komplexen anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{16}\,(3-i)^4 = \frac{1}{16}\left(3^4 - 4 \cdot 3^3 i + 6 \cdot 3^2 i^2 - 4 \cdot 3 i^3 + i^4\right) \\ &= \frac{1}{16}\big(81 - 54 + 1 + i\,(-108 + 12)\big) = \frac{1}{4}\,(7 - 24i)\ . \end{aligned}$$

○

Elementare Eigenschaften von $\mathbb{C}$

Eine komplexe Zahl *ein* Ding und soll daher, wo immer möglich, mit *einem* Buchstaben, zum Beispiel mit z, bezeichnet werden. Zum Rechnen mit komplexen Zahlen verwendet man am besten die Notation $x + iy$; für geometrische Überlegungen ist es aber vorteilhafter, die komplexen Zahlen als Paare (x, y), das heisst: als Punkte einer Ebene, der sogenannten **Gaussschen Zahlenebene**, aufzufassen (Fig. 2.7.1). Die x-Achse entspricht dabei dem Grundkörper $\mathbb{R}$ und wird daher **reelle Achse** genannt, die y-Ache ist die **imaginäre Achse**.
Die Gleichung $z^2 + 1 = 0$, die die Zahl i "definiert", besitzt die beiden Lösungen i und $-i$. Das hat letzten Endes zur Folge, dass die Körperstruktur von $\mathbb{C}$ bezüglich der "Spiegelung" $i \mapsto -i$ symmetrisch ist. Ist $z = x + iy$, so heisst $\bar{z} := x - iy$ die zu z **konjugiert komplexe Zahl**; die beiden Punkte z und $\bar{z}$ liegen spiegelbildlich zur reellen Achse. Die **Konjugation**

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad z = x + iy \mapsto \bar{z} := x - iy$$

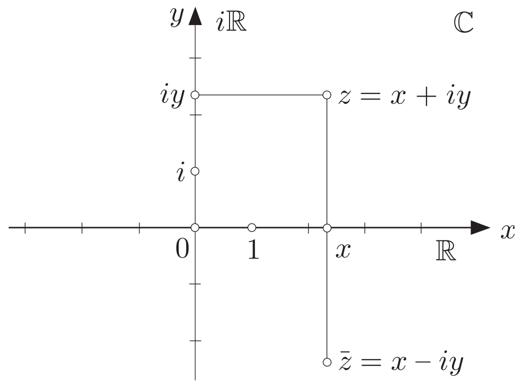

Fig. 2.6.1

genügt den folgenden Rechenregeln, deren Verifikation wir dem Leser überlassen:

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}\,, \qquad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}\,,$$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}\,, \qquad \bar{\bar{z}} = z\,,$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,, \qquad \overline{1/z} = 1/\bar{z}\,.$$

Für jede komplexe Zahl z ist

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

eine nichtnegative reelle Zahl und besitzt somit, wie wir später zeigen werden, eine wohlbestimmte nichtnegative reelle Quadratwurzel. Man nennt

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

den **absoluten Betrag** der Zahl z; geometrisch lässt sich $|z|$ als Abstand des Punktes z vom Ursprung interpretieren. Der absolute Betrag besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,,$$

$$z \in \mathbb{R} \implies |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}\,,$$

$$|\operatorname{Re} z| \le |z|\,, \qquad |\operatorname{Im} z| \le |z|\,,$$

$$|z| \ge 0\,, \qquad |z| = 0 \iff z = 0\,,$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad (\textbf{Dreiecksungleichung})\,.$$

⌜ Es gilt

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2\,;$$

und hieraus folgt die erste Regel durch Ziehen der Quadratwurzel. — Die zweite Formel besagt, dass die Betragsfunktion auf $\mathbb{C}$ eine Fortsetzung der auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ bereits vorhandenen Betragsfunktion darstellt. Ist $z := x \in \mathbb{R}$, so gilt $|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2} = |x| = |z|_{\mathbb{R}}$. — Der Rest ist klar, ausgenommen die Dreiecksungleichung, die im nächsten Abschnitt bewiesen wird. $\lrcorner$

