3

Funktionen und Folgen

3.1 Erscheinungsformen

Erweiterung des Horizonts

In diesem Kapitel geht es in erster Linie um den Begriff der Stetigkeit, den Begriff des Grenzwerts und um den praktischen Umgang mit diesen Begriffen. Bevor wir damit beginnen, ist es vielleicht am Platz, einen *tour d'horizon* zu geben über die in diesem Buch vorkommenden Arten von Funktionen, damit von vorneherein klar ist, dass wir bei Funktionen nicht nur an "Kurven $y = f(x)$" denken.

Anmerkung: Der Leser wird wohl Vorkenntnisse über gewisse Funktionen, zum Beispiel über cos und sin, oder über die geometrische Reihe besitzen, und wir dürfen in den Beispielen darauf Bezug nehmen. Die betreffenden Dinge werden später schon noch "offiziell" behandelt.

Als Definitions- und Zielbereiche der in der Analysis betrachteten Funktionen $f\colon A \to B$ kommen in erster Linie die in Kapitel 2 behandelten Grundstrukturen $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ oder vernünftige Teilmengen davon (zum Beispiel Intervalle, Kreisscheiben, Sphären) in Frage. Ein wesentliches Anliegen der späteren Kapitel wird sein, die von den Funktionen $f\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ her vertrauten Begriffe (Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung, Integral usw.) auf mehrdimensionale Situationen zu übertragen.

Besitzt f einen Definitionsbereich $\operatorname{dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$, der "echt n-dimensional" ist, das heisst: innere Punkte (s.u.) enthält, so spricht man von einer **Funktion von n Variablen**.

Bsp: Das Produkt

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

ist eine Funktion von zwei Variablen. — Die von Punkt zu Punkt und zeitlich veränderliche Temperatur in einem Zimmer ist eine Funktion der vier Variablen x, y, z und t.

Ist der Wertevorrat von f mehrdimensional, so heisst f eine **vektorwertige Funktion**. Für vektorwertige Funktionen verwenden wir im allgemeinen halbfette Buchstaben: $\mathbf{f}$, $\mathbf{x}(\cdot)$, und andere. Eine vektorwertige Funktion $\mathbf{f}$ lässt sich festlegen durch Angabe der zugehörigen **Koordinatenfunktionen** f_i :

$$t \mapsto \mathbf{f}(t) = \bigl(f_1(t), \ldots, f_m(t)\bigr)\,, \qquad t \mapsto \mathbf{r}(t) = \bigl(x(t), y(t), z(t)\bigr)\,;$$

es geht aber auch ohne Koordinaten:

Bsp: $\mathbf{f}\colon \quad t \mapsto \cos t\,\mathbf{a} + \sin t\,\mathbf{b} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$

(dieses $\mathbf{f}$ produziert eine Ellipse mit konjugierten Halbmessern $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$).

Typologie der Funktionen in diesem Buch

Im einzelnen sei auf folgende Typen, Figuren und Interpretationen hingewiesen:

$\boxed{\mathbb{N} \to B}$

Es sei B eine beliebige Menge (Fig. 3.1.1) und x Variable für Elemente von B. Eine Funktion

$$x_.\colon \quad \mathbb{N} \to B\,, \qquad k \mapsto x_k$$

von $\mathbb{N}$ in den Zielbereich B heisst eine **(unendliche) Folge**. Ist speziell $B = \mathbb{R}$, so spricht man von einer **Zahlfolge**. Eine Folge besitzt eine "unendliche Wertetabelle"

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)\,; \tag{1}$$

deren Einträge x_k sind die **Glieder** der Folge. Eine Funktion $x_.\colon [\,1\,.\,.\,n\,] \to B$ ist eine **endliche Folge der Länge** n; ihre Wertetabelle $(x_1, \ldots, x_n)$ ist nichts anderes als ein n-Tupel von Elementen aus B. — Von Folgen handeln die Abschnitte 3.4 und 4.1–2.

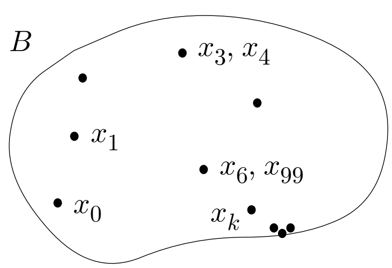

Fig. 3.1.1

$\boxed{\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}}$

Der Funktionstyp $f\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ stellt das "Grundmodell" der Funktionenlehre dar. Wir wollen die betreffenden Funktionen **reelle Funktionen** nennen; von ihnen handelt ein beträchtlicher Teil der folgenden Abschnitte und Kapitel. Als Bezeichner für eine unabhängige reelle Variable verwenden wir im allgemeinen den Buchstaben t, gelegentlich aber auch x.

Der Definitionsbereich einer reellen Funktion ist in aller Regel ein Intervall,

Bsp:
$$\begin{aligned} & \operatorname{dom}(\sin) = \mathbb{R}\ , \\ f(x) := \sqrt{1-x^2} \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{dom}(f) = [-1,1]\ , \\ g(x) := 1/\sqrt{1-x^2} \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{dom}(f) =]-1,1[\ , \end{aligned}$$

oder eine Vereinigung von Intervallen,

Bsp:
$$\operatorname{dom}(\tan) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Big] k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2} \Big[\ .$$

Die meisten der in der Praxis vorkommenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ besitzen eine natürliche Fortsetzung $\tilde{f}\colon \mathbb{C} \curvearrowright \mathbb{C}$, und oft ist erst von da her eine befriedigende Theorie der betreffenden Funktionen möglich. Wir haben das bei den Polynomen gesehen (Fundamentalsatz der Algebra); dasselbe trifft zu für die Exponentialfunktion (siehe Kapitel 6). — Die allgemeinen Eigenschaften der Funktionen $f\colon \mathbb{C} \curvearrowright \mathbb{C}$ werden behandelt in der sogenannten **komplexen Analysis**, früher einfach **Funktionentheorie** genannt.

① Die Funktion
$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$
ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und so "schön", wie man nur will. Für $|x| < 1$ gilt

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \tag{2}$$

(geometrische Reihe); für $|x| \geq 1$ ist aber die Reihe rechter Hand divergent und stellt die Funktion nicht mehr dar. Die Ursache dieses beim Betrag 1 eintretenden "Konvergenzzusammenbruchs" wird erst erkennbar, wenn wir die Fortsetzung
$$\tilde{f}\colon \quad \mathbb{C} \curvearrowright \mathbb{C}\ , \qquad z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$$
betrachten (Fig. 3.1.2): Potenzreihen wie die obige konvergieren im Komplexen grundsätzlich auf Kreisscheiben. Da nun $\tilde{f}$ in den Punkten $\pm i$ eine Nullstelle des Nenners und damit eine Singularität besitzt, kann der Konvergenzradius der Reihe (2) nicht grösser als 1 sein. ○

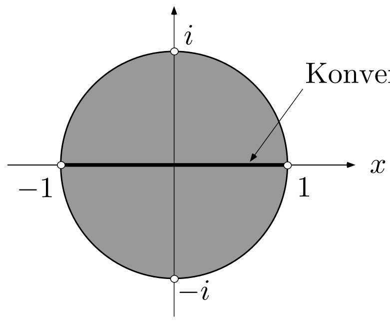

Fig. 3.1.2

$$\boxed{\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^m}$$

Eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{z}(\cdot): \quad t \mapsto \bigl(x(t), y(t)\bigr) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{x}(\cdot): t \mapsto \bigl(x_1(t), \ldots, x_m(t)\bigr) \qquad (3)$$

mit einem Intervall I als Definitionsbereich produziert für jeden “Zeitpunkt” $t \in I$ einen Punkt in der Ebene bzw. im $\mathbb{R}^m$ (Fig. 3.1.3). Durchläuft t das Intervall I, so durchläuft der Bildpunkt $\mathbf{z}(t)$ bzw. $\mathbf{x}(t)$ eine Kurve γ in der Ebene oder im Raum, und zwar nach einem ganz bestimmten “Fahrplan”. Man nennt (3) eine **Parameterdarstellung** von γ. (Dieser Name ist etwas unglücklich: Ein **Parameter** ist üblicherweise eine Variable, die “einstellbare” Problemdaten, etwa die Halbachsen einer vorgegebenen Ellipse, bezeichnet. Im Gegensatz dazu ist das t in (3) eine tatsächlich “laufende” Variable.)

Wenn es zum Beispiel darum geht, die Länge, die Krümmung oder den von der Kurve γ eingeschlossenen Flächeninhalt zu berechnen, so ist man auf eine Parameterdarstellung angewiesen; die Gleichungsform

$$\gamma := \bigl\{(x, y) \bigm| F(x, y) = 0\bigr\}$$

hilft einem da gar nichts.

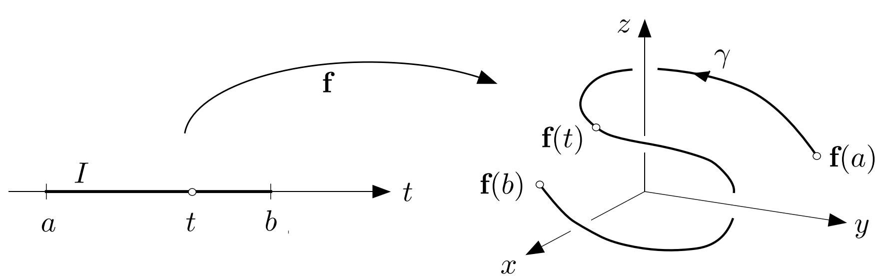

Fig. 3.1.3

Eine und dieselbe Kurve besitzt viele verschiedene Parameterdarstellungen, entsprechend den verschiedenen denkbaren “Fahrplänen”. Wenn es sich nicht um einen bestimmten zeitlichen Bewegungsablauf handelt, sondern nur um den geometrischen Gehalt der betreffenden Kurve, so wird man wenn möglich eine längs der Kurve veränderliche geometrische Grösse als “Parameter” (unabhängige Variable) wählen, zum Beispiel die x-Koordinate oder den Polarwinkel (s.u.) des laufenden Punktes oder dessen längs der Kurve gemessenen Abstand vom Anfangspunkt, die sogenannte **Bogenlänge**. — Wir geben einige Beispiele.

② Eine als Graph

$$\gamma: \quad y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

gegebene ebene Kurve lässt sich ohne weiteres auch parametrisch darstellen: Man schreibt

$$\gamma: \quad [\,a,b\,] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad t \mapsto \begin{cases} x(t) := t \\ y(t) := f(t) \end{cases}$$

oder einfach

$$\gamma: \quad x \mapsto (x, f(x)) \qquad (a \le x \le b)\ ,$$

denn auf den Namen der unabhängigen Variablen kommt es nicht an, und da kann man schon gleich den Namen der als Parameter gewählten geometrischen Grösse, hier: x, verwenden. ○

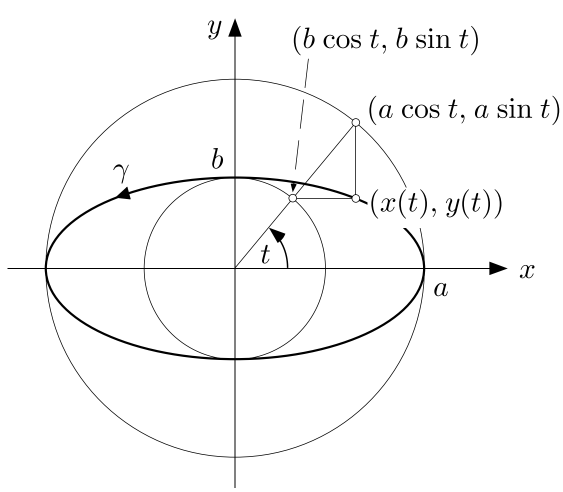

Fig. 3.1.4

③ Sind a und b gegebene positive Zahlen, so stellt

$$\gamma: \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) := a\cos t \\ y(t) := b\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

eine Ellipse mit Halbachsen a und b dar (Fig. 3.1.4), denn es ist

$$\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} \equiv 1 \ .$$

Die Variable t bezeichnet nicht etwa den Polarwinkel des laufenden Punktes $P := (x, y)$, sondern den Polarwinkel eines mit P verknüpften Kreispunktes (siehe die Figur). ○

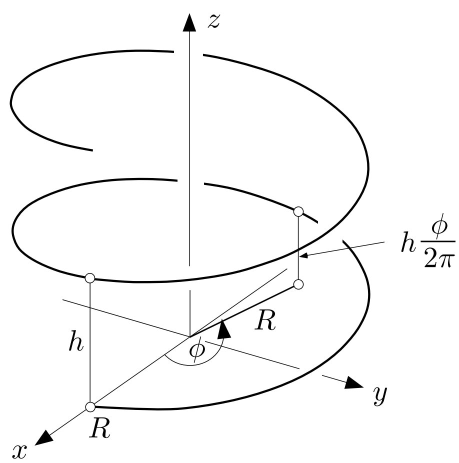

Fig. 3.1.5

④ Für eine Parameterdarstellung der **Schraubenlinie** σ (Fig. 3.1.5) mit Radius R und Ganghöhe h liegt es nahe, den Polarwinkel ϕ als Parameter zu wählen. Es ergibt sich

$$\sigma: \quad \phi \to \begin{cases} x(\phi) := R\cos\phi \\ y(\phi) := R\sin\phi \\ z(\phi) := h\dfrac{\phi}{2\pi} \end{cases} \qquad (-\infty < \phi < \infty) \ .$$

○

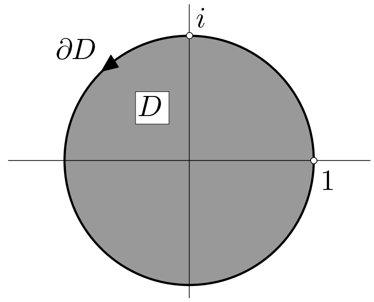

Fig. 3.1.6

$\boxed{\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}}$

Funktionen $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$ lassen sich erstens als Parameterdarstellungen $t \mapsto z(t)$ von Kurven in der komplexen Ebene auffassen. So ist zum Beispiel

$$\partial D: \quad t \mapsto z(t) := \cos t + i \sin t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

eine Parameterdarstellung des Einheitskreises (= Rand der Einheitskreisscheibe D, Fig. 3.1.6). Diese Vorstellung spielt eine entscheidende Rolle in der komplexen Analysis, wo komplexe Funktionen in bestimmter Weise längs derartigen Kurven integriert werden.
Zweitens kann man eine Funktion

$$f: \quad \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}\,, \qquad t \mapsto f(t)$$

als zahlenwertige Funktion auffassen, wobei diese Werte nicht reelle, sondern eben komplexe Zahlen sind. Wie ein derartiger komplexer Wert physikalisch interpretiert werden soll, ist im Einzelfall auszumachen. Zum Beispiel erweist es sich als äusserst vorteilhaft, harmonische Schwingungen (und periodische Funktionen ganz allgemein) formal als komplexwertige Funktionen zu behandeln. Auch die Lösungen von linearen Differentialgleichungen (Abschnitt 8.2) werden von vorneherein als komplexwertige Funktionen angesetzt.

$\boxed{\mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}}$

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$ lässt sich auffassen als “Temperaturverteilung” in der Ebene: Für jeden Punkt $(x,y) \in \operatorname{dom}(f)$ ist eine “Temperatur” $f(x,y)$ festgelegt. Bekanntlich lässt sich eine derartige Temperaturverteilung mit Hilfe der sogenannten **Isothermen** (“Kurven gleicher Temperatur”) visualisieren. Für einen vorgegebenen Wert $C \in \mathbb{R}$ bildet man die Menge

$$N_C := f^{-1}(\{C\}) := \bigl\{(x,y) \in \operatorname{dom}(f) \bigm| f(x,y) = C\bigr\}$$

und nennt N_C die **Niveaulinie** von f zum Niveau C (Fig. 3.1.7). In aller Regel ist N_C tatsächlich eine Kurve oder eine Vereinigung von Kurven, eventuell

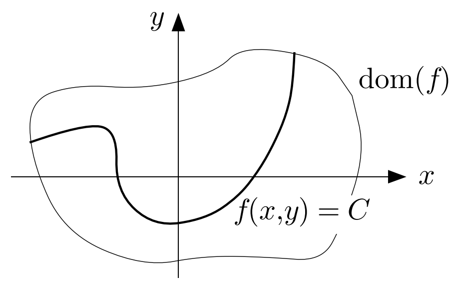

Fig. 3.1.7

mit Singularitäten. Zeichnet man die Niveaulinien für hinreichend viele verschiedene Werte $C \in \operatorname{im}(f)$, so erhält man ein anschauliches Bild des globalen Funktionsverlaufs.

