4

Grundlegende Existenzsätze

4.1 Fälle garantierter Konvergenz

Die im vorangehenden Kapitel behandelten Regeln und Sätze über Grenzwerte haben alle vorausgesetzt, dass wir die jeweiligen Grenzwerte schon "besitzen". In diesem Abschnitt geht es nun um Sätze, die die *Existenz* eines Grenzwerts unter einfachen Voraussetzungen *garantieren.* Diese "einfachen Voraussetzungen" lassen sich im Anwendungsfall überprüfen, ohne dass man den betreffenden Grenzwert schon kennt. Wir werden dadurch in Stand gesetzt, mit Hilfe von Grenzprozessen *neue* Objekte ($\sqrt{2}$, π, die Exponentialfunktion usw.) herzustellen. Die Sätze, von denen hier die Rede ist, sind nicht wie zum Beispiel **(3.15)** Sätze über den Konvergenzbegriff, sondern letzten Endes Sätze über die "Feinstruktur" von $\mathbb{R}$: Sie sind ein "anwendungsfreundlicher" Ausdruck der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ bzw. der sogenannten *Vollständigkeit des metrischen Raumes* $\mathbb{R}$ (s.u.).

Monotone Funktionen und Folgen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$, $\operatorname{dom}(f)$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$, heisst **monoton wachsend**, wenn aus $t_1,\, t_2 \in \operatorname{dom}(f)$ und $t_1 \leq t_2$ folgt:

$$f(t_1) \leq f(t_2)\ ,$$

und **streng** oder **eigentlich monoton wachsend**, wenn aus $t_1 < t_2$ folgt:

$$f(t_1) < f(t_2)\ .$$

Analoge Festsetzungen gelten für **monoton fallende** Funktionen.

① Sind f und g monoton bzw. streng monoton und ist $g \circ f$ definiert, so ist auch $g \circ f$ monoton bzw. streng monoton. ◯

Der folgende Satz garantiert, wie gesagt, die Existenz von Grenzwerten, die man an sich noch nicht kennt, und ist damit ein fundamentales Prinzip der reellen Analysis:

(4.1) (a) *Es sei $f : A \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und $b := \sup A \le \infty$ ein Häufungspunkt von A. Dann existiert der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert $\lim_{t\to b-} f(t)$, und zwar gilt*

$$\lim_{t\to b-} f(t) = \sup\bigl\{f(t) \bigm| t < b\bigr\} . \tag{1}$$

(b) *Der Grenzwert ist genau dann endlich, wenn es eine Schranke $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(t) \le M$ für alle $t < b$.*

⌜ Ist f nach oben beschränkt, so hat die rechte Seite von (1) einen endlichen Wert σ. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Definition von σ ein $t_0 < b$ mit $f(t_0) > \sigma - \varepsilon$. Da f monoton wächst, gilt dann $\sigma - \varepsilon < f(t_0) \le f(t) \le \sigma$ für alle $t \in\,]\, t_0, b\,[$ und somit erst recht

$$|f(t) - \sigma| < \varepsilon \qquad \forall t \in\,]\, t_0, b\,[\;.$$

Dies beweist $\lim_{t\to b-} f(t) = \sigma$.

Ist f nach oben unbeschränkt, so gibt es zu jedem M ein $t_0 < b$ mit $f(t_0) > M$, und wegen der Monotonie ist dann $f(t) > M$ für alle $t \in\,]\, t_0, b\,[$. Dies beweist $\lim_{t\to b-} f(t) = \infty$. ⌟

Analoge Aussagen gelten für rechtsseitige Grenzwerte $\lim_{t\to a+}$ sowie für monoton fallende Funktionen.

Satz **(4.1)** besitzt das folgende Korollar über monotone Folgen:

(4.2) *Eine monoton wachsende Folge $x_{\cdot}$ von reellen Zahlen ist genau dann (eigentlich) konvergent, wenn sie beschränkt ist, sonst uneigentlich konvergent. In jedem Fall gilt*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sup\bigl\{x_k \bigm| k \in \mathbb{N}\bigr\} .$$

① Durch die Rekursionsvorschrift

$$x_0 := 1 , \qquad x_k := \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\, x_{k-1} \quad (k \ge 1)$$

wird eine Folge von positiven Zahlen festgelegt; ihr allgemeines Glied hat die Form

$$x_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k} \qquad (k \ge 1) .$$

Wegen $0 < (2k-1)(2k+1)/(2k)^2 < 1$ ist diese Folge monoton fallend; sie ist daher konvergent. Die Berechnung des Grenzwerts müssen wir allerdings auf später verschieben (Beispiel 9.3.④). ○

Anwendung: q-te Wurzeln

Als Anwendung von Satz **(4.2)** beweisen wir:

(4.3) *Zu jedem reellen $c \geq 0$ und jeder ganzen Zahl $q \geq 2$ gibt es genau ein $\xi \geq 0$ mit $\xi^q = c$.*

Dieses ξ heisst die **q-te Wurzel** von c und wird mit $\sqrt[q]{c}$, im Fall $q = 2$ mit $\sqrt{c}$ **(Quadratwurzel)** bezeichnet. Insbesondere gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2} \;=\; |x|$$

(und nicht etwa $= x\,!$).

⌜ Der Beweis von **(4.3)** liefert gleichzeitig ein Verfahren, das $\sqrt[q]{c}$ mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen gestattet. Wir zeigen zunächst: Die Funktion $x \mapsto x^q$ ist auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng monoton wachsend. Aus $0 \leq x < y$ folgt nämlich

$$y^q - x^q = (y - x)(y^{q-1} + y^{q-2}x + \ldots + x^{q-1}) \geq (y - x)y^{q-1} > 0 \ .$$

Hiernach gibt es höchstens ein $\xi \geq 0$ mit $\xi^q = c$. — Natürlich ist $\sqrt[q]{0} = 0$, $\sqrt[q]{1} = 1$. Ist ferner die Existenz von $\sqrt[q]{c}$ für alle $c > 1$ bewiesen, so folgt sie für $0 < c < 1$ durch Übergang zum Kehrwert: $1/c$ ist dann > 1, und es gilt $\sqrt[q]{c} = 1/\sqrt[q]{1/c}$. Wir können daher von nun an $c > 1$ voraussetzen.

Es sei jetzt x ein irgendwie gefundener, aber zu grosser Näherungswert für die gesuchte Wurzel $\sqrt[q]{c}$; konkret genüge x den Bedingungen

$$x > 1\,, \qquad x^q > c\ . \tag{2}$$

Um einen besseren Näherungswert x' zu erhalten, machen wir den Ansatz $x' := x(1-\delta)$, wobei die Zahl $\delta \in \,]\,0, 1\,[\,$ noch geeignet zu wählen ist. Für das "ideale" δ ergibt sich aus der Bedingung $x'^q = c$ die Gleichung

$$c = x^q(1 - \delta)^q = x^q \left(1 - q\delta + \binom{q}{2}\delta^2 - \ldots\right) \ . \tag{3}$$

Ist x ein guter Näherungswert für die gesuchte Wurzel, so ist das "ideale" δ sehr klein, und die höheren Potenzen von δ sind dann noch viel kleiner, so dass die betreffenden Glieder in (3) gegenüber 1 vernachlässigbar sind. Wir ersetzen daher (3) durch

$$c = x^q(1 - q\delta)$$

und betrachten dies als Gleichung für ein "brauchbares" δ; es ergibt sich

$$\delta = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{c}{x^q}\right) \ .$$

Wegen (2) liegt dieses δ im Intervall $]\,0,1\,[$, der zugehörige Näherungswert

$$x' = x(1-\delta) = x\left(1 - \frac{1 - c/x^q}{q}\right)$$

ist daher kleiner als x und positiv. Wir behaupten weiter: Die Ungleichungen (2) gelten auch für x' anstelle von x. Nach der Bernoullischen Ungleichung **(2.2)** hat man nämlich

$$x'^q = x^q(1-\delta)^q > x^q(1-q\delta) = c \qquad (>1),$$

und dann muss auch $x' > 1$ sein.