Komplexe Zahlen z besitzen ausser der Zerlegung in Real- und Imaginärteil eine sogenannte **Polardarstellung**

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad \text{bzw.} \qquad z = re^{i\phi}\ .$$

Die Etablierung und Diskussion dieses Sachverhalts findet in Kapitel 6 statt.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit einer Bemerkung über algebraische Gleichungen. Anstoss zur Einführung der komplexen Zahlen war ja, die Lösbarkeit der Gleichung (1) zu erwirken. Es ist nun einigermassen überraschend, dass im Körper der komplexen Zahlen nicht nur diese spezielle, sondern überhaupt jede algebraische Gleichung eine Lösung besitzt. Es gilt nämlich der sogenannte **Fundamentalsatz der Algebra**:

(2.30) *Jedes Polynom*

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten a_k $(0 \leq k \leq n-1)$ besitzt wenigstens eine Nullstelle z_0 in $\mathbb{C}$.

Aus diesem Satz folgt weiter, dass sich jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ in n Linearfaktoren zerlegen lässt und somit genau n komplexe Nullstellen (mehrfache mehrfach gezählt) besitzt. Für $1 \leq n \leq 4$ gibt es klassische Lösungsformeln, wobei man aber für alle $n > 2$ mit numerischen Methoden besser fährt. Ein respektabler Teil der numerischen Mathematik handelt nämlich gerade von dem Problem, die Nullstellen eines gegebenen Polynoms mit vertretbarem Rechenaufwand so genau wie nötig zu bestimmen.

Wir werden auf den Satz **(2.30)** zurückkommen und ihn bei Gelegenheit auch beweisen.

Aufgaben

1. Zerlege die folgenden komplexen Zahlen in Real- und Imaginärteil:
   (a) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{2+i} + \dfrac{1}{3+i}\,,$ (b) $\dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i}\ .$
2. Es sei $c := a + ib$ eine gegebene komplexe Zahl. Bestimme die Real- und Imaginärteile der beiden Quadratwurzeln von c. (Gemeint sind die beiden Lösungen $z = x + iy$ der Gleichung $z^2 = c$.)

3. Durch $z \mapsto w := 1/z$ wird die *punktierte Ebene* $\big(:= \mathbb{C} \setminus \{0\}\big)$ in die w-Ebene abgebildet. Man zeichne die Bilder
   (a) der reellen Achse, (b) der imaginären Achse,
   (c) eines Kreises $|z| = r$, (d) der Geraden $\operatorname{Re} z = 1$.
4. Zeichne den Bereich $B := \big\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z^2 - 1| \le 1\big\}$. Beschreibe die Randkurve dieses Bereichs **(Lemniskate)** als geometrischen Ort.
5. Beweise: Das Dreieck Δ mit den Eckpunkten $0,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ besitzt den Flächeninhalt
$$\mu(\Delta) = \frac{1}{2}\big|\operatorname{Im}(z_1\overline{z_2})\big| \ .$$

2.7 Der n-dimensionale euklidische Raum

Spätere Teile dieses Buches handeln von mehrdimensionaler Analysis, zum Beispiel von krummen Bahnen oder Flächen im dreidimensionalen Raum. Aus bereits genannten Gründen wollen wir daher das Nötigste über den n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, schon hier zusammenstellen.

$\mathbb{R}^n$ ist definitionsgemäss die Menge aller n-Tupel $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von reellen Zahlen; ihre Elemente heissen auch **Punkte** oder **Vektoren**. Die einzelnen Einträge x_k $(1 \leq k \leq n)$ sind die **Koordinaten** des Vektors $\mathbf{x}$. Auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Addition erklärt durch

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \ .$$

Dieser **komponentenweisen Addition** der Vektoren entspricht geometrisch das bekannte Bild vom "Parallelogramm der Kräfte" (Fig. 2.7.1). Wir erwähnen diese Tatsache nur zur Unterstützung der Anschauung und verzichten auf einen Beweis.