⑤ Wir zeichnen einige Niveaulinien der Funktion

$$f(x,y) := \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\,\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

(Fig. 3.1.8). Der Funktionswert an der Stelle (x,y) ist das Produkt der Abstände von (x,y) zu den beiden Punkten $(\pm 1,\,0)$. Für $0 < C < 1$ besteht N_C aus zwei getrennten Ovalen; N_1 besitzt im Ursprung eine Singularität, und für $C > 1$ ist N_C eine einfach geschlossene Kurve. Die Niveaulinien N_C $(C > 0)$ dieses Beispiels heissen **Cassinische Kurven**, N_1 ist die sogenannte **Lemniskate**. ○

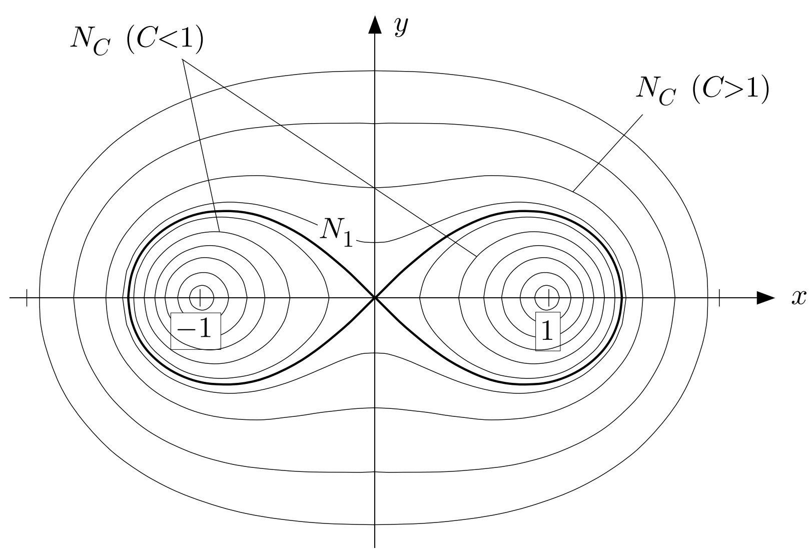

Fig. 3.1.8

Oft interessiert übrigens nicht die Funktion f als Ganzes, sondern in erster Linie eine bestimmte Kurve γ, die als Niveaulinie von f dargestellt werden kann:

$$\gamma: \qquad f(x,y) = C\ .$$

Bsp: Die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

lässt sich als N_1 der quadratischen Funktion

$$q(x,y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

auffassen.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$ lässt sich natürlich auch mit Hilfe ihres Graphen

$$\mathcal{G}(f) \ := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \big|\ (x,y) \in \mathrm{dom}\,(f),\ \ z = f(x,y)\big\}$$

in einer dreidimensionalen Figur anschaulich machen (Fig. 3.1.9). Der Graph ist hier eine Fläche, die **schlicht** über der (x,y)-Ebene liegt, das heisst: Senkrecht über (oder eventuell unter) jedem Punkt $(x,y) \in \mathrm{dom}\,(f)$ liegt genau ein Punkt des Graphen. Die Niveaulinien von f sind die Höhenkurven der Graphenfläche, wenn $\mathrm{dom}\,(f)$ für eine topographische Karte dieser Fläche zur Verfügung gestellt wird. Verstanden?

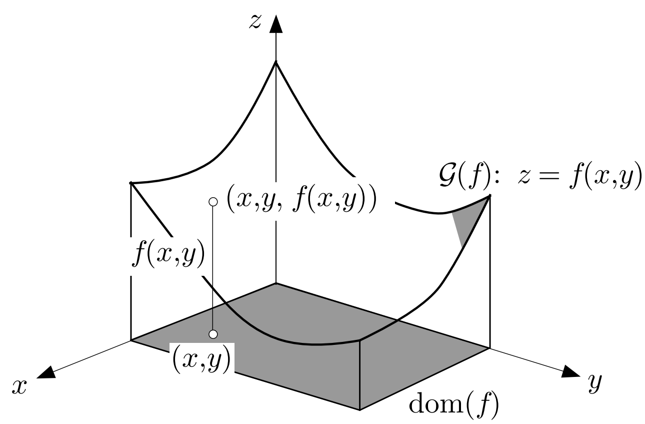

Fig. 3.1.9

⑥ Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) \ := \ x \cdot y\ , \qquad \mathrm{dom}\,(f) := [-1,1]^2\ .$$

Der zugehörige Graph (Fig. 3.1.10) ist von der Gestalt her eine **Sattelfläche**: von O aus geht es im ersten und dritten Quadranten der (x,y)-Ebene nach oben, in den beiden anderen Quadranten nach unten. Die hier vorliegende spezielle Fläche zweiten Grades heisst **hyperbolisches Paraboloid**. ◯

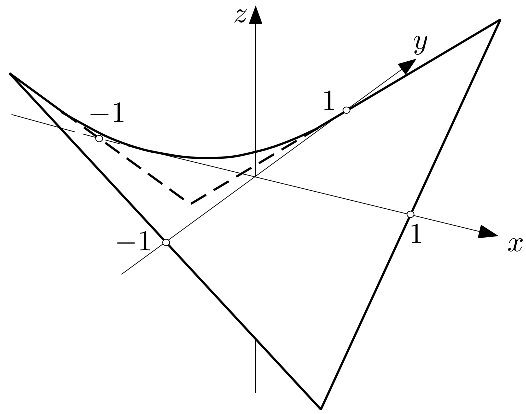

Fig. 3.1.10

Was hier über Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$ gesagt wurde, lässt sich sinngemäss auf zahlenwertige Funktionen von n Variablen übertragen. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$ kann als Temperaturverteilung im Raum aufgefasst werden. Anstelle von Niveaulinien gibt es hier $\bigl((n-1)$-dimensionale$\bigr)$ **Niveauflächen**. Umgekehrt lassen sich viele interessante Flächen S im (x, y, z)-Raum durch eine Gleichung $f(x, y, z) = C$ beschreiben, das heisst: als Niveaufläche N_C einer gewissen Funktion von drei Variablen auffassen.

Bsp: Das **einschalige Hyperboloid** besitzt die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ und ist damit Niveaufläche N_1 der quadratischen Funktion

$$q(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 \ .$$

$\boxed{\mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^3}$

Abbildungen $\mathbf{x}(\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind typischer Weise Parameterdarstellungen von Flächen im dreidimensionalen Raum. Dabei gilt es folgendes zu bedenken:

Eine *Kurve* $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ ist eine "eindimensionale Mannigfaltigkeit". Zu einer Parameterdarstellung von γ gehören ein Intervall I der t-Achse als Standardmodell einer derartigen Mannigfaltigkeit und eine vektorwertige Funktion $\mathbf{x}(\cdot) : t \mapsto \mathbf{x}(t)$, die die einzelnen Kurvenpunkte produziert.

Eine *Fläche* $S \subset \mathbb{R}^3$ ist eine "zweidimensionale Mannigfaltigkeit". Zu einer Parameterdarstellung von S gehören daher ein Bereich A in der (u, v)-Ebene als Standardmodell einer derartigen Mannigfaltigkeit und eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f}(\cdot): \quad \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^3 , \qquad (u, v) \mapsto \mathbf{f}(u, v) = \bigl(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\bigr) ,$$

die für jeden "Parameterpunkt" $(u, v) \in A$ einen Raumpunkt $\mathbf{f}(u, v)$ liefert (Fig. 3.1.11). Durchläuft (u, v) den **Parameterbereich** A, so durchläuft $\mathbf{f}(u, v)$ die Fläche S.

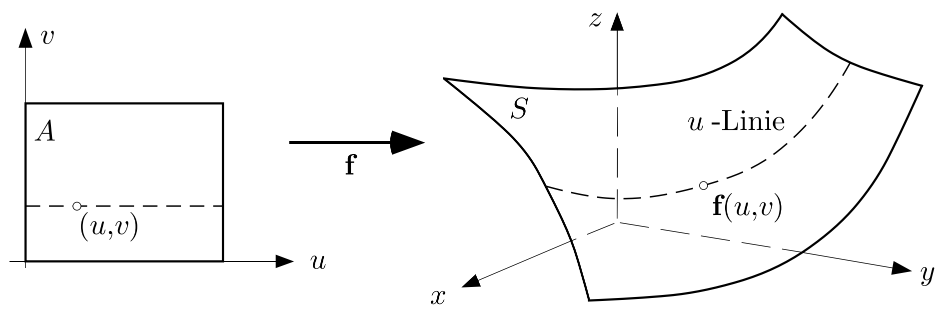

Fig. 3.1.11

Bei allgemeinen Betrachtungen über Flächen verwenden wir u, v als Parameter. Sobald man aber eine konkrete, geometrisch beschriebene Fläche vor sich hat, wählt man (wie bei Kurven) auf der Fläche variable geometrische Grössen als Parameter und behält deren Namen bei. Die folgenden Beispiele sollen das erläutern.

⑦ Ist S als Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$ gegeben (Fig. 3.1.12):

$$S: \quad z = f(x,y) \qquad \bigl((x,y) \in A\bigr)\,,$$

so erhält man sofort eine Parameterdarstellung $\mathbf{f}$ von S mit dem Parameterbereich A, indem man ansetzt:

$$\mathbf{f}: \quad A \to \mathbb{R}^3\,, \qquad (x,y) \mapsto \bigl(x, y, f(x,y)\bigr)\,.$$

○

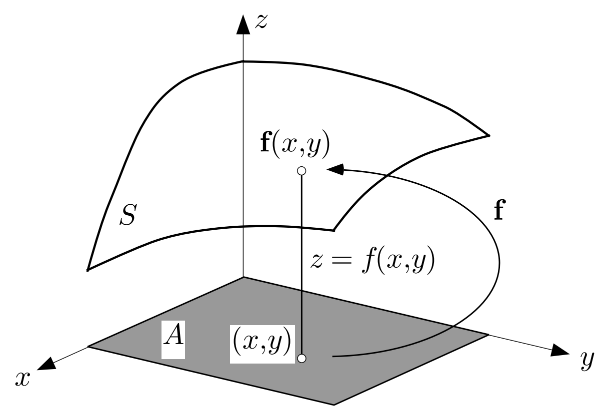

Fig. 3.1.12

⑧ Die Sphäre S^2_R vom Radius R besitzt die Parameterdarstellung

$$\mathbf{f}: \qquad (\phi,\theta) \mapsto \begin{cases} x(\phi,\theta) := R\cos\theta\cos\phi \\ y(\phi,\theta) := R\cos\theta\sin\phi \\ z(\phi,\theta) := R\sin\theta \end{cases} \tag{4}$$

(Fig. 3.1.13); Parameterbereich ist das Rechteck $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in der (ϕ, θ)-Ebene. Die Variable ϕ ist die **geographische Länge**, und θ ist die **geographische Breite** auf S_R^2. Längs den Kanten $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ist die Darstellung (5) nicht "regulär", da diese Kanten auf je einen Punkt (N und S) abgebildet werden.

○

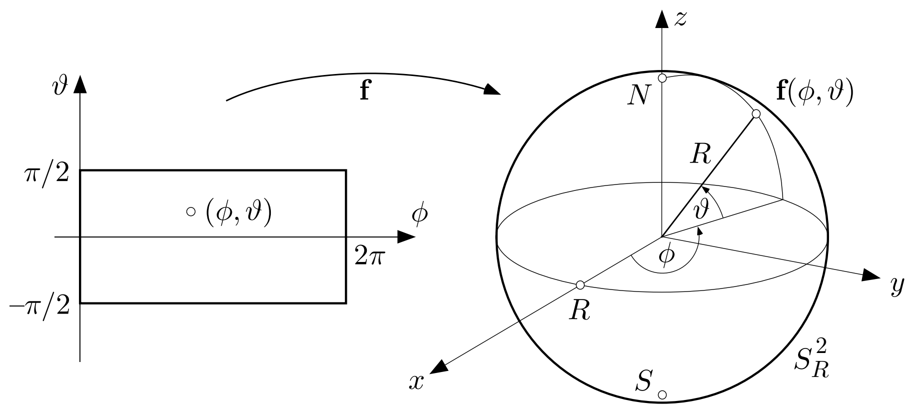

Fig. 3.1.13

$\boxed{\mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3}$

Eine Abbildung

$$\mathbf{f}: \quad \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3, \qquad (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$$

lässt sich erstens als Parameterdarstellung eines Bereichs ("Körpers") B im (x, y, z)-Raum auffassen. Das ist dann von Interesse (und spielt eine wichtige Rolle in der Integralrechnung), wenn sich ein gegebener Bereich B in kartesischen Koordinaten nur sehr umständlich beschreiben lässt. Man ersetzt dann diese Beschreibung durch eine Parameterdarstellung mit einem Parameterbereich A im (u, v, w)-Raum, der wenn irgend möglich ein achsenparalleler Quader ist (Fig. 3.1.14). Gelegentlich wird dann der Bereich A gar nicht gezeichnet, sondern man fasst u, v, w als "neue Koordinaten" im (x, y, z)-Raum auf und bringt sie in geeigneter Weise in der (x, y, z)-Figur zur Darstellung, siehe zum Beispiel die rechte Teilfigur 3.1.13.

⑨ Es sei B der von den drei linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ aufgespannte Spat und $I := [0, 1]^3$ der Einheitswürfel im (u, v, w)-Raum. Dann ist

$$\mathbf{f}: \quad I \to B, \qquad (u, v, w) \mapsto \mathbf{r}(u, v, w) := u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$$

eine Parameterdarstellung von B (Fig. 3.1.15). ○

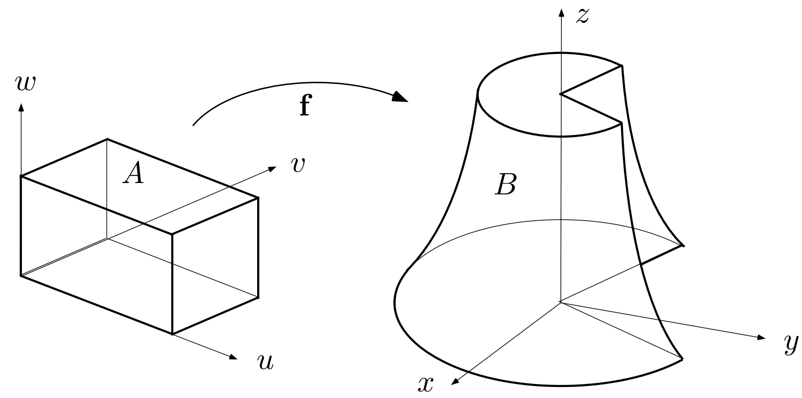

Fig. 3.1.14

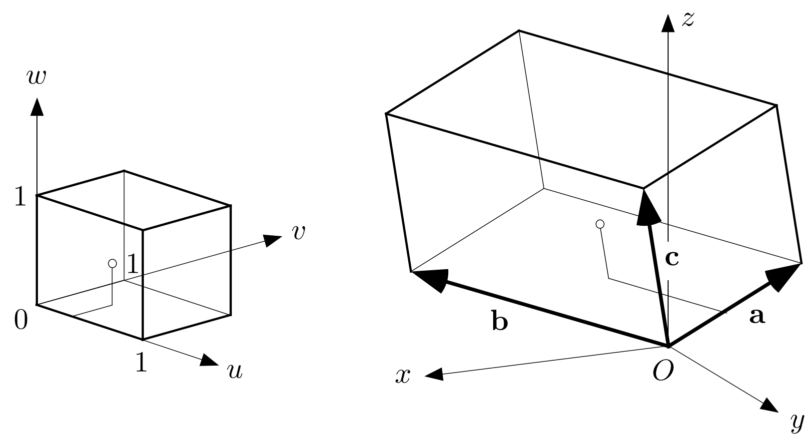

Fig. 3.1.15

⑩ Aus den Formeln (4) ergibt sich ohne weiteres eine Parameterdarstellung **k** der dreidimensionalen Vollkugel

$$B_R \;:=\; \left\{(x,y,z) \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R\right\}$$

mit einem Quader im (r,ϕ,θ)-Raum als Parameterbereich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}: \quad [\,0,R\,] \times [\,0,2\pi\,] \times \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \;&\to\; \qquad B_R \quad, \\
(r,\phi,\theta) \qquad\qquad &\mapsto \left\{\begin{array}{l} x := r\cos\theta\cos\phi \\ y := r\cos\theta\sin\phi \\ z := r\sin\theta \end{array}\right. \quad .
\end{aligned} \tag{5}$$

Dabei wird die ganze Seitenfläche $r = 0$ des Quaders auf den einzigen Punkt O abgebildet. Da aber diese Seitenfläche kein Volumen besitzt und der Punkt

O auch nicht, spielt das zum Beispiel für die Zwecke der Integralrechnung keine Rolle.