Es ist folglich erlaubt, den von x zu x' führenden Prozess zunächst an x' und dann ad infinitum zu wiederholen, um die gesuchte Wurzel $\sqrt[q]{c}$ immer besser anzunähern. Wir definieren also rekursiv eine Zahlfolge $x_.$ durch

$$x_0 := c\,, \qquad x_{k+1} = x_k\left(1 - \frac{1 - c/x_k^q}{q}\right) \quad (k \geq 0)\,, \tag{4}$$

wobei der Ausgangswert x_0 so gewählt wurde, dass (2) für x_0 und damit für alle x_k zutrifft. Diese Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt durch 1, besitzt also nach **(4.2)** einen Grenzwert $\xi \geq 1$. Natürlich ist auch $\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \xi$; aus (4) folgt daher mit $k \to \infty$:

$$\xi = \xi\left(1 - \frac{1 - c/\xi^q}{q}\right)\ .$$

Nach Division mit $\xi \neq 0$ ergibt sich $1 - c/\xi^q = 0$, das heisst aber: $\xi^q = c$. ┘

② Um zu sehen, wie gut das funktioniert, berechnen wir mit Hilfe der Rekursion (4) die Zahl $\sqrt{4}$. Wir setzen also $q := 2$ und $c := 4$ und erhalten nacheinander die folgenden Werte:

$x_0 = 4$
$x_1 = 2.5$
$x_2 = 2.05$
$x_3 = 2.000609\ldots$
$x_4 = 2.0000000929\ldots$
$x_5 = 2.00000000000000222\ldots$

Das Geheimnis dieser rasanten Konvergenz wird in der Aufgabe 4 dieses Abschnitts gelüftet, ein zweites Mal (in ganz anderem Zusammenhang) in Beispiel 7.7.①. ○

Mit Hilfe der q-ten Wurzeln lassen sich Potenzen mit beliebigen gebrochenen Exponenten definieren; man setzt

$$c^{p/q} := \sqrt[q]{c^p} \qquad (c > 0\,,\ p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{N}^*)\ .$$

Dadurch ist c^r für jedes $r \in \mathbb{Q}$ definiert, und es gelten die üblichen Regeln für das Rechnen mit Potenzen. Wir überlassen den Beweis dem Leser.

Das Cauchy-Kriterium

Im Gegensatz zu **(4.1.)** macht das Cauchy-Kriterium keinen Gebrauch von der Ordnungsstruktur auf $\mathbb{R}$; die in der Einleitung genannte “einfache Voraussetzung” handelt stattdessen von Abständen: Die **Cauchy-Bedingung** (C) drückt aus, dass die Funktionswerte $f(x)$ für $x \to \xi$ immer näher beieinander liegen müssen — ohne den anvisierten Grenzwert η ausdrücklich zu nennen.

(4.4) *Es sei ξ ein (eigentlicher oder uneigentlicher) Häufungspunkt der Menge A. Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{X}$ besitzt genau dann einen Grenzwert*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) =: \eta \in \mathbb{X}\,,$$

wenn der folgende Sachverhalt zutrifft:

(C) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung U von ξ mit*

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon \qquad \forall\, x,\, y \in \dot{U}\ . \tag{5}$$

⌜ Wir beweisen zunächst die “einfache Richtung” des Kriteriums: Falls der Grenzwert $\lim_{x\to\xi} f(x) =: \eta$ existiert, so trifft auch (C) zu.

⌜ Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von ξ mit

$$|f(x) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \dot{U}\,,$$

und hieraus folgt (5). ⌟

Für den “schwierigen Teil” wollen wir zunächst annehmen, f sei reellwertig. Die Cauchy-Bedingung (C) sei also erfüllt. Wir müssen zeigen, dass es ein $\eta \in \mathbb{R}$ gibt mit $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $n \ge 1$ eine Umgebung V_n von ξ und einen Punkt $x_n \in \dot{V}_n \cap A$ mit

$$|f(x) - f(x_n)| \le \frac{1}{n} \qquad \forall x \in \dot{V}_n \cap A\ .$$

Setzt man

$$\alpha_n := f(x_n) - \frac{1}{n}\,, \qquad \beta_n := f(x_n) + \frac{1}{n}\,,$$

so lässt sich das folgendermassen formulieren:

$$\alpha_n \le f(x) \le \beta_n \qquad \forall x \in \dot{V}_n \cap A\ . \tag{6}$$

Wenn die Behauptung zutrifft, so haben die Intervalle $[\,\alpha_n, \beta_n\,]$ einen einzigen Punkt gemeinsam, und dies ist der gesuchte Grenzwert. Jedenfalls liegt es nahe, nun die Grössen

$$\alpha := \sup_{n\ge 1} \alpha_n\ , \qquad \beta := \inf_{n\ge 1} \beta_n$$

zu betrachten. Für beliebige n und m gibt es einen Punkt $x \in \dot{V}_n \cap \dot{V}_m \cap A$, und für dieses x gilt

$$\alpha_n \le f(x) \le \beta_m\ .$$

Da dies (bei festem m) für jedes n zutrifft, ist β_m eine obere Schranke aller α_n, und es folgt $\alpha \le \beta_m$. Dies wiederum trifft für jedes m zu; somit gilt $\alpha \le \beta$. Wir beweisen nun:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \alpha = \beta\ .$$

Für jedes $n \ge 1$ gilt

$$f(x_n) - \frac{1}{n} = \alpha_n \le \alpha \le \beta \le \beta_n = f(x_n) + \frac{1}{n} \tag{7}$$

(Fig. 4.1.1). Hiernach unterscheiden sich α und β höchstens um $2/n$, und da dies für jedes $n \ge 1$ zutrifft, muss $\alpha = \beta$ sein.

Weiter: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n mit $2/n < \varepsilon$. Ist $x \in \dot{V}_n \cap A$, so gilt (6), das heisst: Auch $f(x)$ liegt zwischen den in (7) genannten Grenzen. Hieraus folgt

$$|f(x) - \alpha| \le \frac{2}{n} < \varepsilon \qquad \forall\, x \in \dot{V}_n \cap A\ .$$

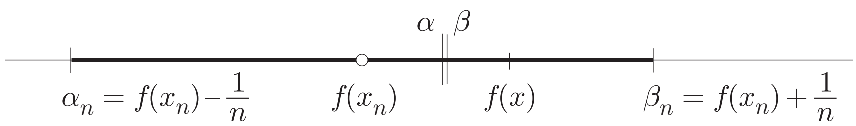

Fig. 4.1.1

Es sei schliesslich $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ eine vektorwertige Funktion. Mit $\mathbf{f}$ erfüllt auch jedes f_i die Cauchy-Bedingung. Nach dem schon Bewiesenen existieren daher die m Grenzwerte $\lim_{x\to\xi} f_i(x)$, und mit **(3.14)**(a) ergibt sich die Existenz des $\lim_{x\to\xi} \mathbf{f}(x)$.