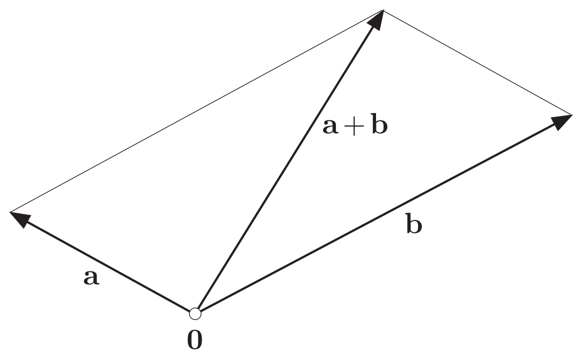

Fig. 2.7.1

Die Addition der Vektoren ist offensichtlich assoziativ und kommutativ, der **Nullvektor** $\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0)$ ist Neutralelement, und jeder Vektor $\mathbf{x}$ besitzt ein additives Inverses $-\mathbf{x} := (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$. Ist weiter λ eine beliebige reelle Zahl oder, wie man in diesem Zusammenhang auch sagt, ein **Skalar**, so ist das **λ-fache des Vektors $\mathbf{x}$** definiert durch

$$\lambda\mathbf{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \ .$$

Diese **äussere Verknüpfung** von Vektoren $\mathbf{x}$ mit Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ läuft geometrisch auf eine Streckung von $\mathbf{x}$ um den Faktor $|\lambda|$ und allfällige Spiegelung an $\mathbf{0}$ hinaus; sie genügt in Verbindung mit den übrigen Operationen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ den folgenden Axiomen bzw. Rechenregeln:

$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x} \ ,$$

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \ ,$$

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x} \ , \qquad 0\mathbf{x} = \mathbf{0} \ , \qquad (-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x} \ .$$

Alle diese Fakten besagen zusammengenommen: $\mathbb{R}^n$ ist ein **reeller Vektorraum** im Sinn der linearen Algebra.

Im $\mathbb{R}^n$ gibt es als weitere Verknüpfung das **Skalarprodukt**

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \ . \tag{1}$$

Das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist eine *reelle Zahl*; die geometrische Bedeutung dieser Zahl wird in Beispiel 6.6.① untersucht. Ist $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = 0$, so heisst das Paar $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ **orthogonal**. Als Funktion $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besitzt das Skalarprodukt die folgenden Eigenschaften:

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{x}\,,$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \bullet \mathbf{z} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{z} + \mathbf{y} \bullet \mathbf{z}\,,$$

$$(\lambda \mathbf{x}) \bullet \mathbf{y} = \lambda\,(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}) \ .$$

Diese Identitäten besagen zusammen: Das Skalarprodukt ist eine **symmetrische bilineare Funktion** von zwei Vektorvariablen. Mit Hilfe des Skalarprodukts definiert man den **absoluten Betrag** eines Vektors $\mathbf{x}$ durch

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,,$$

in Übereinstimmung mit elementargeometrischen Vorstellungen: $|\mathbf{x}|$ stellt den Abstand des Punktes $\mathbf{x}$ vom Ursprung dar, und $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ist der **euklidische Abstand** der beiden Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besitzt folgende Eigenschaften:

$$|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda|\,|\mathbf{x}|\,,$$

$$|\mathbf{x}| \geq 0\,, \qquad |\mathbf{x}| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}\,,$$

$$|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \qquad \textbf{(Schwarzsche Ungleichung)}\,, \tag{2}$$

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \qquad \textbf{(Dreiecksungleichung)}\,, \tag{3}$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|\,,$$

$$\big|\,|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|\,\big| \ \leq \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ . \tag{4}$$

⌜ Zum Beweis von (2) betrachten wir den Betrag des Hilfsvektors

$$\mathbf{z} := |\mathbf{x}|^2 \mathbf{y} - (\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})\mathbf{x} \ .$$