Sind die Variablen r, ϕ, θ mit x, y, z verbunden durch (5), so nennt man r, ϕ, θ die **Kugelkoordinaten** des Punktes (x, y, z). ◯

Eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{K}\colon \quad \mathbb{R}^3 \curvearrowright T\mathbb{R}^3\,, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{K}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

lässt sich noch zu einem ganz anderen Zweck verwenden, nämlich zur Produktion eines Vektorfelds. Der Funktionswert an der Stelle $\mathbf{x}$ ist hier ein Vektor $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, der im Punkt $\mathbf{x}$ "anzuheften" ist und zum Beispiel das elektrische Feld oder die Geschwindigkeit einer strömenden Flüssigkeit in diesem Punkt darstellen kann.

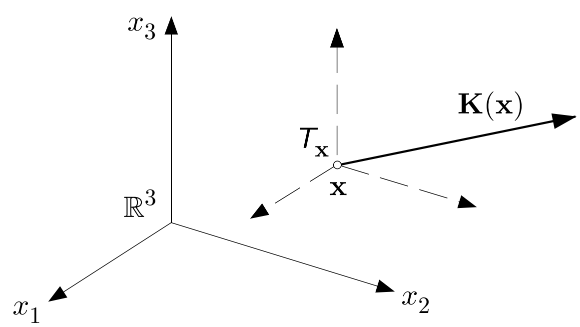

Fig. 3.1.16

Dieses "Anheften" ist folgendermassen zu verstehen (Fig. 3.1.16): Der Punkt $\mathbf{x}$ wird als Ursprung eines neuen Raumes $T_\mathbf{x}$, des **Tangentialraumes** von $\mathbf{x}$, angesehen (darauf bezieht sich das 'T' in der Formel (6)), und $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ ist ein Vektor in diesem Tangentialraum oder eben ein **Tangentialvektor** im Punkt $\mathbf{x}$. Ist in dieser Weise für jeden Punkt $\mathbf{x}$ eines Raumteils $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Tangentialvektor $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ erklärt, so nennt man $\mathbf{K}(\cdot)$ ein **Vektorfeld** auf Ω und zeichnet eine Figur in der Art von Fig. 3.1.17.

Mit Vektorfeldern befassen wir uns eingehend in Kapitel 14: Vektoranalysis. Wir erhalten dabei einen ersten Einblick in das geheimnisvolle Zusammenspiel von analytischen und geometrischen Operationen: Es ist vielleicht kein Zufall, dass derselbe Buchstabe 'd' sowohl das Differenzieren wie die Randbildung symbolisiert. Im weiteren ist die Vektoranalysis *die* mathematische Grundlage der Elektrodynamik — Stichwort: "Maxwellsche Gleichungen".

⑪ Im Ursprung befinde sich eine Punktladung $q > 0$. Diese Punktladung erzeugt ein elektrisches Feld $\mathbf{E}(\cdot)$, genannt **Coulombfeld**. Das Feld $\mathbf{E}(\cdot)$ ist proportional zu q, radial nach aussen gerichtet, und sein Betrag nimmt mit

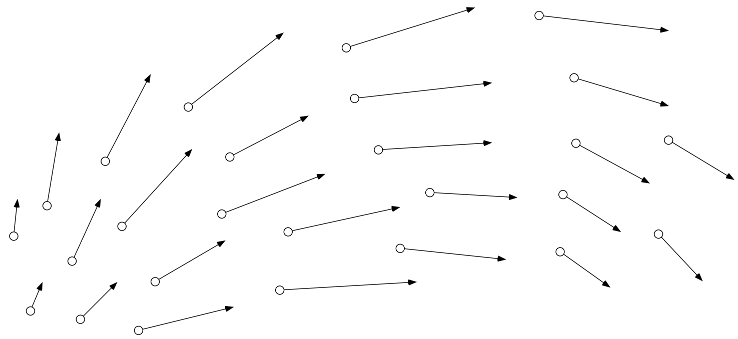

Fig. 3.1.17

dem Quadrat des Abstandes von O ab (Fig. 3.1.18). Es gilt also für eine geeignete, vom Masssystem abhängige Konstante $c > 0$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \;=\; \frac{cq}{r^2}\,\frac{\mathbf{x}}{r}\,, \qquad r := |\mathbf{x}|\;.$$

Hier stellt $\mathbf{x}/r$ einen (an der Stelle $\mathbf{x}$ angehefteten) radial nach aussen gerichteten Einheitsvektor dar. In Koordinaten ausgeschrieben sieht das Feld $\mathbf{E}(\cdot)$ folgendermassen aus:

$$\mathbf{E}(x_1, x_2, x_3) \;=\; \frac{cq}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r}\right)\;.$$

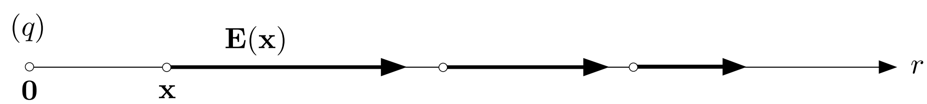

Fig. 3.1.18

Aufgaben

1. Zeichne das Niveaulinienportrait der Funktion

$$f(x,y) := \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}\;.$$

Beschreibe den geometrischen Gehalt der Aufgabe und ihrer Lösung in Worten.

2. Betrachte den Halbkreisbogen $\gamma := \bigl\{(x,y) \bigm| x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0\bigr\}$ sowie die in der ganzen (x,y)-Ebene definierte Funktion

$$f(x,y) \;:=\; \text{“Distanz von } (x,y) \text{ zum nächstgelegenen Punkt von } \gamma\text{”}\;.$$

Gewünscht ist eine formelmässige Darstellung von $f(x,y)$ mit möglichst wenig Verzweigungen. *Hinweis:* Die Lösung ergibt sich im wesentlichen durch Inspektion der Figur; wenn nötig die Betragsfunktion verwenden.

3.2 Stetigkeit

Definition und Grundeigenschaften

Theoretisch betrachten wir die Punkte (Zahlen, Vektoren) unserer Grundstrukturen als ideale Objekte, die mit "unendlicher Genauigkeit" erfasst und manipuliert werden können. In einem Computer sind aber nur die allerwenigsten Zahlen, zum Beispiel die Gleitkommazahlen

$$p \cdot 2^r \qquad (p,\, r \in \mathbb{Z};\ |p|,\, |r| \le 2^{48})$$

exakt darstellbar, alle anderen können bestenfalls mit ziemlicher Genauigkeit approximiert werden. Wenn wir unter diesen Umständen sinnvoll mit Funktionen arbeiten, insbesondere einen Funktionswert $f(x_0)$ ausrechnen wollen (Fig. 3.2.1), sind wir darauf angewiesen, dass die Eingabe eines Näherungswerts x anstelle des richtigen Werts x_0 (man denke an $x_0 := \pi$) zu einem Funktionswert $f(x)$ führt, der in der Nähe des richtigen Funktionswerts $f(x_0)$ liegt. Es müsste also gelten:

$$x \doteq x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \doteq f(x_0)\ .$$

Fig. 3.2.1

Die hier angesprochene Eigenschaft von Funktionen ist die sogenannte Stetigkeit, der wir nun auf den Grund gehen wollen. In der obigen Situation wäre man bestimmt zufrieden, wenn folgendes sichergestellt wäre:

$$\forall x: \quad |f(x) - f(x_0)| \le |x - x_0|\ ,$$

das heisst, wenn der Fehler im Output höchstens so gross ist wie der Fehler im Input. Ja, es würde auch genügen, wenn für eine geeignete Konstante $C > 0$ (zum Beispiel $C := 20$) die Fehlerabschätzung

$$\forall x: \quad |f(x) - f(x_0)| \le C\,|x - x_0|$$

gilt. Lässt sich der Fehler im Funktionswert durch eine derartige **Lipschitz-Bedingung** begrenzen, so heisst f **lipstetig** (sic!) an der Stelle x_0 (für die genaue Definition s.u.). Leider lässt sich die Stetigkeit mit diesem einfachen Ansatz nicht ganz in den Griff bekommen, wie das folgende Beispiel zeigt.

① Die Wurzelfunktion

$$\sqrt{\cdot}: \quad \mathbb{R}_{\geq 0} \;\to\; R_{\geq 0}\,, \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

ist zweifellos stetig, und zwar auch im Ursprung: Je näher x bei 0 ist, desto näher ist auch $\sqrt{x}$ bei $\sqrt{0} = 0$. Wegen

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{0}|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \;\to\; \infty \qquad (x \to 0+)$$

gibt es aber kein $C > 0$, so dass für alle $x \geq 0$ die Fehlerbegrenzung

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \;\leq\; C\,|x - 0|$$

garantiert ist.

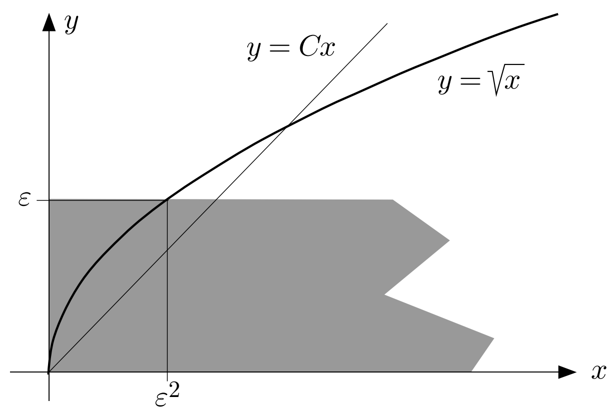

Fig. 3.2.2

Folgendes trifft hingegen zu (Fig. 3.2.2): Ist eine (beliebig kleine) Toleranz $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so lässt sich $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon$ erzwingen, indem man x hinreichend nahe bei 0 wählt: Es genügt, dass $|x - 0| < \varepsilon^2$ ist. ○

Diese eigentümlich verschachtelte Bedingung liegt der allgemeinen Definition der Stetigkeit zugrunde: Die Funktion f ist **an der Stelle** x_0 **stetig**, wenn sich zu beliebig kleiner vorgegebener **Toleranz** $\varepsilon > 0$ ein **Schlupf** $\delta > 0$ finden lässt, so dass für alle $x \in \mathrm{dom}\,(f)$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,. \tag{1}$$

Der Schlupf δ wird in aller Regel von ε abhängen: Je weniger Fehler im Funktionswert toleriert wird, desto weniger Schlupf darf die unabhängige Variable aufweisen. — Eine Funktion f heisst ganz einfach **stetig**, wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in \mathrm{dom}\,(f)$ stetig ist.

Alles, was hier gesagt wird, gilt nicht nur für Funktionen $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$, sondern für Funktionen, die in einer beliebigen Grundstruktur

$$\mathbb{X} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{C}\}$$

definiert sind und in einer derartigen Struktur $\mathbb{X}'$ Werte annehmen. In allen diesen Strukturen ist eine natürliche Abstandsmessung

$$d(x, y) := |x - y| \tag{2}$$

vorhanden, und etwas anderes hat es für (1) nicht gebraucht.

Nach diesen einführenden Bemerkungen beginnen wir im Ernst. — Ein **metrischer Raum** ist eine Menge M, versehen mit einer Funktion

$$d(\cdot, \cdot): \quad M \times M \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto d(x, y),$$

die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(M1) $d(x, y) \geq 0, \qquad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**Dreiecksungleichung**).

Eine derartige Funktion d gibt den Abstand zwischen je zwei Punkten x und y an und wird daher als **Metrik** auf M bezeichnet. Eine beliebige Teilmenge A eines metrischen Raumes (M, d) wird selbst ein metrischer Raum durch Einschränkung von d auf $A \times A$.

Die Grundstrukturen $\mathbb{X}$ sind metrische Räume vermöge der **natürlichen Metrik** (2). Da die Räume $\mathbb{X}$ und ihre Teilmengen bis auf weiteres die einzigen "konkreten" metrischen Räume sind, die wir zu betrachten haben, schreiben wir mit Rücksicht auf (2) im folgenden $|x - y|$ anstelle von $d(x, y)$; dabei sind x und y je nach Zusammenhang reelle Zahlen, komplexe Zahlen oder Vektoren.

Der Stetigkeitsbegriff ist so fundamental, dass verschiedene (äquivalente) Versionen davon in Gebrauch sind (siehe **(3.1)**). Dabei ist auch von "Umgebungen" die Rede, so dass wir vorweg erklären müssen, was eine Umgebung ist: Es sei M ein metrischer Raum. Unter einer **Umgebung des Punktes** $a \in M$ versteht man eine beliebige Teilmenge $U \subset M$, die alle hinreichend nahe bei a gelegenen Punkte $x \in M$ enthält; das heisst: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|x - a| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x \in U.$$

Mit $U(a)$ ist immer eine Umgebung U des Punktes a gemeint. Speziell: Die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in M \mid |x - a| < \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

heisst **ε-Umgebung** des Punktes a.

Der Durchschnitt von *endlich vielen* Umgebungen U_i , $1 \le i \le r$, des Punktes a ist immer noch eine Umgebung von a: Setze $\varepsilon := \min_{1\le i\le r} \varepsilon_i$.

② Die ε-Umgebung einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist das offene Intervall $]\,a-\varepsilon,\ a+\varepsilon\,[$. Das Intervall $[\,0,1\,] \subset \mathbb{R}$ ist eine Umgebung des Punktes $1/4$, nicht aber der Punkte $0 \in \mathbb{R}$ und $1 \in \mathbb{R}$. Wird anstelle von $\mathbb{R}$ der metrische Raum $[\,0,2\pi\,]$ zugrundegelegt, so ist $[\,0,1\,]$ sehr wohl eine Umgebung von 0.

Der offene Würfel $W := \prod_{i=1}^n \,]\,a_i-\varepsilon,\ a_i+\varepsilon\,[$ ist eine Umgebung des Punktes $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, denn es gilt $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset W$.

Die Strecke $\bigl\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \bigm| -1 \le x \le 1\bigr\}$ ist *keine* Umgebung des Punktes $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. ○

Eine Funktion $f\colon \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{X}'$ heisst **stetig an der Stelle** $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$, wenn es zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|x-x_0| < \delta \quad \wedge \quad x \in \operatorname{dom}(f) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ . \tag{3}$$

Die Zusatzbedingung ‘ $x \in \operatorname{dom}(f)$ ’ wird im weiteren nicht jedesmal hingeschrieben. Im gleichen Zug meint man mit $U_\delta(x_0)$ stillschweigend die Einschränkung der “vollen” Umgebung $U_\delta(x_0) \subset \mathbb{X}$ auf $\operatorname{dom}(f)$.

(3.1) *Die folgenden Sachverhalte sind äquivalent:*

(a) *Die Funktion f ist stetig an der Stelle x_0.*

(b) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$f(x) \in U_\varepsilon\bigl(f(x_0)\bigr) \qquad \forall\, x \in U_\delta(x_0)\ .$$

(c) *Zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$.*

⌜ Der Sachverhalt (b) ist offensichtlich äquivalent mit (a) und folgt mit $V := U_\varepsilon\bigl(f(x_0)\bigr)$ aus (c).