Aus dem Satz **(4.1)** ergibt sich sofort das folgende **Cauchy-Kriterium für Folgen**:

(4.5) *Eine Folge $x_. : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ besitzt genau dann einen Grenzwert $\xi \in \mathbb{X}$, wenn der folgende Sachverhalt zutrifft:*

(C) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k_0 mit*

$$|x_k - x_l| < \varepsilon \qquad \forall\, k,\, l > k_0 \ .$$

Eine Folge, die die **Cauchy-Bedingung** (C) erfüllt, heisst eine **Cauchy-Folge**. Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge gegen einen gewissen Punkt des Raumes konvergiert, heisst **vollständig**. Vorläufig sind also die Grundstrukturen $\mathbb{X}$ als vollständig erwiesen.

① Die Menge $\mathbb{D}$ der Binärzahlen, versehen mit der gewöhnlichen Metrik $d(x,y) := |x-y|$, ist kein vollständiger metrischer Raum. Betrachte zum Beispiel die Folge

$$x_. : \quad \mathbb{N} \to \mathbb{D}\,, \qquad k \mapsto x_k := \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor \cdot 2^{-k} \ .$$

Als Folge in $\mathbb{R} \supset \mathbb{D}$ aufgefasst konvergiert $x_.$ gegen die Zahl $1/3$, ist also eine Cauchy-Folge. Wegen $1/3 \notin \mathbb{D}$ ist aber diese Folge in $\mathbb{D}$ divergent. ○

Aufgaben

1. Die Folge $a_.$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 1\,, \qquad a_{n+1} := \sqrt{2a_n} \quad (n \geq 0) \ .$$

   Zeige, dass diese Folge konvergiert, und berechne ihren Grenzwert.

2. Die Folge $x_.$ sei rekursiv definiert durch

$$x_0 := 2\,, \qquad x_{n+1} := x_n + \cot x_n \quad (n \geq 0) \ .$$

   Bestimme $\lim_{n\to\infty} x_n$, mit Konvergenzbeweis. *Hinweis:* Der Grenzwert ξ genügt einer gewissen Gleichung und ist leicht zu finden. Schreibe dann $x_n = \xi + (-1)^n y_n$ und betrachte die Folge $y_.$.)

3. Zeige: Jede reelle Zahlfolge besitzt eine monotone Teilfolge. *Hinweis:* Die Menge $A := \{n \mid \forall k > n : \quad x_k \leq x_n\}$ ist entweder endlich oder unendlich.

4. (a) Verifiziere: Für Quadratwurzeln ($q := 2$) liefert (4) die folgende Rekursionsvorschrift:

$$x_0 := c\,, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \ .$$

(b) Betrachte neben der Folge $x_{.}$ die weitere Folge $y_n := x_n - \sqrt{c}$ und beweise, was folgt:

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{2x_n} \ .$$

(c) Untersuche das Verhalten der Folge $x_{.}$ in der Anfangsphase (speziell, wenn c sehr gross ist) und $\big($anhand von (b)$\big)$ in der Endphase.

5. Beweise das Cauchy-Kriterium **(4.4)** "direkt", das heisst: ohne Rückgriff auf sup und inf. Betrachte hierzu die folgende Menge S von Zahlendaten: Ein Datum (s, δ) gehöre zu S, wenn es eine Umgebung U von ξ gibt mit

$$s - \delta \le f(x) \le s + \delta \qquad \forall x \in \dot{U} \ .$$

4.2 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

Wir kommen zu einem allgemeinen Existenzsatz, der sich auf beliebige beschränkte Folgen bezieht. Man stelle sich dazu einen Zufallszahlen-Generator vor, der jede Sekunde eine (unendlich genaue) reelle Zahl im Intervall $[0,1]$ ausgibt. Konkreter ist das folgende Beispiel:

$$x_0 := 0.2\,, \qquad x_{k+1} := 3.9 \cdot x_k(1-x_k) \quad (k \geq 1)\ . \tag{1}$$

Die durch (1) produzierte Folge im Intervall $[0,1]$ zeigt ein sogenanntes **chaotisches** Verhalten (siehe die Fig. 4.2.1 sowie Aufgabe 6 am Schluss dieses Abschnitts).

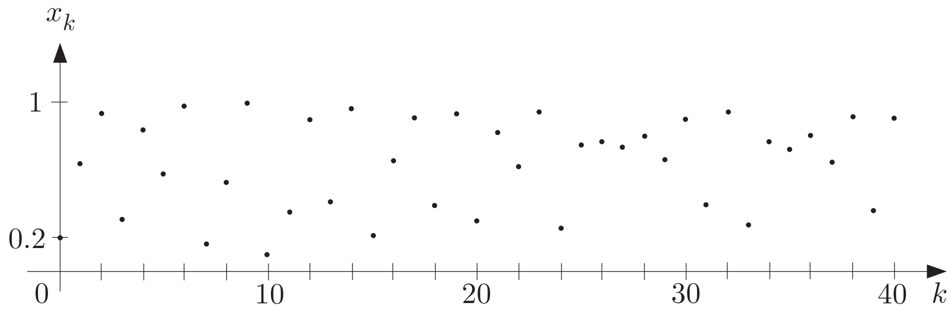

Fig. 4.2.1

Der **Satz von Bolzano-Weierstrass** lautet:

(4.6) *Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt bzw. eine konvergente Teilfolge.*

⌜ Eine gegebene Folge $x.$ kann einen oder mehrere, ja sogar überabzählbar viele Häufungspunkte haben. Jedenfalls sollte es einen geben, der am weitesten rechts liegt. Auf den wollen wir nun zusteuern.

Es gibt ein M mit $-M \leq x_k \leq M$ für alle k. Betrachte jetzt die Menge S aller Zahlen $s \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt unendlich viele $x_k \geq s$ — in Formeln:

$$S := \left\{ s \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall N\, \exists k > N\colon \quad x_k \geq s \right\}\ .$$

Dann ist $-M \in S$, und S ist nach oben beschränkt durch M. Somit besitzt die Menge S ein wohlbestimmtes Supremum $\sigma \leq M$. Über dieses σ lässt sich folgendes sagen:

Erstens: Ist $\varepsilon > 0$, so liegt die Zahl $\sigma + \varepsilon$ nicht in S, und das heisst nach Definition von S:

(a) Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es nur endlich viele $x_k \geq \sigma + \varepsilon$.

Zweitens: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $s \in S$ mit $s > \sigma - \varepsilon$, und hieraus folgt:

(b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele x_k mit $x_k > \sigma - \varepsilon$.

Nimmt man (a) und (b) zusammen, so kann man den folgenden Schluss ziehen: Für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ enthält $U_\varepsilon(\sigma)$ unendlich viele x_k, das heisst aber: σ ist ein Häufungspunkt der Folge $x_.$. ⌟

$\limsup$ und $\liminf$

Die durch (a) und (b) charakterisierte Zahl σ heisst **Limes superior** oder kurz: **oberer Limes** der Folge $x_.$ und wird mit $\limsup_{k\to\infty} x_k$ oder auch mit $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k$ bezeichnet.

Ist die Folge $x_.$ nach oben unbeschränkt, so ist ∞ der am weitesten rechts liegende Häufungspunkt, und man hat $\limsup_{k\to\infty} x_k := \infty$. Im (seltenen) Fall $\lim_{k\to\infty} x_k = -\infty$ ist auch $\limsup_{k\to\infty} x_k := -\infty$.