Nach den Rechenregeln für das Skalarprodukt ergibt sich

$$\begin{aligned}|\mathbf{z}|^2 &= (|\mathbf{x}|^2\mathbf{y} - (\mathbf{x}\bullet\mathbf{y})\mathbf{x})\bullet(|\mathbf{x}|^2\mathbf{y} - (\mathbf{x}\bullet\mathbf{y})\mathbf{x}) \\ &= |\mathbf{x}|^4(\mathbf{y}\bullet\mathbf{y}) - 2|\mathbf{x}|^2(\mathbf{x}\bullet\mathbf{y})\,(\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}) + (\mathbf{x}\bullet\mathbf{y})^2(\mathbf{x}\bullet\mathbf{x}) \\ &= |\mathbf{x}|^4|\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}|^2(\mathbf{x}\bullet\mathbf{y})^2 + |\mathbf{x}|^2(\mathbf{x}\bullet\mathbf{y})^2 \\ &= |\mathbf{x}|^2\left(|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}\bullet\mathbf{y})^2\right)\ .\end{aligned}$$

Ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, so ist (2) trivialerweise erfüllt. Ist $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, so folgt aus unserer Rechnung:

$$|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}\bullet\mathbf{y})^2 = \frac{|\mathbf{z}|^2}{|\mathbf{x}|^2} \geq 0\,;$$

somit ist $|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 \geq (\mathbf{x}\bullet\mathbf{y})^2$, und durch Ziehen der Quadratwurzel folgt (2). Aus (2) ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\bullet(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= |\mathbf{x}|^2 + 2\,\mathbf{x}\bullet\mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \\ &\leq |\mathbf{x}|^2 + 2\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = \left(|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|\right)^2\end{aligned}$$

und somit (3). — Substituiert man in (3) $\mathbf{x} := \mathbf{z}-\mathbf{y}$, so folgt $|\mathbf{z}| \leq |\mathbf{z}-\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|$ bzw.

$$|\mathbf{z}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{z}-\mathbf{y}|\ .$$

Aus Symmetriegründen gilt dann auch

$$|\mathbf{y}| - |\mathbf{z}| \leq |\mathbf{y}-\mathbf{z}| = |\mathbf{z}-\mathbf{y}|\ .$$

Die beiden letzten Ungleichungen besagen zusammen $\bigl|\,|\mathbf{z}| - |\mathbf{y}|\,\bigr| \leq |\mathbf{z}-\mathbf{y}|$, wie in (4) behauptet. ⌟

Mit (3) ist zugleich auch die Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$ bewiesen, denn bezüglich Addition und Betragsfunktion ist $\mathbb{C}$ “identisch” mit $\mathbb{R}^2$.

Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ steht noch eine zweite multiplikative Verknüpfung der Vektoren zur Verfügung, das sogenannte **Vektorprodukt**. Da wir es vorderhand nicht benötigen, verzichten wir hier auf eine detaillierte Beschreibung. Für den Wissenden halten wir immerhin folgendes fest: Das Vektorprodukt ist eine schiefsymmetrische bilineare vektorwertige Funktion von zwei Vektorvariablen:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}\times\mathbf{y}\,,$$

und es genügt der Ungleichung

$$|\mathbf{x}\times\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|.$$

In den folgenden Kapiteln verwenden wir den Buchstaben $\mathbb{X}$, um eine beliebige der Grundstrukturen $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, zu bezeichnen.

Aufgaben

1. Durch
$$\mathbf{z} \bullet \mathbf{w} := \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}\, w_k$$
wird in $\mathbb{C}^n$ ein (komplexes) Skalarprodukt definiert. Untersuche dessen Eigenschaften: Was ist gleich wie im reellen Fall, was anders? Stichworte: Symmetrie, Bilinearität, Betragsfunktion, Schwarzsche Ungleichung.
2. Gegeben sind die drei Punkte $A := (3, 1, -2)$, $B := (-1, 4, 0)$, $C := (-2, 1, -1)$. Bestimme einen Punkt D so, dass die vier Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Wieviele Lösungen gibt es?
3. Zeige: Die Seitenmitten eines räumlichen (nicht notwendigerweise ebenen) Vierecks $ABCD$ liegen in einer Ebene und bilden ein Parallelogramm.
4. In welcher gegenseitigen Lage befinden sich drei Einheitsvektoren mit Summe $\mathbf{0}$?