(b)⇒(c): Gilt (b) und ist V eine beliebige Umgebung von $y_0 := f(x_0)$, so gibt es zunächst ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(y_0) \subset V$ und dann wegen (b) ein $U := U_\delta(x_0)$ mit $f(U) \subset U_\varepsilon(y_0) \subset V$. ⌟

Eine Funktion $f\colon \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{X}'$ ist **stetig**, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist. Wir werden im folgenden verschiedene allgemeine Prinzipien herleiten, die erlauben, einer konkret gegebenen Funktion die Stetigkeit von blossem Auge anzusehen. Es wird dann nur noch in Spezialfällen nötig sein, auf die Definition zurückzugreifen.

Eine konstante Funktion ist trivialerweise stetig. Die identische Abbildung

$$\mathrm{id}_A: \quad A \to A\,, \qquad x \mapsto x$$

irgendeiner Menge $A \subset \mathbb{X}$ ist stetig. Ist $f : A \to \mathbb{X}$ stetig und B eine beliebige Teilmenge von A, so ist auch die Einschränkung $f\restriction B$ stetig.

Die Zusammensetzung von stetigen Funktionen ist stetig:

(3.2) *Ist $f : A \to B$ stetig (im Punkt x_0) und $g : B \to C$ stetig (im Punkt $y_0 := f(x_0)$), so ist auch die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ stetig (im Punkt x_0).*

⌜ Es genügt, die auf einen Punkt bezügliche Variante (Fig. 3.2.3) zu beweisen. — Es sei eine beliebige Umgebung W des Punktes $z_0 := g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$ vorgegeben. Dann gibt es eine Umgebung V von y_0 mit $g(V) \subset W$ und weiter eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$. Zusammengenommen erhält man

$$(g \circ f)(U) = g\bigl(f(U)\bigr) \subset g(V) \subset W \ . \qquad ⌟$$

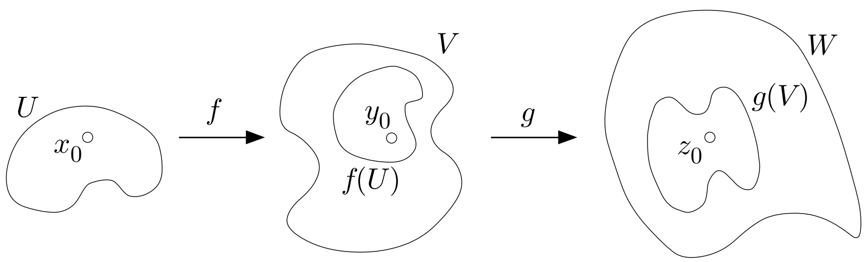

Fig. 3.2.3

Die folgende "qualifizierte" Form der Stetigkeit ist besonders bequem in der Handhabung: Eine Funktion f heisst **Lipschitz-stetig**, kurz: **lipstetig an der Stelle** x_0, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt und eine Konstante C mit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C\,|x - x_0| \qquad \forall x \in U(x_0) \ . \tag{4}$$

③ Die Funktion $f(t) := t^2$ ist lipstetig bei 0, denn es gilt

$$|f(t) - f(0)| = t^2 \leq |t - 0| \qquad (-1 \leq t \leq 1)\,,$$

und $[\,-1, 1\,]$ ist eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$. Es gibt aber keine Konstante C, so dass

$$|f(t) - f(0)| \leq C\,|t - 0|$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ zutrifft. ○

Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{X}$ heisst **(global) lipstetig**, wenn es eine Konstante C gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y| \qquad \forall x\,,\ \forall y \in A \ .$$

(3.3) *Ist f lipstetig (an der Stelle x_0), so ist f stetig (an der Stelle x_0).*

⌜ Gilt (4) und ist ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so setze man $\delta := \dfrac{\varepsilon}{C+1}$. Dann gilt für alle $x \in U := U(x_0) \cap U_\delta(x_0)$ die Abschätzung

$$|f(x) - f(x_0)| \le C\,|x - x_0| \le C\,\delta = \frac{C}{C+1}\,\varepsilon < \varepsilon \ . \qquad ⌟$$

Beispiel ① zeigt, dass die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt.

(3.4) *Die Projektionen*

$$\mathrm{pr}_i : \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

auf die Koordinatenachsen sind stetig; insbesondere sind die beiden Funktionen Re *und* Im: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *stetig.*

⌜ Für beliebige Punkte $\mathbf{x}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gelten die Ungleichungen

$$|x_i - a_i| \le |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \qquad (1 \le i \le n) \ . \tag{5}$$

Die Projektionen pr_i sind daher lipstetig mit $C := 1$. ⌟

(3.5) *Eine vektorwertige Funktion*

$$\mathbf{f} : \quad \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{R}^m\,, \qquad u \mapsto \mathbf{f}(u) = \bigl(f_1(u), \ldots, f_m(u)\bigr)$$

ist genau dann stetig (an der Stelle u_0), wenn jedes f_i, $1 \le i \le m$, (dort) stetig ist.

⌜ Ist $\mathbf{f}$ stetig, so sind auch die $f_i = \mathrm{pr}_i \circ \mathbf{f}$ stetig. — Für die Umkehrung benötigen wir die für beliebige Punkte $\mathbf{y}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ gültige Ungleichung

$$|\mathbf{y} - \mathbf{b}| \le \sum_{i=1}^{m} |y_i - b_i| \ . \tag{6}$$

Die f_i seien stetig an der Stelle u_0, und es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es für jedes $i \in [\,1\,..m\,]$ eine Umgebung U_i von u_0 mit

$$|f_i(u) - f_i(u_0)| < \frac{\varepsilon}{m} \qquad \forall u \in U_i \ .$$

Der Durchschnitt $U := \bigcap_{1 \le i \le m} U_i$ ist eine Umgebung von u_0, und für alle $u \in U$ gilt wegen (6):

$$|\mathbf{f}(u) - \mathbf{f}(u_0)| \le \sum_{i=1}^{m} |f_i(u) - f_i(u_0)| < \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon \ . \qquad ⌟$$

Stetigkeit der Rechenoperationen

Für die analytische Praxis ist nun das Folgende entscheidend:

(3.6) *Die in den Grundstrukturen $\mathbb{X}$ definierten Rechenoperationen, die Betragsfunktion sowie die komplexe Konjugation sind stetig.*

⌜ Wir behandeln nur (a) das Produkt von reellen Zahlen, (b) den Kehrwert von komplexen Zahlen und (c) die Betragsfunktion.

(a) Wir müssen das Produkt von zwei Zahlen x_1, x_2 als Funktion p der Vektorvariablen $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ betrachten:

$$p: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad (x_1, x_2) \mapsto p(x_1, x_2) := x_1 \cdot x_2\ .$$

Um die Stetigkeit von p an einer beliebig, aber fest gewählten Stelle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ zu beweisen, leiten wir eine Abschätzung für $|p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{a})|$ her. Ist $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \le 1$, so gilt

$$\begin{aligned}
|p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{a})| &= |x_1 \cdot x_2 - a_1 \cdot a_2| \\
&= \bigl|(x_1 - a_1)a_2 + a_1(x_2 - a_2) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\bigr| \\
&\le |a_2|\,|x_1 - a_1| + |a_1|\,|x_2 - a_2| + |x_1 - a_1|\,|x_2 - a_2| \\
&\le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{x} - \mathbf{a}| + |\mathbf{a}|\,|\mathbf{x} - \mathbf{a}| + |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 \\
&\le \bigl(2|\mathbf{a}| + 1\bigr)\,|\mathbf{x} - \mathbf{a}|\ .
\end{aligned}$$

Hiernach ist p an der Stelle $\mathbf{a}$ lipstetig mit $C := 2|\mathbf{a}| + 1$. Weil $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ beliebig war, ist damit erwiesen, dass die Produktfunktion stetig ist.

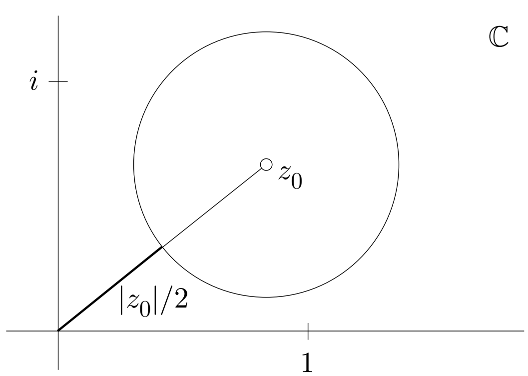

Fig. 3.2.4

(b) Es geht um die Funktion

$$k: \quad \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*\,, \qquad z \mapsto \frac{1}{z}\ .$$

Betrachte eine feste Stelle $z_0 \in \mathbb{C}^*$ und die Umgebung $U := U_{|z_0|/2}(z_0)$. Für alle $z \in U$ gilt $|z| > |z_0|/2$ (Fig. 3.2.4) und somit

$$|k(z) - k(z_0)| = \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \frac{1}{|z|\,|z_0|}\,|z - z_0| \leq \frac{2}{|z_0|^2}\,|z - z_0|\ .$$

Folglich ist k lipstetig an der Stelle z_0 mit $C := 2/|z_0|^2$.

(c) Für beliebige x, $y \in \mathbb{X}$ gilt

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \ \leq\ |x - y|\,;$$

somit ist die Betragsfunktion lipstetig mit $C := 1$. ⌟

(3.7) *Sind die Funktionen f und $g : \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{X}'$ stetig (an der Stelle x_0), so sind auch die Funktionen*

$$f + g\,, \qquad \lambda \cdot f \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \qquad f \cdot g\,, \qquad f/g\,, \qquad |f|$$

— so weit definiert — stetig (an der Stelle x_0).

⌜ Definitionsbereich von

$$f + g: \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

ist der Durchschnitt von $\operatorname{dom}(f)$ und $\operatorname{dom}(g)$, analog für die übrigen. Von $\operatorname{dom}(f/g)$ sind natürlich die Punkte mit $g(x) = 0$ auszuschliessen. — Wir behandeln zum Beispiel $f \cdot g$ und $1/g$.

(a) Die Funktion $f \cdot g$ lässt sich wie folgt als Zusammensetzung von zwei stetigen Funktionen darstellen und ist damit selbst stetig:

$$f \cdot g: \quad \begin{cases} \mathbb{X} & \longrightarrow & (\mathbb{X}')^2 & \longrightarrow & \mathbb{X}' \\ x & \mapsto & \big(f(x), g(x)\big) & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \\ & \mathbf{h} & & p & \end{cases} \quad ;$$

dabei steht p für die mit ‘ $\cdot$ ’ gemeinte Produktfunktion (Produkt von reellen oder von komplexen Zahlen, Vektorprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ usw.). Hier ist $\mathbf{h}$ stetig nach **(3.5)** und p nach **(3.6)**.

(b) Man hat $1/g = k \circ g$, wobei k die im Beweis von **(3.6)** betrachtete Kehrwertfunktion bezeichnet. ⌟

④ Sind a_0, a_1, …, a_n vorgegebene reelle oder komplexe Zahlen, so wird durch

$$p(t) := a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 \tag{7}$$

eine Funktion

$$p: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

definiert. Eine derartige Funktion heisst ein **Polynom vom Grad** $\leq n$. Die a_k sind die **Koeffizienten** von p. Sind alle $a_k = 0$, so ist p das **Nullpolynom**.

Die Koeffizienten a_k bestimmen die Polynomfunktion p via (7). Umgekehrt lassen sich die a_k aus der Polynomfunktion p wieder zurückgewinnen mit Hilfe der Formel

$$a_k = \frac{1}{k!}\, p^{(k)}(0)$$

(gemeint ist die k-te Ableitung an der Stelle 0; siehe Abschnitt 7.6). Der **Koeffizientenvektor** $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ und die Polynomfunktion bestimmen sich also gegenseitig. Die Zahl

$$\deg(p) := \max\bigl\{k \bigm| a_k \neq 0\bigr\}$$

ist der **(genaue) Grad** des Polynoms p. Das Nullpolynom besitzt definitionsgemäss den Grad $-\infty$.

Sind p und q Polynome, q nicht das Nullpolynom, so heisst

$$R := \frac{p}{q}\,, \quad \text{d.h.} \quad R(t) := \frac{p(t)}{q(t)}$$

eine **rationale Funktion**. Im Komplexen besitzt R den Definitionsbereich $\operatorname{dom}(R) = \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| q(z) \neq 0\bigr\}$.

Da die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} : z \mapsto z$ stetig ist, ergibt sich mit **(3.7)** und vollständiger Induktion: Polynome und rationale Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich stetig.

Allgemeiner kann man Polynome (und rationale Funktionen) in mehreren Variablen, zum Beispiel in zwei Variablen x und y, betrachten. Ein **Polynom in** n **Variablen** $x_1, \ldots, x_n$ ist eine endliche Linearkombination

$$p(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{\kappa} a_\kappa\, x_1^{\kappa_1} \ldots x_n^{\kappa_n}$$

von **Monomen**

$$x_1^{\kappa_1} \ldots x_n^{\kappa_n}\,, \qquad \kappa := (\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \in \mathbb{N}^n\,,$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten a_κ. Ein derartiges p besitzt $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ als natürlichen Definitionsbereich.

Bsp: $\quad p(x, y) := x^3y^2 - 4x^2y + 5x + y^5 - 3y^2 - 10.$

Auch Polynome und rationale Funktionen in mehreren Variablen sind (so weit definiert) stetig. Den Boden des hierfür anzustrengenden Induktionsbeweises bildet Satz **(3.4)**. ○

Alles in allem haben wir das folgende allgemeine Prinzip: *Ein mit stetigen Funktionen und den Operationen* $+, -, \cdot, /, |\cdot|$ *und* $\circ$ *gebildeter "Ausdruck" ist, so weit definiert, stetig.*

⑤ Wenn wir die Stetigkeit der Exponentialfunktion, Wurzelfunktion usw. einmal voraussetzen, so ist die Funktion

$$f(t) := \frac{e^t - \sqrt{3 - \arcsin t}}{1 + t^{12} + \cos t + \log(1 - t)}$$

auf ihrem ganzen Definitionsbereich (und der umfasst jedenfalls eine Umgebung von 0) als stetig ausgemacht. ○

Ergänzungen und Beispiele

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $t_0 \in I$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{X}$ heisst **rechtsseitig stetig** im Punkt t_0, wenn die Einschränkung

$$f{\restriction}\bigl\{t \in I \bigm| t \geq t_0\bigr\}$$

an der Stelle t_0 stetig ist. Es gibt dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass folgendes zutrifft:

$$t_0 \leq t < t_0 + \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \ . \tag{8}$$

Analog wird die **linksseitige Stetigkeit** erklärt.

⑥ Die Funktion

$$\lfloor \cdot \rfloor : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad t \mapsto \lfloor t \rfloor := \max\bigl\{k \in \mathbb{Z} \bigm| k \leq t\bigr\}$$

(Fig. 3.2.5) ist in allen Punkten $t_0 \notin \mathbb{Z}$ stetig, in den ganzzahligen Punkten aber nur rechtsseitig stetig. Entsprechend ist

$$\lceil \cdot \rceil : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad t \mapsto \lceil t \rceil := \min\bigl\{k \in \mathbb{Z} \bigm| k \geq t\bigr\}$$

in den ganzzahligen Punkten nur linksseitig stetig. ○

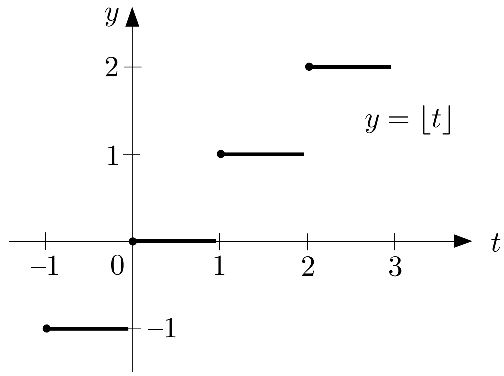

Fig. 3.2.5

Der nachstehende Satz ermöglicht die Herstellung von stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ aus mehreren stetigen Teilstücken, die der Reihe nach aufeinanderfolgen:

(3.8) *Es sei t_0 ein innerer Punkt des Intervalls I. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{X}$ ist genau dann stetig an der Stelle t_0 , wenn f dort beidseitig stetig ist.*

Ist f bei t_0 stetig, so sind auch die Einschränkungen von f auf $t \geq t_0$ bzw. $t \leq t_0$ dort stetig. — Umgekehrt: Es sei f an der Stelle t_0 beidseitig stetig, und es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass (8) zutrifft, und analog ein $\delta' > 0$ für die t-Werte links von t_0. Die Menge $U := \,]t_0 - \delta', t_0 + \delta[$ ist eine Umgebung von $t_0 \in \mathbb{R}$, und für alle $t \in U$ gilt $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$.