Für eine ganz andere Beschreibung des $\limsup$ siehe die Aufgabe 3 dieses Abschnitts.

Analog besitzt jede Folge $x_.$ von reellen Zahlen einen **Limes inferior** oder **unteren Limes** $\liminf_{k\to\infty} x_k$ (auch: $\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k$), mit den sinngemässen Vereinbarungen betreffend $\pm\infty$. Folgendes ist leicht einzusehen: Eine beschränkte Folge $x_.$ von reellen Zahlen ist genau dann konvergent, wenn oberer und unterer Limes übereinstimmen.

Für $\limsup$ und $\liminf$ gibt es Rechenregeln, so zum Beispiel die folgende:

$$\limsup_{k\to\infty}(x_k + y_k) \ \leq \ \limsup_{k\to\infty} x_k + \limsup_{k\to\infty} y_k \ ,$$

mit sinngemässer Interpretation, falls gewisse der angeschriebenen Grössen ∞ sind.

⌜ Setze zur Abkürzung

$$\limsup_{k\to\infty} x_k =: \xi \ , \qquad \limsup_{k\to\infty} y_k =: \eta \ , \qquad \limsup_{k\to\infty}(x_k + y_k) =: \sigma \ .$$

Ist $\xi = \infty$ oder $\eta = \infty$, so ist nichts zu beweisen. Seien also ξ und η endlich, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann ist $x_k < \xi + \varepsilon/2$ für alle k mit höchstens endlich vielen Ausnahmen und $y_k < \eta + \varepsilon/2$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen, also $x_k + y_k < \xi + \eta + \varepsilon$ für alle k mit höchstens endlich vielen Ausnahmen. Hieraus folgt $\sigma \leq \xi + \eta + \varepsilon$, und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $\sigma \leq \xi + \eta$ sein. ⌟

Aus **(4.6)** folgt weiter:

(4.7) *Jede beschränkte Folge in einer Grundstruktur* $\mathbb{X}$ *besitzt einen Häufungspunkt bzw. eine konvergente Teilfolge.*

⌜ Der Satz sei richtig für Folgen im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Wir bezeichnen die Punkte des $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{z} := (\mathbf{x}, y)\ , \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\ ,\ y \in \mathbb{R}\ ,$$

und betrachten eine beschränkte Folge $\mathbf{z}.$ im $\mathbb{R}^{n+1}$. Wegen $|\mathbf{x}_k| \leq |\mathbf{z}_k|$ ist dann auch die zugehörige Folge $\mathbf{x}.$ im $\mathbb{R}^n$ beschränkt, sie besitzt daher nach Induktionsvoraussetzung und **(3.23)** eine konvergente Teilfolge $\mathbf{x}.' : l \mapsto \mathbf{x}_{k_l}$,

$$\lim_{l \to \infty} \mathbf{x}'_l =: \mathbf{a}\ \in \mathbb{R}^n\ . \tag{2}$$

Die zugehörige Teilfolge $y.' : l \mapsto y_{k_l}$ in $\mathbb{R}$ ist ebenfalls beschränkt, sie besitzt daher ihrerseits eine konvergente Teilfolge $y.'' : j \mapsto y_{k_{l_j}}$,

$$\lim_{j \to \infty} y''_j =: b\ \in \mathbb{R}\ .$$

Aus (2) folgt weiter wegen **(3.22)**:

$$\mathbf{x}''_j := \mathbf{x}'_{l_j}\ \to\ \mathbf{a} \qquad (j \to \infty)\ .$$

Die beiden letzten Relationen zusammen besagen aber gerade

$$\mathbf{z}''_j := (\mathbf{x}''_j, y''_j)\ \to\ (\mathbf{a}, b) \qquad (j \to \infty)\ ;$$

dabei ist $\mathbf{z}.''$ eine Teilfolge der am Anfang gegebenen Folge $\mathbf{z}.$. ⌟

Aufgaben

1. (a) Man gebe eine Folge $x.$ von reellen Zahlen an, für die die vier Zahlen

$$\inf_k x_k\ , \qquad \sup_k x_k\ , \qquad \liminf_{k \to \infty} x_k\ , \qquad \limsup_{k \to \infty} x_k$$

alle endlich und voneinander verschieden sind.

(b) Konstruiere zwei Folgen $x.$ und $y.$, für die der folgende Sachverhalt zutrifft:

$$\limsup_{k \to \infty}(x_k + y_k) < \limsup_{k \to \infty} x_k + \limsup_{k \to \infty} y_k\ .$$

2. Es sei $a_.$ eine Folge positiver Zahlen. Beweise die folgenden Ungleichungen:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ .$$

3. Der lim sup einer Folge $x_.$ von reellen Zahlen lässt sich auch folgendermassen erklären: Es seien

$$\sigma_n := \sup\{x_k \mid k > n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

die Suprema der **Endstücke** von $x_.$. Sie bilden eine monoton fallende Folge, und es gilt

$$\limsup_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \quad (\pm\infty \text{ zugelassen}) \ .$$

Hinweis: Unterscheide die Fälle $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_0 = \infty$.

4. Es sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und ξ ein (eigentlicher oder uneigentlicher) Häufungspunkt von A. Was ist sinngemäss unter dem

$$\limsup_{x\to\xi} f(x)$$

zu verstehen?

Bsp :
$$\limsup_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) \sin t = \ ?$$

5. Das Cauchy-Kriterium für Folgen lässt sich auch mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstrass beweisen. Hierzu werden folgende, in jedem metrischen Raum gültigen Hilfssätze benötigt:
   (a) Cauchy-Folgen sind beschränkt.
   (b) Ist ξ ein Häufungspunkt der Cauchy-Folge $x_.$, so gilt in Wirklichkeit $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

6. Berechnet man die ersten 40 Glieder der Rekursion (1) mit den nur wenig verschiedenen Anfangswerten $x_0 := 0.2000$, $x_0 := 0.2100$, $x_0 := 0.2010$, $x_0 := 0.2001$, so stellt man fest, dass hier eine "empfindliche Abhängigkeit" von den Anfangsbedingungen vorliegt.

4.3 Kompakte Mengen

“Topologische” Eigenschaften von Mengen

Alle im folgenden betrachteten Mengen A sind Teilmengen einer vereinbarten Grundstruktur $\mathbb{X}$, zum Beispiel von $\mathbb{C}$.

In diesem Abschnitt geht es in erster Linie um die Begriffe “offen”, “abgeschlosssen” und “kompakt”. Alle drei bezeichnen gewisse Qualitäten von Teilmengen $A \subset \mathbb{X}$: Eine Menge A ist entweder kompakt oder nicht. Wenn ja, so hat das erfreuliche Konsequenzen im Zusammenhang mit stetigen Funktionen $f\colon A \to \mathbb{X}'$.

Eine Menge $A \subset \mathbb{X}$ heisst **offen**, wenn für jeden Punkt $x \in A$ eine ganze Umgebung dieses Punktes noch in A liegt: Zu jedem $x \in A$ gibt es ein (von x abhängiges) $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset A$.