7 Die Funktion

$$f(t) := 1 - |t| \qquad (-1 \leq t \leq 1)$$

ist stetig und nimmt in den beiden Intervall-Endpunkten denselben Wert an. Sie lässt sich daher durch die Forderung

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad f(t+2) = f(t)$$

periodisch fortsetzen zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen “Sägezahnfunktion”.

Der folgende Satz ist oft nützlich:

(3.9) *Ist die Funktion $f\colon \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 stetig und ist $f(x_0) > 0$, so gibt es eine ganze Umgebung U von x_0 mit*

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in U \ .$$

Die Menge V aller positiven Zahlen ist eine Umgebung des Punktes $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Es gibt daher eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$, das heisst: $f(x) > 0$ für alle $x \in U$.

(8) Die Funktion

$$1_{\mathbb{Q}}: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad t \mapsto \begin{cases} 1 & (t \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (t \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

ist in allen Punkten unstetig. — Im folgenden Beispiel bezeichnet $\mathbb{D}$ die Menge der Binärzahlen, $\mathbb{D}_r := \{k/2^r \mid k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der r-stelligen Binärzahlen. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad t \mapsto \begin{cases} 1 & (t \in \mathbb{D}_0 = \mathbb{Z}) \\ \dfrac{1}{2^r} & \big(t \in \mathbb{D}_r \setminus \mathbb{D}_{r-1}\,,\ r \geq 1\big) \\ 0 & (t \notin \mathbb{D}) \end{cases}$$

(Fig. 3.2.6). Wir behaupten: Die Funktion f ist unstetig in allen Punkten von $\mathbb{D}$, aber stetig in allen Punkten $\tau \notin \mathbb{D}$.

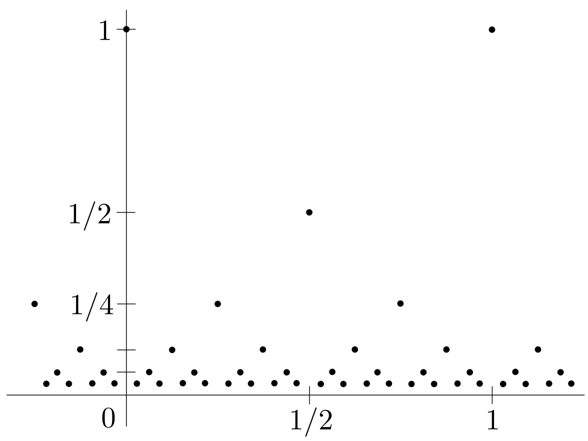

Fig. 3.2.6

⌜ Zum Beweis müssen wir auf die Definition der Stetigkeit zurückgreifen; Rechenregeln helfen da nichts.

Jede noch so kleine Umgebung eines Punktes $t_0 \in \mathbb{D}$ enthält Punkte τ, die nicht in $\mathbb{D}$ liegen. Wegen $f(t_0) > 0$ folgt mit **(3.9)**, dass f in einem derartigen Punkt t_0 unstetig ist.

Betrachte jetzt einen Punkt $\tau_0 \notin \mathbb{D}$. Dann ist jedenfalls $f(\tau_0) = 0$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $2^{-s} < \varepsilon$. Es sei

$$\delta := \min\big\{|t - \tau_0| \;\big|\; t \in \mathbb{D}_s\big\} > 0$$

der Abstand von τ_0 zur diskreten Menge $\mathbb{D}_s$. Dann ist $U := U_\delta(\tau_0)$ eine Umgebung von τ_0, die keine Punkte von $\mathbb{D}_s$ enthält. Hieraus folgt aber $0 \leq f(t) < \varepsilon$ für alle $t \in U$, denn f besitzt die Eigenschaft

$$t \notin \mathbb{D}_s \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq f(t) < \frac{1}{2^s}\,.$$

⌟

○

Aufgaben

1. Zeige: Ist $f : A \to \mathbb{X}$ im Punkt x_0 stetig, so ist f in einer geeigneten Umgebung von x_0 beschränkt.

2. Die Funktionen $f, g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ seien lipstetig. Sind dann auch die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und f/g $\big(g(x) \neq 0$ vorausgesetzt$\big)$ lipstetig? Wie steht es, wenn $[\,a, b\,]$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt wird?

3. (a) Zeige: Die Funktionen
$$\begin{aligned} \vee :\quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad (x, y) \mapsto x \vee y := \max\{x, y\}\,, \\ \wedge :\quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad (x, y) \mapsto x \wedge y := \min\{x, y\} \end{aligned}$$
sind stetig.

   (b) Sind $f, g : A \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $h : x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ stetig. Gilt das auch für unendlich viele Funktionen f_1, f_2, $\ldots$ (mit sup anstelle von max)?

4. (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und genüge der Funktionalgleichung
$$f(x^2) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})\ .$$
Zeige: f ist konstant.

   (b) Konstruiere eine nichtkonstante stetige Funktion $f : [\,2, \infty\,[\to \mathbb{R}$, die derselben Funktionalgleichung genügt.

5. Man finde eine stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$ mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

6. Die folgenden Aussagen über eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind so zu formulieren, dass dabei keine Negation ("nicht", "kein", "un-" oder ähnlich) verwendet wird:

   (a) f ist bei 1 unstetig; (b) $\neg\Big(\lim_{x\to 1} f(x) = 2\Big)$.

7. Man bestimme die Konstanten α, β sowie $f(-1)$, $f(1)$ derart, dass die Funktion
$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & (x < -1) \\ (\alpha + \beta)x & (-1 < x < 1) \\ x^2 + \alpha x - \beta & (x > 1) \end{cases}$$
auf der ganzen reellen Achse stetig wird, und zeichne den resultierenden Graphen von f.

3.3 Grenzwerte

Bezug zur Stetigkeit

Die Stetigkeit einer Funktion $f\colon A \to \mathbb{X}$ garantiert, dass sich die Funktion auf ihrem ganzen Definitionsbereich vernünftig verhält. Wenn wir das Verhalten von f am Rand von A (so weit der Rand nicht zu A gehört) oder in isolierten Ausnahmepunkten ξ (Beispiel: $\sin t/t$ bei $t := 0$) beschreiben wollen, so benötigen wir den Begriff des *Grenzwerts*.

Der betrachtete Punkt ξ, mag er nun zu A gehören oder nicht, muss jedenfalls ein **Häufungspunkt** der Menge A sein. Damit ist folgendes gemeint: Jede noch so kleine Umgebung $U(\xi)$ enthält Punkte $x \neq \xi$, die zu A gehören. Man kann es auch so ausdrücken: Jede **punktierte Umgebung**

$$\dot{U}(\xi) := U(\xi) \setminus \{\xi\}$$

schneidet die Menge A.

Die Frage nach dem Verhalten von $f(x)$, wenn "x nach ξ strebt", führt auf die Frage: Wie müsste man $f(\xi)$ vernünftiger Weise definieren? Doch so, dass f an der Stelle ξ stetig wird. Damit kommen wir auf die folgende Definition: Es sei ξ ein Häufungspunkt der Menge A. Die Funktion $f : A \to \mathbb{X}$ besitzt an der Stelle ξ den **Grenzwert** η, in Zeichen:

$$f(x) \to \eta \quad (x \to \xi)\,, \qquad\qquad \lim_{x\to\xi} f(x) = \eta\,,$$

wenn die Funktion

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \bigl(x \in A \setminus \{\xi\}\bigr) \\ \eta & (x = \xi) \end{cases} \tag{1}$$

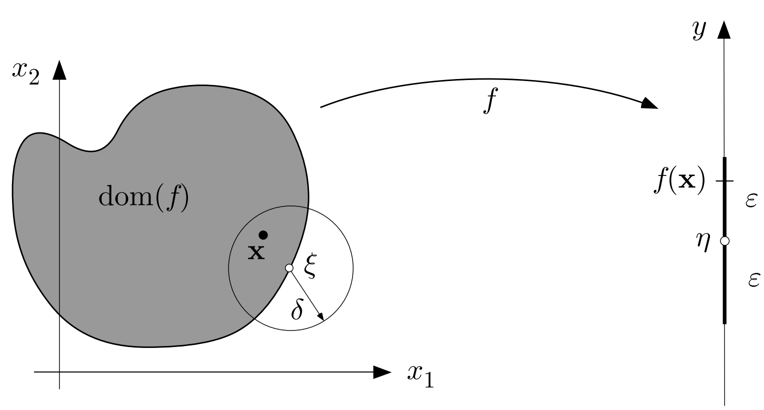

Fig. 3.3.1

an der Stelle ξ stetig ist. Dies ist äquivalent mit der folgenden (ε, δ)-Bedingung (Fig 3.3.1): Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass folgendes zutrifft:

$$0 < |x - \xi| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \eta| < \varepsilon \ .$$

Hierauf kommt man, indem man in der Stetigkeitsdefinition die Funktion $\tilde{f}$ gemäss (1) durch f und η ausdrückt $\bigl($die Bedingung $|\tilde{f}(\xi) - \tilde{f}(\xi)| < \varepsilon$ ist von selbst erfüllt$\bigr)$. Die Fig. 3.3.2 stellt den Sachverhalt im Graphenbild dar: Für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ muss der Graph von f innerhalb des schraffierten "ε-**Schlauches**" verlaufen, sobald x nahe genug bei ξ liegt. — Mit Umgebungen wird es noch einfacher: Zu jeder Umgebung V von η gibt es eine Umgebung U von ξ mit $f(\dot{U}) \subset V$ $\bigl($wobei hier $\dot{U}$ stillschweigend auf $\operatorname{dom}(f)$ eingeschränkt wurde$\bigr)$.

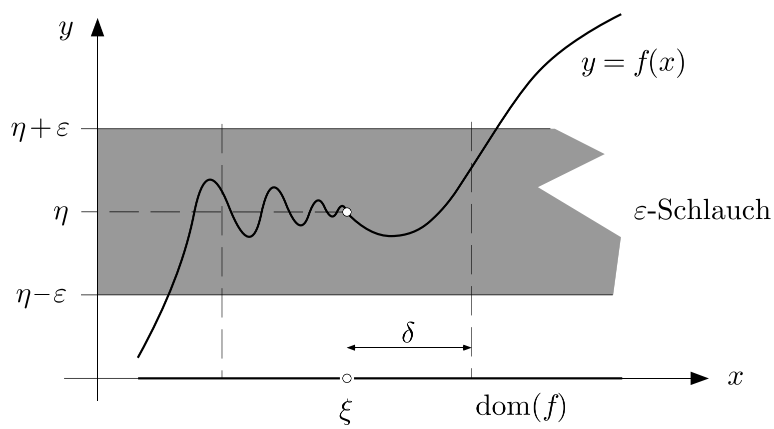

Fig. 3.3.2

(3.10) *Besitzt f für $x \to \xi$ einen Grenzwert, so ist dieser eindeutig bestimmt (und darf mit $\lim_{x\to\xi} f(x)$ bezeichnet werden).*

⌜ Zwei verschiedene Punkte η_1, $\eta_2 \in \mathbb{X}$ besitzen disjunkte Umgebungen V_1 und V_2. Gilt für $x \to \xi$ gleichzeitig $f(x) \to \eta_1$ und $f(x) \to \eta_2$, so gibt es Umgebungen U_1 und U_2 von ξ mit $f(\dot{U}_i) \subset V_i$ $(i = 1, 2)$. Die Menge $U := U_1 \cap U_2$ ist eine Umgebung von ξ; nach Voraussetzung über ξ gibt es daher einen Punkt $x \in \dot{U} \cap A$. Der zugehörige Funktionswert $f(x)$ läge nun gleichzeitig in V_1 und in V_2, was unmöglich ist. ⌟

① Wir zeigen: $\lim_{t\to 0} \sqrt{4+t} = 2$.

⌜ Aus

$$\sqrt{4+t} - 2 = \frac{(4+t) - 4}{\sqrt{4+t} + 2}$$

folgt

$$\left|\sqrt{4+t}-2\right| = \frac{|t|}{\sqrt{4+t}+2} \le \frac{|t|}{2} \qquad (t \ge -4) .$$

Ist daher ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gilt $\left|\sqrt{4+t}-2\right| < \varepsilon$ für alle t, die der Bedingung $0 < |t| < \delta := 2\varepsilon$ genügeen.

Beachte, dass ein an der Stelle ξ eventuell vorhandener Funktionswert $f(\xi)$ beim Grenzübergang $x \to \xi$ nicht angeschaut wird. Folgendes ist jedoch richtig und ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen:

(3.11) *Es sei* $\xi \in \mathrm{dom}\,(f)$ *ein Häufungspunkt von* $\mathrm{dom}\,(f)$*. Dann gilt:*

$$f \text{ stetig an der Stelle } \xi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi) .$$

② Betrachte für ein $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f(z) := z^n \qquad (z \in \mathbb{C})$$

sowie einen festen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Es geht um den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} ;$$

dabei wird h als komplexe Variable betrachtet. Aufgrund der binomischen Formel gilt

$$f(z_0+h)-f(z_0) = (z_0+h)^n - z_0^n = n\,z_0^{n-1}\,h + h^2 p(h) ,$$

wobei p ein gewisses Polynom in der Variablen h bezeichnet. Es folgt

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = n\,z_0^{n-1} + hp(h) =: g(h) \qquad (h \ne 0) ,$$

und da g stetig ist an der Stelle 0, erhält man schliesslich

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} g(h) = g(0) = n\,z_0^{n-1} .$$

Es scheint also, dass man das Monom z^n auch “im Komplexen” differenzieren kann.

(3.12) *Besitzt f für $x \to \xi$ einen Grenzwert $\eta \in \mathbb{X}$, so ist f in der Umgebung von ξ beschränkt, das heisst: Es gibt eine Umgebung $U(\xi)$ und ein C mit*

$$\forall x \in \dot{U}(\xi): \qquad |f(x)| \leq C \ .$$

⌜ Setze $C := |\eta| + 1$. Die Kugel $V := \bigl\{ y \in \mathbb{X} \bigm| |y| \leq C \bigr\}$ ist eine Umgebung von η; es gibt daher eine Umgebung $U(\xi)$ mit $f\bigl(\dot{U}(\xi)\bigr) \subset V$. ⌟

③ Betrachte die Funktion

$$f(t) := \frac{t^3 - 12t + 16}{t^2 - 5t + 6}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. Für alle $t \neq 2, 3$ gilt

$$f(t) = \frac{(t-2)(t^2 + 2t - 8)}{(t-2)(t-3)} = \frac{t^2 + 2t - 8}{t - 3} =: g(t) \ .$$

Da g an der Stelle 2 stetig ist, ergibt sich mit **(3.11)**:

$$\lim_{t \to 2} f(t) = \lim_{t \to 2} g(t) = g(2) = 0 \ .$$

Der $\lim_{t \to 3} g(t)$ $\bigl($und damit auch der $\lim_{t \to 3} f(t)\bigr)$ existiert hingegen nicht, denn $g(t)$ ist für $t \to 3$ unbeschränkt (s.u.). ○

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ besitzt an der Stelle b den **linksseitigen Grenzwert** η, in Zeichen:

$$f(t) \to \eta \quad (t \to b-) \ , \qquad \lim_{t \to b-} f(t) = \eta \ , \qquad f(b-) = \eta \ ,$$

wenn die Einschränkung von f auf t-Werte links von b für $t \to b$ gegen η konvergiert. Es gibt dann zu jedem $\varepsilon > 0$ (zu jeder Umgebung V von η) ein $\delta > 0$ (ein $b' < b$) mit

$$b - \delta < t < b \quad (b' < t < b) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t) - \eta| < \varepsilon \quad \bigl(f(t) \in V\bigr) \ .$$

Analog wird der **rechtsseitige Grenzwert** von f an einer Stelle a erklärt. — Folgendes ist ziemlich klar:

(3.13) *Eine Funktion $f\colon\ ]\, t_0 - h, t_0 + h\, [\to \mathbb{X}$ ist genau dann stetig an der Stelle t_0, wenn gilt:*

$$f(t_0-) = f(t_0+) = f(t_0) \ .$$

Existieren die beiden einseitigen Grenzwerte $f(t_0-)$, $f(t_0+)$ und sind sie verschieden, so besitzt f bei t_0 eine **Sprungstelle**. Ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ stetig bis auf isolierte Sprungstellen $\bigl($Beispiel: die Funktion $t \to \lfloor t \rfloor\bigr)$, so heisst f **stückweise stetig**.

Rechenregeln für Grenzwerte

Die allgemeine Definition des Grenzwerts benötigen wir vor allem bei theoretischen Betrachtungen. Zur tatsächlichen Berechnung von Grenzwerten bedienen wir uns in erster Linie eines Vorrats an “Standardgrenzwerten”, zum Beispiel

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1\,,$$

sowie einer Sammlung von Rechenregeln und Tricks, zum Beispiel der Regel von Bernoulli–de l’Hôpital (s.u.).

In den folgenden Rechenregeln besitzen alle angesetzten Funktionen den gemeinsamen Definitionsbereich $A\subset\mathbb{X}$, der Punkt ξ ist ein Häufungspunkt von A, und es geht um den Grenzübergang $x\to\xi$.

(3.14) (a) *Es sei* $\mathbf{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_m)$ *eine vektorwertige Funktion. Dann gilt*

$$\mathbf{f}(x)\to\mathbf{a}\qquad\Longleftrightarrow\qquad f_i(x)\to a_i\quad(1\le i\le m)\ .$$

(b)
$$\mathbf{f}(x)\to\mathbf{0}\quad\Longleftrightarrow\quad|\mathbf{f}(x)|\to 0\ .$$

(c) *Aus* $f(x)\to a$ *und* $g(x)\to b$ *folgt*

$$f(x)+g(x)\ \to\ a+b\,,\qquad \lambda f(x)\ \to\ \lambda a\quad(\lambda\in\mathbb{R})\,,$$

$$f(x)\cdot g(x)\ \to\ a\cdot b\,,\qquad \frac{f(x)}{g(x)}\ \to\ \frac{a}{b}\quad(\text{falls } b\ne 0)\ .$$

(d) *Aus* $f(x)\to a$ *folgt*

$$|f(x)|\ \to\ |a|\,,\qquad \overline{f(x)}\ \to\ \overline{a}\ .$$

(e) *Ist die Funktion* f *in einer punktierten Umgebung* $\dot{U}$ *von* ξ *beschränkt und gilt* $\lim_{x\to\xi} g(x)=0$, *so gilt auch*

$$\lim_{x\to\xi}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)=0\ .$$

(f) *Gilt in einer punktierten Umgebung* $\dot{U}$ *von* ξ *die Abschätzung*

$$|\mathbf{f}(x)|\le g(x)$$

und ist $\lim_{x\to\xi} g(x)=0$, *so gilt auch* $\lim_{x\to\xi}\mathbf{f}(x)=\mathbf{0}$.

(g) *Ist* $\lim_{x\to\xi} f(x) = a$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = b$ *und gilt für alle* x *in einer punktierten Umgebung* $\dot{U}$ *von* ξ *die Ungleichung* $f(x) \leq g(x)$, *so folgt* $a \leq b$.

(h) *Ist*

$$\lim_{x\to\xi} f_1(x) = \lim_{x\to\xi} f_2(x) = a$$

und gilt für alle x *in einer punktierten Umgebung* $\dot{U}$ *von* ξ *die Eingabelung*

$$f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x) \ ,$$

so gilt auch $\lim_{x\to\xi} g(x) = a$.

⌜ (a): Aufgrund von Satz **(3.5)** ist die Funktion $\tilde{\mathbf{f}}$ im Punkt ξ genau dann stetig, wenn jede einzelne Funktion $\tilde{f}_i$ dort stetig ist.
(b): Es gilt

$$\mathbf{f}(x) \in U_\varepsilon(\mathbf{0}) \subset \mathbb{X} \quad \iff \quad |\mathbf{f}(x)| \in U_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R} \ .$$

(c) und (d): Wende Satz **(3.7)** auf die Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ an. — (e) Nach Voraussetzung über f gibt es eine Umgebung U von ξ und ein $C > 0$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in \dot{U}$. Nach Voraussetzung über g gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung V von ξ mit $|g(x)| < \varepsilon/C$ für alle $x \in \dot{V}$. Die Menge $W := U \cap V$ ist eine Umgebung von ξ, und für alle $x \in \dot{W}$ gilt

$$|f(x) \cdot g(x)| < C\,\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon \ .$$

(f): Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung V von ξ mit $g(x) < \varepsilon$ für alle $x \in \dot{V}$. Die Menge $W := U \cap V$ ist eine Umgebung von ξ, und für alle $x \in \dot{W}$ gilt

$$|\mathbf{f}(x)| \leq g(x) < \varepsilon \ .$$

(g): Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ lassen sich Umgebungen U_i $(i = 1, 2)$ von ξ finden, so dass gleichzeitig gilt

$$f(x) > a - \varepsilon \quad (x \in \dot{U}_1) \ , \qquad g(x) < b + \varepsilon \quad (x \in \dot{U}_2) \ .$$

Die Menge $V := U \cap U_1 \cap U_2$ ist eine Umgebung von ξ; somit gibt es einen Punkt $x \in \dot{V} \cap A$. Für diesen Punkt x hat man

$$a - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < b + \varepsilon \ ;$$

folglich ist $a - b < 2\varepsilon$. Diese Ungleichung kann nur dann für alle $\varepsilon > 0$ zutreffen, wenn in Wirklichkeit $a - b \leq 0$, das heisst: $a \leq b$ ist.
(h): Zu vorgegebenem ε gibt es Umgebungen U_i $(i = 1, 2)$ von ξ, so dass gleichzeitig gilt:

$$f_1(x) > a - \varepsilon \quad (x \in \dot{U}_1) \ , \qquad f_2(x) < a + \varepsilon \quad (x \in \dot{U}_2) \ .$$

Die Menge $V := U \cap U_1 \cap U_2$ ist eine Umgebung von ξ. Für alle $x \in \dot{V}$ gilt

$$a - \varepsilon < f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x) < a + \varepsilon\ ;$$

folglich ist $|g(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x \in \dot{V}$. $\lrcorner$

Hinweis: Diese Regeln werden wir im allgemeinen ohne Vorwarnung oder Fingerzeig benutzen.

④ Die auf $\dot{\mathbb{R}}$ definierte Funktion $f(t) := \sin(1/t)$ oszilliert in jeder Umgebung von $t := 0$ unendlich oft zwischen -1 und 1 (siehe die Fig. 3.3.3). Es ist daher anschaulich klar, dass der Grenzwert $\lim_{t\to 0} f(t)$ nicht existiert. Ein formeller Beweis hierfür ergibt sich am einfachsten durch Betrachtung von geeigneten Folgen $t_n \to 0$ (s.u.). — Hingegen ist

$$\lim_{t\to 0}\Bigl(t \sin\frac{1}{t}\Bigr) = 0\ . \tag{2}$$

Dies folgt aus $|\sin(1/t)| \leq 1 \quad (t \neq 0)$ und $\lim_{t\to 0} t = 0$. ○

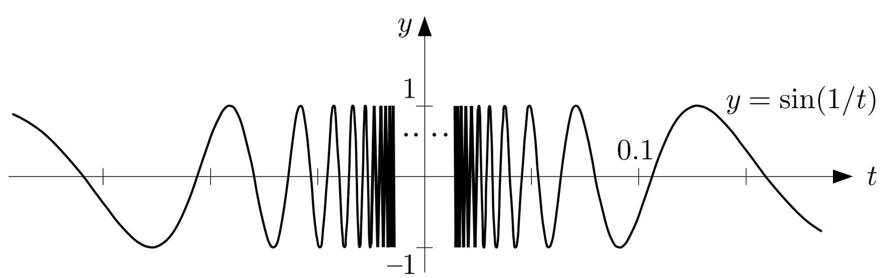

Fig. 3.3.3

Als Analogon zum Satz **(3.2)** über die Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen beweisen wir einen Satz über "ineinandergeschachtelte Grenzwerte":

(3.15) *Besitzen die Funktionen $f: A \to B$ und $g: B \to C$ die Grenzwerte*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta\ , \qquad \lim_{y\to\eta} g(y) \quad (=: \zeta)\ ,$$

und ist g stetig im Punkt η, falls f diesen Wert überhaupt annimmt, so gilt

$$\lim_{x\to\xi} g\bigl(f(x)\bigr) = \lim_{y\to\eta} g(y)\ .$$

Um einen Grenzwert $\lim_{x\to\xi} g\bigl(f(x)\bigr)$ zu berechnen, darf man also in dem verschachtelten Ausdruck $g\bigl(f(x)\bigr)$ die innere Funktion $f(x)$ durch eine neue Variable y substituieren und y gegen den Grezwert η der inneren Funktion streben lassen.. — *Anmerkung:* Die Zusatzbedingung “und ist g stetig ...” ist in den typischen Anwendungsfällen offensichtlich erfüllt, und wir verzichten darauf, sie jedesmal zu überprüfen. Es geht aber nicht ohne, wie das folgende Beispiel zeigt.

⑤ Es sei

$$f(x) :\equiv 1\,, \qquad g(y) := \begin{cases} 2 & (y = 1) \\ 3 & (y \neq 1) \end{cases} \quad .$$

Dann ist $g\bigl(f(x)\bigr) \equiv 2$ und folglich $\lim_{x\to 0} g\bigl(f(x)\bigr) = 2$. Die unvorsichtige Substitution der inneren Funktion liefert aber wegen $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ das falsche Resultat $\lim_{y\to 1} g(y) = 3$ $(\neq 2)$. ○

⌜ Zu jeder Umgebung W von ζ gibt es eine Umgebung V von η mit

$$g(\dot{V}) \subset W\ . \tag{3}$$

Ist g stetig an der Stelle η und folglich $g(\eta) = \zeta$, so gilt sogar

$$g(V) \subset W\ . \tag{4}$$

Zweitens gibt es eine Umgebung U von ξ mit $f(\dot{U}) \subset V$. Falls f den Wert η nicht annimmt, so gilt sogar $f(\dot{U}) \subset \dot{V}$, und mit (3) ergibt sich:

$$(g \circ f)(\dot{U}) = g\bigl(f(\dot{U})\bigr) \subset g(\dot{V}) \subset W\ .$$

Sollte f den Wert η tatsächlich annehmen, so gilt (4), und wir erhalten analog

$$(g \circ f)(\dot{U}) = g\bigl(f(\dot{U})\bigr) \subset g(V) \subset W\ .$$ ⌟

⑥ Es ist $\lim_{t\to 0} \sqrt{4 + t\sin(1/t)} = 2$.

⌜ Nach (2) gilt $\lim_{t\to 0}\bigl(t\sin(1/t)\bigr) = 0$; zweitens haben wir in Beispiel ① bewiesen: $\lim_{y\to 0} \sqrt{4+y} = 2$ — anders ausgedrückt: Die Funktion $g(y) := \sqrt{4+y}$ ist an der Stelle 0 stetig. Somit folgt

$$\lim_{t\to 0} \sqrt{4 + t\sin(1/t)} = g(0) = 2\ .$$

○

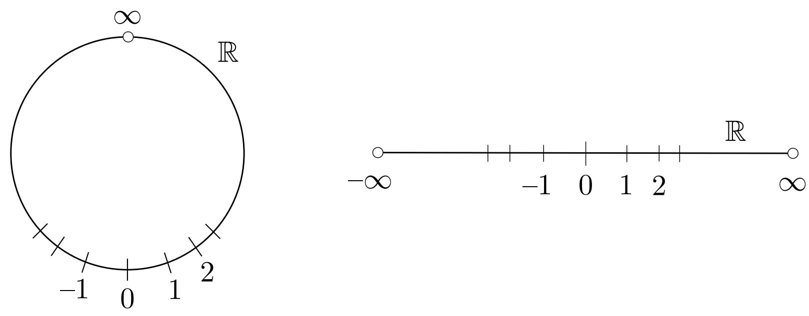

Fig. 3.3.4

Abschliessung von $\mathbb{R}$

Die sowohl nach unten wie nach oben offene reelle Achse $\mathbb{R}$ lässt sich auf zwei Arten sinnvoll "abschliessen" (Fig. 3.3.4):

(a) indem man einen einzigen Punkt ∞ hinzufügt, in den die beiden Enden von $\mathbb{R}$ hineinlaufen , oder

(b) indem man zwei getrennte Punkte $-\infty$ und ∞ hinzufügt.

Für die reelle Analysis halten wir uns an die zweite Variante und bezeichnen die Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ als **abgeschlossene reelle Achse**. (In der projektiven Geometrie und in der komplexen Analysis erweist sich hingegen die "Einpunkt-Kompaktifizierung" von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ als vorteilhafter.)

Wohlgemerkt: Die beiden **uneigentlichen Punkte** $-\infty$ und ∞ sind keine Zahlen, mit denen man rechnen, sondern "hinzugedachte" Objekte, die man auf sinnvolle und logisch konsistente Weise in Grenzwertüberlegungen einbeziehen kann. Definitionsgemäss gilt zum Beispiel

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad -\infty < x < \infty ,$$

womit die auf $\mathbb{R}$ vorhandene Ordnung sinnvoll auf $\bar{\mathbb{R}}$ fortgesetzt ist. Jede nichtleere Teilmenge $X \subset \bar{\mathbb{R}}$ besitzt ein wohlbestimmtes Supremum $\sup X \in \bar{\mathbb{R}}$.

Vor allem haben die beiden Punkte $-\infty$ und ∞ Umgebungen, die der ordinären Zahlenwelt angehören: Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ ist eine **Umgebung von** ∞, wenn U alle hinreichend grossen reellen Zahlen enthält, das heisst: wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$t > M \quad \Longrightarrow \quad t \in U \ .$$

(Eine Umgebung U von ∞ sollte an sich den Punkt ∞ mit enthalten. Es hat sich eingebürgert, schon eine punktierte Umgebung von ∞ als Umgebung von ∞ zu bezeichnen.) Die Mengen

$$U_M(\infty) := \{t \in \mathbb{R} \mid t > M\}$$

bilden das Pendant zu den ε-Umgebungen der gewöhnlichen Punkte. — Der Durchschnitt von *endlich* vielen Umgebungen von ∞ ist immer noch eine Umgebung von ∞.

Analog wird bei $-\infty$ definiert.

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ∞ als **(uneigentlichen) Häufungspunkt**, wenn jede Umgebung von ∞ die Menge A schneidet, will sagen: wenn A nach oben unbeschränkt ist.