① Offene Intervalle $]\,a, b\,[$ sowie $\mathbb{R}_{>0}$ sind offen in $\mathbb{R}$: Für jedes $x \in\,]\,a, b\,[$ ist $\varepsilon := \min\{b - x, x - a\} > 0$ und $U_\varepsilon(x) \subset\,]\,a, b\,[$. Für jedes $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $U_x(x) \subset \mathbb{R}_{>0}$.
Die Vollkugel $U_r(a) := \{x \in \mathbb{X} \mid |x - a| < r\}$ ist offen in $\mathbb{X}$: Ist $x \in U_r(a)$, so ist $\varepsilon := r - |x - a| > 0$, und mit der Dreiecksungleichung folgt $U_\varepsilon(x) \subset U_r(a)$.
$\mathbb{X}$ und $\emptyset$ sind offene Teilmengen von $\mathbb{X}$. ○

Es gelten die folgenden “Rechenregeln”:

(4.8) (a) *Ist $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist*

$$A := \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) > 0\}$$

eine offene Menge.

(b) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*

(c) *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*

⌜ Die Behauptung (a) folgt unmittelbar aus **(3.9)**.
(b) Liegt x in der Vereinigung $\bigcup_\iota A_\iota$, so gibt es ein ι_0 mit $x \in A_{\iota_0}$ und, da diese Menge offen ist, ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(x) \subset A_{\iota_0} \subset \bigcup_\iota A_\iota\ .$$

(c) Liegt x im Durchschnitt der offenen Mengen A_i $(1 \le i \le n)$, so gibt es zu jedem i ein $\varepsilon_i > 0$ mit $U_{\varepsilon_i}(x) \subset A_i$. Setzt man jetzt $\varepsilon := \min_{1\le i\le n} \varepsilon_i$, so ist $\varepsilon > 0$, und es gilt $U_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{1\le i\le n} A_i$. ⌟

Aus (a) und (c) ergibt sich die folgende Faustregel: *“Eine durch endlich viele strenge Ungleichungen definierte Menge ist offen.”*

② Das Innere des n-dimensionalen Einheitswürfels, gemeint ist die Menge

$$I^\circ := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; 0 < x_i < 1 \ (1 \leq i \leq n) \right\} ,$$

ist offen: Die Projektionen $\mathrm{pr}_i : \mathbf{x} \mapsto x_i$ sind stetig; somit ist I° der Durchschnitt von $2n$ offenen Halbräumen.

Die Intervalle $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ $(n \geq 1)$ sind alle offen, aber ihr Durchschnitt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{\, 0 \,\}$$

ist es nicht mehr. ○

Ein Punkt $x \in \mathbb{X}$ gehört zur **abgeschlossenen Hülle** $\bar{A}$ der Menge A, wenn jede (noch so kleine) Umgebung von x die Menge A schneidet (Fig. 4.3.1):

$$\bar{A} := \left\{ x \in \mathbb{X} \;\middle|\; \forall \varepsilon > 0 : \ \ U_\varepsilon(x) \sqsupset\!\!\sqsubset A \right\} .$$

Es gilt natürlich $A \subset \bar{A}$. Ist ξ Häufungspunkt einer Folge $x_.$ auf A, so gilt $\xi \in \bar{A}$.

Eine Menge $A \subset \mathbb{X}$ heisst **abgeschlossen**, wenn $A = \bar{A}$ ist. Jeder *nicht* zu A gehörende Punkt $x' \in \mathbb{X}$ besitzt dann eine Umgebung, die A nicht schneidet.

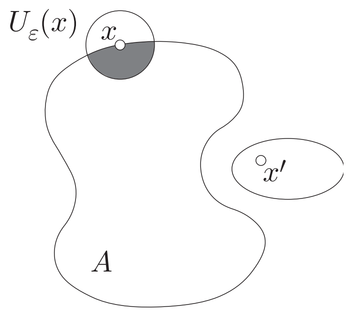

Fig. 4.3.1

(4.9) *Eine Menge $A \subset \mathbb{X}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.*

⌜ Die beiden angeführten Sachverhalte sind äquivalent mit dem folgenden: Jeder Punkt $x \in \mathbb{X} \setminus A$ besitzt eine Umgebung $U_\varepsilon(x) \supset\subset A$. ⌟

(4.10) (a) *Ist $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so sind die Mengen*

$$A := \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) \geq 0\}\ , \qquad B := \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) = 0\}$$

abgeschlossen.

(b) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

(c) *Die Vereinigung von höchstens endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

⌜ (a) A ist das Komplement der Menge $A' := \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) < 0\}$ und B das Komplement der Menge $B' := \{x \in \mathbb{X} \mid |f(x)| > 0\}$. Die beiden Mengen A' und B' sind offen nach **(4.8)**(a).

Analog folgen (b) und (c) aus **(4.8)**(b)–(c) durch "Übergang zum Komplement", will sagen: mit Hilfe von **(4.8)** und den Regeln der Mengenalgebra. ⌟

Aus (a) und (b) ergibt sich die folgende Faustregel: *"Eine durch Gleichungen und $\leq$-Ungleichungen definierte Menge ist abgeschlossen."*

③ Die $(n-1)$**-dimensionale Einheitssphäre**

$$S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| = 1\}$$

und der **abgeschlossene Einheitswürfel**

$$I := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1\ (1 \leq i \leq n)\}$$

sind abgeschlossen, ebenso eine einpunktige Menge $\{a\}$ oder der Graph

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}\ .$$

Die $(n-1)$-dimensionale Sphäre ist die Nullstellenmenge der stetigen Funktion $f(\mathbf{x}) := x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1$, der Graph die Nullstellenmenge der Funktion

$$g: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ , \qquad (x, y) \mapsto y - \sin x\ .$$

○

Ist eine Menge $A \subset \mathbb{X}$ beschränkt und abgeschlossen, so nennt man A **kompakt**. Beispiele: Endliche abgeschlossene Intervalle, abgeschlossene Würfel, abgeschlossene Kreisscheiben und Sphären sind kompakt. Im Grunde genommen ist Kompaktheit eine subtile, aber mächtige Endlichkeitseigenschaft, siehe die nachfolgenden Sätze **(4.13)** und **(4.14)**. Auf einer kompakten Menge kann man sich nicht verkrümeln.

(4.11) *Eine nichtleere kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}$ enthält ein maximales Element.*

⌜ Das angesagte Maximalelement ist natürlich die Zahl $\sigma := \sup B < \infty$. Jedenfalls gilt $\sigma \geq b$ für alle $b \in B$. Nun gibt es weiter zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $b \in B$ mit $\sigma - \varepsilon < b \leq \sigma$ — in anderen Worten: Jede ε-Umgebung von σ schneidet die Menge B. Da B abgeschlossen ist, folgt $\sigma \in B$. ⌟

(4.12) *Eine Menge $A \subset \mathbb{X}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Punktfolge $x_. : \mathbb{N} \to A$ einen Häufungspunkt $\xi \in A$ besitzt.*

⌜ Es sei A kompakt und $x_.$ eine Punktfolge auf A. Da die Menge A beschränkt ist, ist auch die Folge $x_.$ beschränkt und besitzt damit nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass **(4.6)** einen Häufungspunkt $\xi \in \mathbb{X}$. Jede Umgebung von ξ enthält Punkte $x_k \in A$, somit gilt $\xi \in \bar{A} = A$.

Umgekehrt: Ist $A \subset \mathbb{X}$ nicht kompakt, so ist A (a) unbeschränkt oder (b) nicht abgeschlossen.

Im Fall (a) lässt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in A$ festlegen mit $|x_k| > k$. Die entstehende Folge $x_.$ auf A besitzt keinen eigentlichen Häufungspunkt.

Ist A nicht abgeschlossen, so gibt es einen Punkt $\xi \in \bar{A}$, der nicht zu A gehört. Da jede Umgebung von ξ die Menge A schneidet, kann man eine Folge $x_.$ auf A konstruieren mit $x_k \in U_{1/k}(\xi)$ für alle $k \geq 1$. Diese Folge konvergiert gegen ξ $(\notin A)$ und kann daher keinen von ξ verschiedenen Häufungspunkt $\xi' \in A$ besitzen. ⌟

Der Satz von Heine-Borel

Die Kompaktheit lässt sich noch auf eine ganz andere Weise charakterisieren. Hierzu führen wir den folgenden Begriff ein: Ist für jeden Punkt $x \in A$ auf irgendeine Weise eine Umgebung $V(x)$ festgelegt, so nennen wir die Familie $\mathcal{V} := \big(V(x) \bigm| x \in A\big)$ dieser Umgebungen ein **Umgebungsfeld** auf A.

④ Es sei $D := \big\{x \in \mathbb{X} \bigm| |x| < 1\big\}$ die offene Einheitskugel, und für jeden Punkt $x \in D$ bezeichne

$$\rho(x) := \frac{1}{2}(1 - |x|) > 0$$

den halben Abstand von x zum Rand von D. Dann ist $\big(U_{\rho(x)}(x) \bigm| x \in D\big)$ ein Umgebungsfeld auf D. ○

Anmerkung: Anstelle von Umgebungsfeldern sind in dem vorliegenden Zusammenhang auch **offene Überdeckungen** in Gebrauch:

$$A \subset \bigcup_{\iota} O_{\iota}$$

mit offenen Mengen O_ι. Da es zu jedem $x \in A$ ein $\iota(x)$ mit $x \in O_{\iota(x)}$ gibt, ist die Familie $\bigl(O_{\iota(x)} \bigm| x \in A\bigr)$ ein Umgebungsfeld auf A.

Damit kommen wir zu dem **Überdeckungssatz von Heine–Borel**. Der in diesem Satz beschriebene Sachverhalt ist im Grunde genommen die "offizielle" und für beliebige Räume anwendbare Kompaktheitsdefinition. Es ist einfach so, dass sich die Kompaktheit von Teilmengen $A \subset \mathbb{X}$ durch die einfache Bedingung "beschränkt und abgeschlossen" beschreiben lässt.

(4.13) *Eine Menge $A \subset \mathbb{X}$ ist genau dann kompakt, wenn der folgende Sachverhalt zutrifft:*

(HB) *Ist $\mathcal{V} := \bigl(V(x) \bigm| x \in A\bigr)$ ein beliebiges Umgebungsfeld auf A, so gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_N \in A$ mit*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} V(x_k)\ ; \tag{1}$$

das heisst: $\mathcal{V}$ enthält eine endliche Überdeckung von A.

⌈ Es sei A kompakt, und es sei ein beliebiges Umgebungsfeld $\mathcal{V}$ auf A vorgelegt. Wir müssen auf geschickte Weise *endlich viele* der Umgebungen $V(x)$ auswählen. Hierzu benötigen wir das folgende Werkzeug: Jeder Punkt $y \in A$ besitzt seinen sogenannten **Überdeckungsradius**

$$\delta(y) := \sup\bigl\{\delta > 0 \bigm| \exists x \in A :\ U_\delta(y) \subset V(x)\bigr\}\ .$$

Die Punkte $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j,\ \ j \geq 0$, seien schon bestimmt. Betrachte die "Restmenge"

$$R_j := A \setminus \bigcup_{k=1}^{j} V(x_k) \qquad (j \geq 0)$$

(dies impliziert $R_0 := A$). Ist $R_j = \emptyset$, so gilt (1) mit $N := j$, und man ist fertig.

Ist $R_j \neq \emptyset$, so gibt es einen Punkt $y \in R_j$ und weiter nach Definition des Überdeckungsradius einen Punkt $x \in A$ mit $U_{\delta(y)/2}(y) \subset V(x)$. Setze nun $x_{j+1} := x$ und notiere als Referenz auch noch den Punkt $y =: y_j$.

Wir müssen zeigen, dass das Verfahren notwendiger Weise abbricht. Wenn nicht, so bilden die y_j eine unendliche Folge auf der kompakten Menge A, und diese Folge besitzt nach Satz **(4.12)** einen Häufungspunkt $\xi \in A$ (Fig. 4.3.2). Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{5\varepsilon}(\xi) \subset V(\xi)$ und zwei Referenzpunkte y_k, y_j, $k < j$, in $U_\varepsilon(\xi)$. Diese beiden Punkte sind weniger als 2ε voneinander entfernt. Wegen

$$U_{4\varepsilon}(y_k) \subset U_{5\varepsilon}(\xi) \subset V(\xi)$$

ist $\delta(y_k) \geq 4\varepsilon$, und es folgt

$$y_j \in U_{2\varepsilon}(y_k) \subset U_{\delta(y_k)/2}(y_k) \subset V(x_{k+1}) \ .$$

Hiernach ist y_j schon nach $k+1 \leq j$ Schritten überdeckt, im Widerspruch zu $y_j \in R_j$.

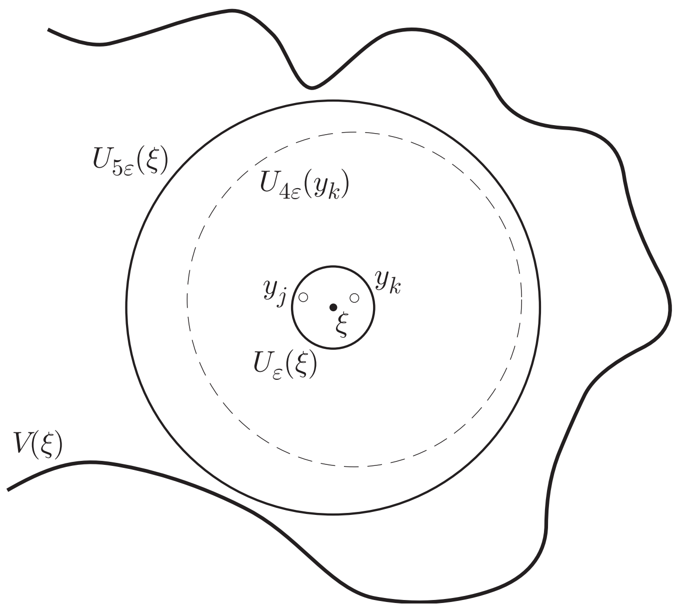

Fig. 4.3.2

Umgekehrt: Ist A nicht kompakt, so ist A unbeschränkt oder nicht abgeschlossen. Im zweiten Fall gibt es einen Punkt $\xi \in \bar{A} \setminus A$. Wie man sich leicht überlegt, bilden im ersten Fall die Mengen

$$O_k := \bigl\{x \in \mathbb{X} \bigm| |x| < k\bigr\} \qquad (k \geq 1)\,,$$

im zweiten Fall die Mengen

$$O_k := \left\{x \in \mathbb{X} \,\middle|\, |x - \xi| > \frac{1}{k}\right\} \qquad (k \geq 1)$$

eine offene Überdeckung von A, die keine endliche Überdeckung enthält. Der Sachverhalt (HB) trifft daher nicht zu. ┘

④ (Forts.) Das angegebene Umgebungsfeld enthält keine endliche Überdeckung; denn endlich viele $U_{\rho(x_k)}(x_k)$ überdecken nur Punkte $x \in \mathbb{D}$ mit $|x| < 1 - \min_k \rho(x_k)$. Die offene Kugel D ist ja auch nicht kompakt. ○

Aufgaben

1. Es seien $A \subset \mathbb{X}$ eine kompakte Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine **lokal beschränkte** Funktion, das heisst: Jeder Punkt $a \in A$ besitzt eine (unter Umständen sehr kleine) Umgebung $U(a)$, in der f beschränkt ist. Dann ist f (global) beschränkt auf A. Beweise dies
   (a) direkt (mit Hilfe des Satzes von Heine-Borel),
   (b) indirekt $\big($mit Hilfe des Satzes **(4.12)**$\big)$.