⑦ Die Menge

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1]$$

ist keine Umgebung von ∞. — Die Menge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ besitzt ∞ als uneigentlichen Häufungspunkt. — Die Nullstellen der Sinusfunktion folgen sich im Abstand π und häufen sich im Unendlichen. ○

Uneigentliche Grenzlagen und Grenzwerte

Damit sind wir in der Lage, den Grenzübergang $t \to \infty$ zu betrachten. Es sei ∞ ein Häufungspunkt der Menge $A \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{X}$ besitzt für $t \to \infty$ den Grenzwert η, in Zeichen:

$$f(t) \to \eta \quad (t \to \infty)\,, \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = \eta\,,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ (zu jeder Umgebung V von η) ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$t > M \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t) - \eta| < \varepsilon \quad \bigl(f(t) \in V\bigr)\,.$$

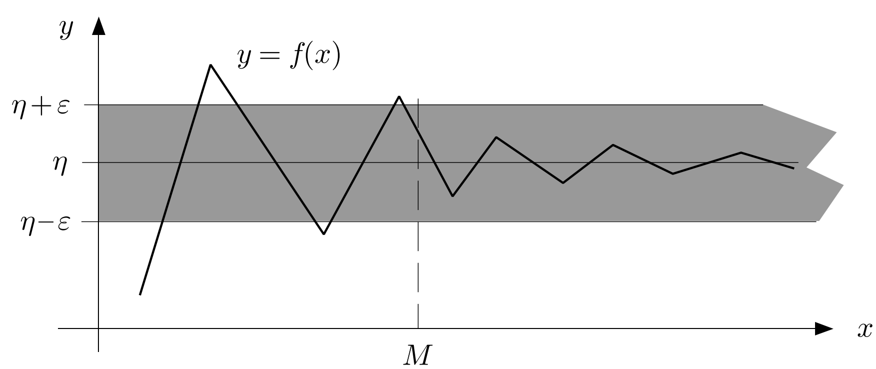

Fig. 3.3.5

Die Sätze **(3.10)**, **(3.12)** und **(3.14)** gelten auch für den Grenzübergang $t \to \infty$. In den Beweisen war jeweils nur von "punktierten Umgebungen des Punktes ξ" die Rede, und das können ebensogut Umgebungen von ∞ sein.

Wir haben eben für die unabhängige Variable t den Grenzübergang $t \to \infty$ beschrieben. Es ist aber auch möglich, *wertseitig* dem Sachverhalt

$$f(x) \to \infty \qquad (x \to \xi)$$

einen präzisen Sinn zu erteilen. Es sei also $f : \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und ξ ein eigentlicher oder uneigentlicher Häufungspunkt von $\operatorname{dom}(f)$. Wir sagen, f besitze an der Stelle ξ den **uneigentlichen Grenzwert** ∞, in Zeichen:

$$f(x) \to \infty \quad (x \to \xi)\,, \qquad \lim_{x \to \xi} f(x) = \infty\,,$$

wenn es für jede noch so grosse Schranke $C \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ (eine Umgebung U von ξ) gibt mit

$$0 < |x - \xi| < \delta \quad (x \in \dot{U}) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > C$$

(siehe die Fig. 3.3.6). Der Graph von f muss also für jedes noch so grosse C oberhalb des Niveaus C verlaufen, sobald x nahe genug bei ξ (bzw. im Fall $\xi := \infty$: hinreichend weit rechts) liegt. Natürlich ist alles so eingerichtet, dass gilt:

$$\lim_{t \to \infty} t = \infty\,, \qquad \lim_{t \to \infty} (-t) = -\infty\,.$$

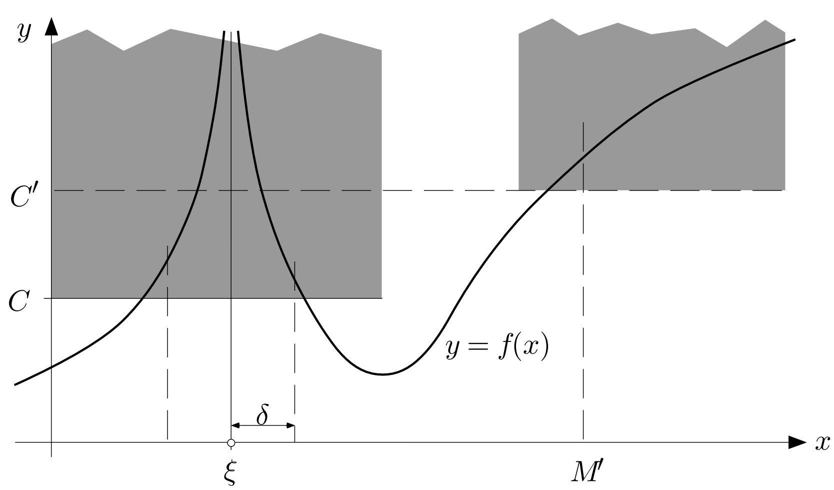

Fig. 3.3.6

Vereinbarung: Ist irgendwo $-\infty$ oder ∞ als Grenzwert (oder gar als Funktionswert) zugelassen, so wird das an der betreffenden Stelle ausdrücklich gesagt. Ohne diesbezüglichen Hinweis wird unter "Konvergenz" immer Konvergenz gegen einen endlichen Wert η verstanden.

Der Satz **(3.15)** handelt von der "Konvergenz an sich", also auch von uneigentlicher Konvergenz: Jeder der Punkte ξ, η, ζ in **(3.15)** darf auch ein uneigentlicher Punkt sein.

⑧ Es gilt

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{t} = 0\,, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t} = \infty\,, \qquad \lim_{t\to 0-}\frac{1}{t} = -\infty\ . \tag{6}$$

(5): Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ist $t > M := 1/\varepsilon$, so folgt $0 < 1/t < 1/M = \varepsilon$. Ähnlich schliesst man für $t \to -\infty$.

(6): Es sei ein $M > 0$ vorgegeben. Ist $0 < t < \delta := 1/M$, so folgt $1/t > M$. Ähnlich schliesst man für $t \to 0-$.

Wenn man $\lim_{y\to\infty} 2^y = \infty$ für den Moment akzeptiert, so ergibt sich zum Beispiel weiter:

$$\lim_{t\to 0+} 2^{1/t} = \lim_{y\to\infty} 2^y = \infty\,,$$
$$\lim_{t\to 0-} 2^{1/t} = \lim_{y\to-\infty} 2^y = \lim_{u\to\infty} 2^{-u} = \lim_{u\to\infty}\bigl(1/2^u\bigr) = 0\ .$$

○

Für uneigentliche Konvergenz gelten anstelle von **(3.14)** die folgenden besonderen Rechenregeln, deren Beweis wir dem Leser überlassen:

(3.16) (a) *Gilt* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \infty$ *und ist* g *in einer punktierten Umgebung von* ξ *nach unten beschränkt, so ist auch* $\lim_{x\to\xi}\bigl(f(x)+g(x)\bigr) = \infty$.

(b) *Gilt* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \infty$ *und ist* g *in einer punktierten Umgebung von* ξ *nach unten beschränkt durch ein* $C > 0$, *so gilt auch* $\lim_{x\to\xi}\bigl(f(x)g(x)\bigr) = \infty$.

(c) $$\lim_{x\to\xi}|f(x)| = \infty \qquad\Longrightarrow\qquad \lim_{x\to\xi}\frac{1}{f(x)} = 0\ .$$

(d) *Gilt* $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ *und gibt es eine Umgebung* U *von* ξ *mit* $f(x) > 0$ *für alle* $x \in \dot U$, *so gilt* $\lim_{x\to\xi} 1/f(x) = \infty$.

③ (Forts.) Der Zähler von g besitzt an der Stelle $t := 3$ den Wert 7 und ist daher in einer geeigneten Umgebung dieser Stelle ≥ 6. Wegen

$$\lim_{t \to 3+} \frac{1}{t-3} = \lim_{y \to 0+} \frac{1}{y} = \infty$$

folgt daher mit Regel **(3.16)**(b):

$$\lim_{t \to 3+} f(t) = \lim_{t \to 3+} g(t) = \infty$$

und analog $\lim_{t \to 3-} f(t) = -\infty$. ○

Aufgaben

1. Die Funktion $f : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) := \inf\bigl\{|nx-1| \bigm| n \in \mathbb{N}\bigr\} \ .$$

   Skizziere den Graphen von f (mindestens für $0.2 \leq x \leq 1$) und zeige:
   (a) f ist stetig in $]\,0,1\,]$, (b) $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$.

2. Bestimme die folgenden Grenzwerte, falls vorhanden:
   (a) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{x^3+27}{x^4-81}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^p-1}{x^q-1}$ $(p,\, q \in \mathbb{N}^*)$,
   (c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sin\bigl(\sqrt{x}\bigr)$, (d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sin\left(\frac{2x-1}{\bigl(\sqrt{x}+1\bigr)^3}\right)$,
   (e) $\displaystyle\lim_{x \to 2+} \frac{x^2-14x+24}{|x-2|+|x^2-4|}$, (f) $\displaystyle\lim_{x \to 2-} \frac{x^2-14x+24}{|x-2|+|x^2-4|}$,
   (g) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \Bigl(\sqrt{x(x+a)}-x\Bigr)$.

3. Bestimme die Parameter α, β, γ so, dass

$$\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}-(\alpha x^2+\beta x+\gamma) \ \to \ 0 \qquad (x \to \infty) \ .$$

4. Betrachte die Funktion

$$f(x) := x^\alpha + x^\beta$$

   für verschiedene Werte der Parameter α und β. Für welche Werte von α und β besitzt der Graph von f für $x \to \infty$ eine **Asymptote**, das heisst: Für welche Werte von α und β gibt es eine lineare Funktion $l(x) := mx+c$ mit $f(x)-l(x) \to 0$ $(x \to \infty)$? Man zeichne die sich ergebende Punktmenge in der (α,β)-Ebene.

3.4 Folgen

Ein mathematisches Konstruktionswerkzeug

Im Grunde genommen können wir bis dahin nur *rationale* Zahlen und *rationale* Funktionen in rechtsgenügender Weise erfassen und manipulieren bzw. evaluieren. Quadratwurzeln, allgemein: n-te Wurzeln, sind zwar in $\mathbb{R}$ vorhanden, und die Wurzelfunktionen sind auch stetig (s.u.), aber wir haben kein systematisches Verfahren, das den Wurzelexponenten n und ein beliebiges $c \geq 0$ als Input akzeptiert und Zahlendaten vorgeschriebener Genauigkeit für $\sqrt[n]{c}$ produziert. Oder: Wie rechnet ein Taschenrechner $\sin 23.5°$ aus?

Wir benötigen ein allgemeines Konstruktionswerkzeug für "analytische Objekte", Zahlen oder Funktionen, und zwar in zweierlei Hinsicht:

— Erstens geht es darum, neuartige Objekte begrifflich zu konzipieren und formelmässig darzustellen.

Bsp: $\quad e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

— Zweitens sollte man instandgesetzt werden, diese Objekte in endlich vielen Schritten mit jeder wünschbaren Genauigkeit (numerisch) zu berechnen.

Ein derartiges Konstruktionswerkzeug ist der Folgenbegriff und im Anschluss daran die Idee der "Reihe".

Man kann den Definitionsbereich $\mathbb{N}$ einer Folge

$$x_. : \quad \mathbb{N} \to \mathbb{X}, \qquad k \mapsto x_k \tag{1}$$

als eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit dem uneigentlichen Häufungspunkt ∞ betrachten oder als einen Grundbereich *sui generis* — jedenfalls heisst die Folge (1) **konvergent** gegen den **Grenzwert** $\xi \in \mathbb{X}$, in Zeichen:

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \xi ,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein k_0 $\big(= k_0(\varepsilon)\big)$ gibt mit

$$k > k_0 \quad \Longrightarrow \quad |x_k - \xi| < \varepsilon .$$

Existiert kein derartiges $\xi \in \mathbb{X}$, so heisst die Folge (1) **divergent**.

① Die Folgen $k \mapsto k^2$ und $k \mapsto (-1)^k$ sind divergent. Die Formel

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$$

ist eine unmittelbare Konsequenz von 3.3.(5) und lässt wie folgt direkt beweisen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $k_0 > 1/\varepsilon$. Ist $k > k_0$, so gilt

$$0 < \frac{1}{k} < \frac{1}{k_0} < \varepsilon .$$

○

Rechenregeln und Beispiele

Die Rechenregeln **(3.14)** erhalten im jetzigen Zusammenhang die folgende Gestalt:

(3.17) (a) *Es sei* $k \mapsto \mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{m,k})$ *eine vektorwertige Folge. Dann gilt*

$$\mathbf{x}_k \to \mathbf{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_{i,k} \to a_i \quad (1 \le i \le m) \ .$$

(b)
$$\mathbf{x}_k \to \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad |\mathbf{x}_k| \to 0 \ .$$

(c) *Aus* $x_k \to a$ *und* $y_k \to b$ *folgt*

$$x_k + y_k \ \to \ a + b\,, \qquad \lambda x_k \ \to \ \lambda a \quad (\lambda \in \mathbb{R})\,,$$
$$x_k \cdot y_k \ \to \ a \cdot b\,, \qquad \frac{x_k}{y_k} \ \to \ \frac{a}{b} \quad (\text{falls } b \ne 0)\ .$$

(d) *Aus* $x_k \to a$ *folgt*

$$|x_k| \ \to \ |a|\,, \qquad \overline{x_k} \ \to \ \overline{a}\ .$$

(e) *Ist die Folge* $x_.$ *beschränkt und gilt* $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$, *so gilt auch*

$$\lim_{k\to\infty} \bigl(x_k \cdot y_k\bigr) = 0\ .$$

(f) *Gilt für alle hinreichend grossen* k *die Abschätzung* $|\mathbf{x}_k| \le r_k$ *und ist* $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, *so folgt* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

(g) *Ist* $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim_{k\to\infty} y_k = b$ *und gilt für alle hinreichend grossen* k *die Ungleichung* $x_k \le y_k$, *so folgt* $a \le b$.

(h) *Ist*
$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \xi$$
und gilt für alle hinreichend grossen k *die Eingabelung*

$$a_k \le x_k \le b_k\,,$$

so gilt auch $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$.

② Für die Folge
$$x_k := \frac{(k+1)(3k^2-4)}{(2k-5)^3}$$
erhält man
$$x_k = \frac{\bigl(1+\frac{1}{k}\bigr)\bigl(3-\frac{4}{k^2}\bigr)}{\bigl(2-\frac{5}{k}\bigr)^3} \ \to \ \frac{1\cdot 3}{2^3} = \frac{3}{8} \qquad (k \to \infty)\ .$$

○

③ Es seien $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, und $r \in \mathbb{N}$ zwei fest vorgegebene Zahlen. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left(k^r\, q^k\right) = 0\;;$$

insbesondere ist $\lim_{k\to\infty} q^k = 0$.

⌜ Ist $q = 0$, so ist nichts zu beweisen. Wegen $|k^r\, q^k| = k^r |q|^k$ genügt es daher, das folgende zu zeigen: Für beliebiges $\alpha \in\,]\,0,1\,[$ und beliebiges $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} (k^r \alpha^k) = 0\;. \tag{2}$$

Es ist $1/\alpha > 1$, also $1/\alpha = 1 + \tau$ für ein $\tau > 0$. Hieraus folgt

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k = (1+\tau)^k \geq 1 + k\tau$$

und somit

$$0 < \alpha^k \leq \frac{1}{1+k\tau} < \frac{1}{k\tau}\;. \tag{3}$$

Da hier die rechte Seite mit $k \to \infty$ gegen 0 konvergiert, ist die Behauptung (2) für $r = 0$ als richtig erwiesen. Aus (3) folgt ferner die Existenz eines C mit $k\alpha^k \leq C$ für alle k.

Wir nehmen nun an, (2) sei richtig für r und beliebiges α. Für den Schluss von r auf $r+1$ wählen wir ein β im Intervall $]\,\alpha, 1\,[$, zum Beispiel $\beta := (\alpha+1)/2$. Dann ist $\alpha/\beta < 1$; es gibt daher ein C' mit

$$0 \leq k^{r+1}\alpha^k = k\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot\, k^r\beta^k \leq C' \cdot\, k^r\beta^k\;.$$

Nach Induktionsvoraussetzung strebt hier der zweite Faktor rechter Hand mit $k \to \infty$ gegen 0. ⌟

○

④ Es sei $x_{\bullet} = (x_1, x_2, \ldots)$ eine konvergente Folge in $\mathbb{X}$ mit Grenzwert ξ. Betrachte die Folge $a_{\bullet}$ der sukzessiven arithmetischen Mittel

$$a_n := \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\;.$$

Wir behaupten: Es gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n = \xi$.