2. Ein anderer Beweis des "schwierigen Teils" von Satz **(4.13)** verläuft ungefähr so:

   Eine Teilmenge $B \subset A$ ist *schlecht*, wenn sie sich nicht mit endlich vielen der gegebenen Umgebungen $V(x)$ überdecken lässt. Wir dürfen annehmen, dass A in einem Würfel W_0 der Seitenlänge 1 enthalten ist. Ist A schlecht, so lässt sich eine Folge von Würfeln W_k der Seitenlänge 2^{-k} konstruieren, so dass folgendes zutrifft: $W_0 \supset W_1 \supset W_2 \supset \ldots$, und alle Durchschnitte $A_k := A \cap W_k$ sind schlecht. Es gibt einen Punkt ξ, der allen W_k angehört. Dieser Punkt ξ liegt in A und liefert schliesslich den gesuchten Widerspruch.

   Man stelle diesen Beweis in seinen Einzelheiten dar.

4.4 Hauptsätze über stetige Funktionen

Die Stetigkeit einer konkret gegebenen Funktion f garantiert nicht nur, dass mit f in vernünftiger Weise numerisch gearbeitet werden kann. Stetigkeit bildet auch die Grundvoraussetzung für viele allgemeine Sätze über Funktionen, so zum Beispiel für den bekannten "Zwischenwertsatz" **(4.21)**. Es leuchtet ein, dass ein derartiger Satz für Funktionen, die Sprünge machen, nicht gilt.

Alle betrachteten Funktionen sind auf Teilmengen einer Grundstruktur, zum Beispiel von $\mathbb{C}$, definiert.

(4.14) *Es sei A kompakt und $f\colon A \to \mathbb{X}$ eine stetige Funktion. Dann ist f (global) beschränkt; das heisst: Es gibt ein M mit*

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in A \ . \tag{1}$$

⌈ Wir beweisen das auf zwei Arten.

(I) Jedes $x \in A$ besitzt eine Umgebung $V(x)$ mit

$$|f(y) - f(x)| < 1 \qquad \forall y \in V(x) \cap A \ .$$

$\bigl(V(x) \bigm| x \in A\bigr)$ ist ein Umgebungsfeld auf A. Da A kompakt ist, gibt es nach Satz **(4.13)** Punkte $x_1, \ldots, x_N$ auf A mit $A \subset \bigcup_{k=1}^{N} V(x_k)$. Setzt man nun

$$M := \max_{1 \leq k \leq N} |f(x_k)| + 1 \ ,$$

so gilt (1).

(II) Ist f unbeschränkt, so gibt es eine Folge $x_.$ auf A mit

$$|f(x_k)| \geq k \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ .$$

Da A kompakt ist, besitzt diese Folge nach **(4.12)** einen Häufungspunkt $\xi \in A$, und da f stetig ist, gibt es eine Umgebung $U(\xi)$ mit

$$|f(x)| \leq M := |f(\xi)| + 1 \qquad \forall x \in U(\xi) \ . \tag{2}$$

Nun gibt es ein $k > M$ mit $x_k \in U(\xi)$, und für dieses k ist $|f(x_k)| \geq k > M$, im Widerspruch zu (2). ⌋

Das folgende Korollar ist oft nützlich:

(4.15) *Ist A kompakt und $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur positive Werte annimmt: $f(x) > 0$ für alle $x \in A$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$f(x) \geq \delta \qquad \forall x \in A \ .$$

⌜ Die Hilfsfunktion $g(x) := 1/f(x)$ ist stetig und positiv. Nach Satz **(4.14)** gibt es daher ein M mit

$$0 < g(x) \le M \qquad \forall x \in A \ .$$

Hieraus folgt $f(x) \ge 1/M$ für alle x; das heisst: $\delta := 1/M$ genügt. ⌟

(4.16) *Ist A kompakt und $f\colon A \to \mathbb{X}$ stetig, so ist die Bildmenge $B := f(A)$ kompakt.*

⌜ Nach Satz **(4.14)** ist B jedenfalls beschränkt. — Betrachte einen Punkt y_0, der nicht zu B gehört. Die Hilfsfunktion $g(x) := |f(x) - y_0|$ ist stetig und > 0 auf A. Nach **(4.15)** gibt es daher ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - y_0| = g(x) \ge \delta \qquad \forall x \in A \ .$$

Hieraus folgt $U_\delta(y_0) \supset\subset B$. Da $y_0 \in \complement B$ beliebig war, ist damit B als abgeschlossen erwiesen. ⌟

Der Satz vom Maximum

Betrachte eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{X}$ und eine reellwertige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$. Gibt es einen Punkt $\xi \in A$ mit

$$f(x) \le f(\xi) \qquad \forall x \in A \ ,$$

so heisst ξ eine **globale Maximalstelle** von f auf A, und der zugehörige Funktionswert $f(\xi)$ ist das **globale Maximum** von f auf A. — Analog wird für das **Minimum** definiert.

Der folgende **Satz vom Maximum** ist für die ganze Analysis fundamental:

(4.17) *Ist A kompakt und $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion, so nimmt f auf A ein globales Minimum und ein globales Maximum an; das heisst: Es gibt Punkte $\xi_0, \xi_1 \in A$ mit*

$$f(\xi_0) \le f(x) \le f(\xi_1) \qquad \forall x \in A \ .$$

⌜ Die Bildmenge $f(A) \subset \mathbb{R}$ ist nach Satz **(4.16)** kompakt und besitzt daher nach **(4.11)** ein minimales und ein maximales Element. ⌟

① Für die Funktion

$$f(t) := \frac{1}{1+t^2}$$

ist

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} f(t) = \max_{t\in\mathbb{R}} f(t) = 1 \ , \qquad \inf_{t\in\mathbb{R}} f(t) = 0 \ .$$

Diese Funktion nimmt auf $\mathbb{R}$ wohl ein globales Maximum, aber kein Minimum an ($\mathbb{R}$ ist nicht kompakt). — Die (unstetige) Funktion

$$g(t) := \begin{cases} 1 - |t| & (0 < |t| \leq 1), \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

nimmt auf dem kompakten Intervall $[-1, 1]$ ein globales Minimum, aber kein Maximum an: Die Zahl

$$\sup\bigl\{g(t) \bigm| -1 \leq t \leq 1\bigr\} = 1$$

kommt als Wert nicht vor. ○

Satz **(4.17)** ist ein reiner Existenzsatz; er sagt nichts darüber, wie man das Maximum im konkreten Fall findet. Das hängt damit zusammen, dass der Maximalwert $\max_{x \in A} f(x)$ sehr genau bestimmt ist, der Ort, wo dieses Maximum angenommen wird, aber gar nicht. Es kommt aber noch schlimmer: Eine kleine Änderung der Funktion f oder des Bereichs A ändert den Maximalwert nur wenig, kann aber eine radikale Dislokation der Maximalstelle(n) bewirken. Ähnliches ist zu sagen, wenn die “Problemdaten” f und A mit Ungenauigkeiten behaftet sind. Das folgende Beispiel illustriert diesen Sachverhalt.