⌜ Anstelle der Folge $x_{\bullet}$ betrachten wir die gegen 0 konvergente Folge $y_k := x_k - \xi$. Wie man leicht einsieht, ist

$$a_n = \xi + \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\;. \tag{4}$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k_0 mit $|y_k| < \varepsilon$ für alle $k > k_0$. Setzt man $\sum_{k=1}^{k_0} |y_k| =: s$, so gilt für alle $n > k_0$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |y_k| \leq s + (n - k_0)\varepsilon \leq s + n\varepsilon \ .$$

Hieraus folgt

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right| \leq \frac{s}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon \qquad \left(n > \frac{s}{\varepsilon}\right) \ .$$

Dies beweist mit (4) die Behauptung. ┘

○

⑤ Es gelten die Beziehungen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \ , \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad (a > 0) \ . \tag{6}$$

(Für die Existenz der n-ten Wurzeln s.u.)

┌ Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist $0 < \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1$ und folglich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0 \ .$$

Es gibt daher ein n_0 mit $n/(1+\varepsilon)^n < 1$ für alle $n > n_0$, und hieraus schliesst man auf

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \qquad (n > n_0) \ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist damit (5) bewiesen. Weiter gilt

$$\frac{1}{n} \leq a \leq n \qquad \forall n \geq C := \max\left\{a, \frac{1}{a}\right\} ;$$

somit ist

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n} \qquad (n \geq C) \ ,$$

und (6) folgt mit Hilfe von **(3.17)**(h). ┘

○

⑥ Es seien p nichtnegative Zahlen a_i vorgegeben. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n} = \max\{a_1, \ldots, a_p\} \ . \tag{7}$$

⌜ Bezeichnen wir die rechte Seite von (7) mit α, so gilt

$$\alpha^n \leq a_1^n + \ldots + a_p^n \leq p\alpha^n \leq n\,\alpha^n \qquad (n \geq p) \ .$$

Hieraus folgt

$$\alpha \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n} \leq \sqrt[n]{n}\,\alpha \qquad (n \geq p)$$

und damit die Behauptung. ⌟

○

Eine Folge $x.$ von reellen Zahlen heisst **uneigentlich konvergent** gegen ∞, wenn es zu jedem M ein k_0 gibt mit $x_k > M$ für alle $k > k_0$. Die Rechenregeln **(3.16)** gehen ohne weiteres über in die Regeln

(3.18) (a) *Gilt* $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$ *und ist die Folge* $y.$ *nach unten beschränkt, so ist auch* $\lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = \infty$.

(b) *Gilt* $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$ *und ist die Folge* $y.$ *nach unten beschränkt durch ein* $C > 0$, *so gilt auch* $\lim_{k\to\infty}(x_k \cdot y_k) = \infty$.

(c)
$$\lim_{k\to\infty} |x_k| = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} = 0 \ .$$

(d) *Gilt* $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ *und ist* $x_k > 0$ *für alle hinreichend grossen* k, *so folgt*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} = \infty \ .$$

Wir schliessen mit einem allgemeinen Übertragungsprinzip. Es erlaubt, durch alleinige Betrachtung von Folgen festzustellen, ob eine Funktion in einem gegebenen Punkt stetig ist oder nicht.

(3.19) *Eine Funktion* $f : A \to \mathbb{X}$ *ist genau dann stetig im Punkt* $\xi \in A$, *wenn für jede gegen* ξ *konvergente Folge* $x.$ *auf* A *gilt:*

$$f(x_k) \ \to \ f(\xi) \qquad (k \to \infty) \ .$$

⌜ Ist f im Punkt ξ stetig und $x.$ eine Folge auf A mit $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$, so folgt mit Satz **(3.15)** (über ineinandergeschachtelte Grenzwerte):

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi) \ ,$$

wie behauptet. — Ist aber f unstetig im Punkt ξ, so gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ ohne zugehöriges $\delta > 0$, insbesondere genügt keine der Zahlen $\delta := 1/k$, $k \geq 1$. Es gibt daher für jedes $k \geq 1$ einen Punkt $x_k \in U_{1/k} \cap A$ mit $|f(x_k) - f(\xi)| \geq \varepsilon_0$. Die x_k bilden eine Folge $x.$ auf A mit $x_k \to \xi$, aber $f(x_k) \not\to f(\xi)$. ⌟

Ähnlich beweist man:

(3.20) *Es sei ξ ein eigentlicher oder ein uneigentlicher Häufungspunkt der Menge $A := \mathrm{dom}\,(f)$. Dann ist die Aussage*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$$

($\eta = \pm\infty$ zugelassen) mit dem folgenden äquivalent: Für jede gegen ξ konvergente Folge $x.$ auf $A\setminus\{\xi\}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \eta\ .$$

Häufungspunkte von Folgen

Die Folge

$$k \mapsto x_k := (-1)^k + \frac{1}{k}$$

ist zwar divergent; die x_k "häufen" sich aber in der Nähe der beiden Punkte ± 1. Es sei $x. : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ eine beliebige Folge. Der Punkt $a \in \mathbb{X}$ ist ein Häufungspunkt dieser *Folge* (nicht zu verwechseln mit dem Begriff "Häufungspunkt einer *Menge*"), wenn jede noch so kleine Umgebung U von a unendlich viele x_k enthält.

Dabei wurde folgende bequeme Redeweise benutzt: Man sagt, "**unendlich viele x_k besitzen die Eigenschaft $\mathcal{P}$**", wenn es zu jedem N ein $k > N$ gibt, so dass x_k die Eigenschaft $\mathcal{P}$ besitzt. Ist zum Beispiel $x_k = (-1)^k$, so sind unendlich viele $x_k = 1$, obwohl alle diese x_k denselben Wert haben.

Also: Der Punkt a ist **Häufungspunkt der Folge** $x.$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem N ein $k > N$ gibt mit $|x_k - a| < \varepsilon$. **Uneigentliche Häufungspunkte** von reellen Zahlfolgen werden sinngemäss erklärt. Eine unbeschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt ∞ oder $-\infty$ als uneigentlichen Häufungspunkt.

⑦ Die Folge $k \mapsto \mathrm{Re}(i^k)$ besitzt wegen $i^{r+4n} = i^r \quad (r = 0,\, 1,\, 2,\, 3;\ n \in \mathbb{N})$ die drei Häufungspunkte -1, 0 und 1. — Die Folge $k \mapsto 2^{(-2)^k}$ mit den Gliedern $2,\ 1/4,\ 16,\ 1/256,\ 65536,\ \ldots$ hat den Häufungspunkt 0 und den uneigentlichen Häufungspunkt ∞. Sie ist natürlich divergent. — Ist $k \mapsto x_k$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$, so ist *jede* reelle Zahl a ein Häufungspunkt dieser Folge. Dies ist anschaulich klar und wird folgendermassen bewiesen:

⌜ Es seien ein $\varepsilon > 0$ und ein N vorgegeben. Wähle $\varepsilon' \in\,]\,0, \varepsilon\,]$ so klein, dass die endlich vielen Zahlen $x_0,\ \ldots,\ x_N$ alle ausserhalb des Intervalls $I := \,]\,a, a+\varepsilon'\,[$ liegen. Dieses Intervall enthält eine rationale Zahl r; es gibt daher ein $k > N$ mit $x_k = r \in I \subset U_\varepsilon(a)$. ⌟

○

(3.21) *Gilt* $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, *so ist* a *der einzige Häufungspunkt der Folge* $(x_k)_{k\geq 0}$.

⌜ Gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, so ist a jedenfalls ein Häufungspunkt. Betrachte einen von a verschiedenen Punkt a'. Die beiden Punkte a und a' besitzen disjunkte Umgebungen U bzw. U', und nach Voraussetzung gibt es ein k_0 mit $x_k \in U$ für alle $k > k_0$. Somit liegen höchstens endlich viele x_k in U', und a' kann nicht Häufungspunkt der Folge $x.$ sein. ⌟

Teilfolgen

Ist a ein Häufungspunkt der Folge $x.$, so liegen vielleicht "nur ganz wenige", aber eben doch unendlich viele x_k in der Nähe von a. Indem man alle "schlechten" x_k verwirft und nur "die guten ins Töpfchen" legt, müsste man eine neue Folge herstellen können, die wirklich gegen a konvergiert. Wir wollen diese Idee präzisieren.

Eine streng monoton wachsende Folge

$$k. : \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,, \qquad l \mapsto k_l$$

von natürlichen Zahlen wollen wir eine **Auswahlfolge** nennen. Dabei gilt also ausdrücklich $k_{l+1} > k_l$ für alle $l \geq 0$. Hieraus folgt leicht $k_l \geq l$ für alle l und weiter

$$\lim_{l\to\infty} k_l = \infty\ . \tag{8}$$

Eine Auswahlfolge ist durch die Menge $A := \{k_0, k_1, k_2, \ldots\}$ ihrer Glieder eindeutig bestimmt. Ist nämlich eine beliebige unendliche Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ vorgegeben, so wird die zugehörige Auswahlfolge rekursiv definiert durch

$$k_0 := \min\{k \mid k \in A\}\,, \qquad k_{l+1} := \min\{k \mid k > k_l,\ k \in A\} \quad (l \geq 0)\ .$$

Es sei nun $x. : k \mapsto x_k$ eine beliebige Folge und $k. : l \mapsto k_l$ eine Auswahlfolge. Dann heisst die aus $k.$ und $x.$ zusammengesetzte Folge

$$x'. := x. \circ k. \ : \qquad l \mapsto x_{k_l}$$

eine **Teilfolge** der Folge $x.$. Ihre Wertetabelle ist gegeben durch

$$(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, \ldots) := \big(x_{k_0}, x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots\big)\ .$$

⑧ Wir betrachten die Folge $x. := \big(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots\big)$ mit dem allgemeinen Glied $x_k := (-1)^k/k \ \ (k \geq 1)$. Betrachte die (mit $l = 1$ beginnenden) Auswahlfolgen

(a) $k_l := 3l + 1$, (b) $k_l := l^2$, (c) $k_l := l$-te Primzahl .

Die zugehörigen Teilfolgen sind:

(a) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{13}, \ldots\right)$,

(b) $\left(-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$,

(c) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{11}, \ldots\right)$.

Alle diese Teilfolgen konvergieren gegen 0. ○

(3.22) *Besitzt die Folge $x_{\textstyle .}$ den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert a, so besitzt auch jede Teilfolge von $x_{\textstyle .}$ den Grenzwert a.*

⌜ Dies folgt unmittelbar aus (8) und dem Satz **(3.15)** über ineinandergeschachtelte Grenzwerte. ⌟

Wir kommen nun zu dem oben angedeuteten **Ausziehen einer konvergenten Teilfolge**:

(3.23) *Ist a ein (eigentlicher oder uneigentlicher) Häufungspunkt der Folge $x_{\textstyle .}$, so gibt es eine Teilfolge $x'_{\textstyle .}$, $x'_l := x_{k_l}$ $(l \geq 0)$, mit $\lim_{l\to\infty} x'_l = a$; und umgekehrt.*

⌜ Um rekursiv eine geeignete Auswahlfolge $k_{\textstyle .}$ zu konstruieren, setzen wir $k_0 := 0$ und nehmen an, es sei k_{l-1} für ein $l \geq 1$ schon festgelegt. Nach Voraussetzung über die Folge $x_{\textstyle .}$ gibt es ein $k > k_{l-1}$ mit $|x_k - a| < 1/l$; wir wählen als k_l das kleinste solche k. Damit ist die Folge $k_{\textstyle .}$ wohldefiniert und streng monoton wachsend. Für die zugehörige Teilfolge $x'_{\textstyle .} : l \mapsto x_{k_l}$ der Folge $x_{\textstyle .}$ gilt nach Konstruktion der k_l:

$$|x'_l - a| = |x_{k_l} - a| < \frac{1}{l} \qquad (l \geq 1)\,;$$

somit folgt $\lim_{l\to\infty} x'_l = a$, wie behauptet. Ähnlich schliesst man im Fall $a = \pm\infty$. — Die Umkehrung ist trivial. ⌟

Aufgaben

1. Zeige: Eine konvergente Folge ganzer Zahlen ist von einem n_0 an konstant.

2. Es sei $x_{\textstyle .}$ eine Folge von reellen Zahlen. Man beschreibe das Faktum “die Folge $x_{\textstyle .}$ ist divergent” so, dass dabei keine Negation (“nicht”, “kein”, “un-” oder ähnlich) verwendet wird.

3. Berechne die folgenden Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-4)(n^2+1)}{7n(2n^2+10\,000)}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$,

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\left(1-\sqrt{1-a/n}\right)\right]$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

4. Bestimme in den folgenden Beispielen ein $n_0(\varepsilon)$ so, dass für alle $n > n_0$ gilt: $|x_n| < \varepsilon$. Dabei kommt es nicht darauf an, ein "optimales" n_0 zu finden; man kann daher beim Abschätzen grosszügig sein.

   (a) $x_n := \dfrac{n}{n^3+n^2+1}$, (b) $x_n := \dfrac{\sin n + \cos^3 n}{\sqrt{n}}$,

   (c) $x_n := \dfrac{1+\sqrt{n}}{n^2}$.

5. Es sei $z_n := (4n+8i)^9 \left(\dfrac{8}{9}+\dfrac{4}{9}i\right)^n$.

   (a) Bestimme $z^* := \lim_{n\to\infty} z_n$ mit Hilfe der Rechenregeln.

   (b) Bestimme ein n_0 so, dass sich z_n für alle $n > n_0$ um weniger als 0.001 von z^* unterscheidet.

6. Bestimme die Häufungspunkte und eventuell die Grenzwerte der nachstehenden Folgen:

   (a) $z_n := \sqrt[n]{n^4-n^2+2}\,\sin\dfrac{\pi n}{2} + i\,\dfrac{n+2}{2n+1}\sin\dfrac{2\pi n}{3}$,

   (b) $x_n := \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$, $a \in \mathbb{R}^*$ fest.

   (Unterscheide die Fälle $0 < |a| < 1$, $a = \pm 1$, $|a| > 1$.)

7. Für gegebene reelle Zahlen α und β wird die Folge $x.$ rekursiv definiert durch

$$x_0 := \alpha\,, \qquad x_1 := \beta\,, \qquad x_n := \frac{1+x_{n-1}}{x_{n-2}} \quad (n \geq 2)\ .$$

   (a) Bestimme die Häufungspunkte dieser Folge. *Hinweis:* Mit speziellen Werten von α und β experimentieren, bis eine Gesetzmässigkeit zum Vorschein kommt.

   (b) Bestimme die Menge derjenigen Paare (α, β), die als Anfangsdaten ausgeschlossen werden müssen. Figur!

8. (a) Es sei $x.$ eine Folge, und es seien die drei Teilfolgen $\left(x_{2k} \;\middle|\; k \geq 0\right)$, $\left(x_{2k+1} \;\middle|\; k \geq 0\right)$ und $\left(x_{5k} \;\middle|\; k \geq 0\right)$ konvergent. Dann konvergiert auch die Folge $x.$.

   (b) Beweise oder widerlege: Ist die Teilfolge $\left(x_{pk} \;\middle|\; k \geq 0\right)$ für jede Primzahl p konvergent, so konvergiert auch die Folge $x.$.

9. Es seien $p.$ und $q.$ zwei Folgen natürlicher Zahlen mit $\lim_{n\to\infty}\bigl(p_n/q_n\bigr) = \sqrt{2}$. Zeige: $\lim_{n\to\infty}\bigl(1/q_n\bigr) = 0$.

10. Man konstruiere eine injektive Zahlfolge $x.$, die genau die sämtlichen natürlichen Zahlen als Häufungspunkte besitzt. Es genügt, die Folge $x.$ so weit anzuschreiben, bis das Bildungsgesetz erkennbar wird; eine Formel für x_n ist nicht verlangt.

11. (a) Es sei S die Menge der Häufungspunkte einer Folge $x.$ und ξ ein Häufungspunkt der Menge S. Dann ist ξ auch ein Häufungspunkt der Folge $x.$, das heisst: Es gilt von selbst $\xi \in S$.

    (b) Man konstruiere ein interessantes Beispiel zu (a).