② Es sei ε eine sehr kleine positive Zahl. Betrachtet man die Funktion $f(t) := t^2$ auf den beiden Intervallen $A := [-1, 1-\varepsilon]$ und $B := [-1, 1+\varepsilon]$, so kann man folgende Tabelle anlegen (Fig. 4.4.1):

	$f \restriction A$	$f \restriction B$
Maximalwert	1	$(1+\varepsilon)^2$
Maximalstelle	-1	$1+\varepsilon$

○

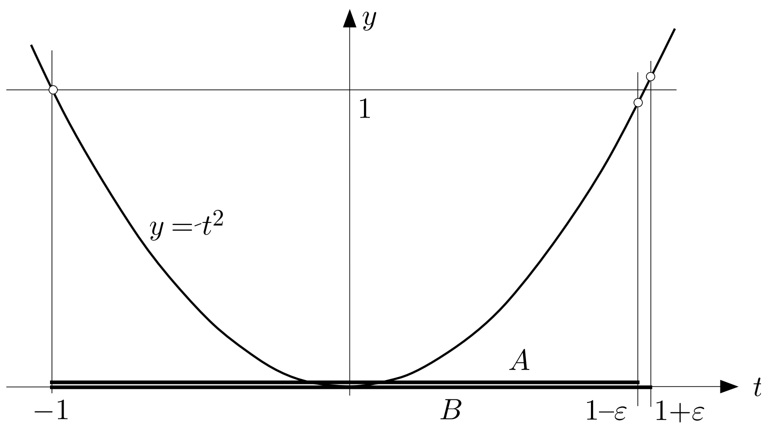

Fig. 4.4.1

Zur “Stabilität” des Maximalwerts das folgende:

(4.18) *Es seien A und B zwei Mengen mit $A \subset U_\delta(B)$ (gemeint ist: Zu jedem $x \in A$ gibt es ein $y \in B$ mit $|x - y| < \delta$) und $B \subset U_\delta(A)$. Für die beiden beschränkten Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ gelte weiter folgendes:*

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B : \qquad |x - y| \le \delta \implies |f(x) - g(y)| \le \varepsilon\ .$$

Dann ist

$$\Bigl|\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{y\in B} g(y)\Bigr| \le \varepsilon\ .$$

⌜ Betrachte ein festes $x_0 \in A$. Nach Voraussetzung gibt es ein $y_0 \in B$ mit $|x_0 - y_0| < \delta$; folglich gilt

$$f(x_0) \le g(y_0) + \varepsilon \le \sup_{y\in B} g(y) + \varepsilon\ .$$

Da dies für jedes $x_0 \in A$ zutrifft, gilt auch noch

$$\sup_{x\in A} f(x) \le \sup_{y\in B} g(y) + \varepsilon\ .$$

Aus Symmetriegründen folgt hiermit die Behauptung. ⌟

Gleichmässige Stetigkeit

Es sei $A \subset \mathbb{X}$ und $f \colon A \to \mathbb{X}'$ eine Funktion mit Werten in einer Grundstruktur $\mathbb{X}'$. Die Funktion f heisst **gleichmässig stetig** auf A, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein “pauschales” (das heisst: von x, x' unabhängiges) $\delta > 0$ gibt mit

$$x,\, x' \in A \quad \wedge \quad |x - x'| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x')| < \varepsilon\ .$$

(4.19) *Ist f lipstetig auf A, so ist f gleichmässig stetig auf A.*

⌜ Gilt

$$\forall x,\, x' \in A : \qquad |f(x) - f(x'| \le C|x - x'|$$

für ein gewisses $C > 0$, so genügt $\delta := \varepsilon/C$. ⌟

③ Die Funktion $f(t) := t^2$ ist auf dem Intervall $[-4, 3]$ gleichmässig stetig; denn für beliebige t, t' in diesem Intervall gilt

$$|f(t) - f(t')| = |t^2 - t'^2| = |t + t'|\,|t - t'| \le \bigl(|t| + |t'|\bigr)\,|t - t'| \le 8|t - t'|\ .$$

○

④ Die Funktion $g(t) := 1/t$ ist stetig, aber nicht gleichmässig stetig auf der offenen Halbachse $\mathbb{R}_{>0}$. So gibt es zum Beispiel kein $\delta > 0$, das für $\varepsilon := 1$ genügt: Betrachtet man für ein beliebiges $\delta \in]\,0,1\,[$ die beiden Punkte $t := \delta$ und $t' := \delta/2$, so ist einerseits $|t - t'| < \delta$, anderseits aber

$$g(t') - g(t) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1 \ .$$

○

Ist $\operatorname{dom}(f)$ kompakt, so kann f nicht "gegen aussen hin immer unstetiger" werden. Es gilt nämlich der folgende **Satz von der gleichmässigen Stetigkeit**:

(4.20) *Ist $A \subset \mathbb{X}$ kompakt und $f : A \to \mathbb{X}'$ stetig, so ist f gleichmässig stetig auf A.*

⌈ Ist f nicht gleichmässig stetig, so gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ ohne zugehöriges $\delta > 0$. Es lassen sich dann zu jedem $n \geq 1$ zwei Punkte x_n, $y_n \in A$ finden mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \ , \tag{3}$$

aber

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \ . \tag{4}$$

Nach Satz **(4.12)** besitzt die Folge $x_.$ einen Häufungspunkt $\xi \in A$ und somit eine gegen ξ konvergente Teilfolge $\big(x_{n_k} \bigm| k \geq 0\big)$. Wegen (3) konvergieren dann auch die y_{n_k} mit $k \to \infty$ gegen ξ. Da f insbesondere an der Stelle ξ stetig ist, folgt

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi)\,, \quad f(y_{n_k}) \to f(\xi) \qquad (k \to \infty)$$

und hieraus $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$, im Widerspruch zu (4). ⌋

Zwischenwertsatz

Der folgende **Zwischenwertsatz** ist intuitiv einleuchtend. Man muss sich aber darüber im klaren sein, dass darin nicht nur die Stetigkeit der betrachteten Funktion f (keine Sprünge!), sondern auch die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ wesentlich eingeht: Die stetige Funktion

$$f: \quad \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,, \qquad t \mapsto t^2 - 2$$

erfüllt die Bedingung $f(0) < 0 < f(2)$, nimmt aber den Wert 0 nicht an.

(4.21) *Es sei* $f : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und*

$$f(a) < 0 < f(b) \ .$$

Dann besitzt f *im Intervall* $]\,a,b\,[$ *wenigstens eine Nullstelle* ξ.

Wir konstruieren durch fortgesetztes Halbieren des Intervalls $[\,a,b\,]$ rekursiv drei Folgen $a_\cdot\,, b_\cdot\,, m_\cdot$:

$$a_0 := a\ , \quad b_0 := b\ , \quad m_0 := \frac{a+b}{2}\ ;$$

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \ := \begin{cases} [a_k\ ,\ m_k]\ , & \text{falls } f(m_k) > 0 \\ [m_k\ ,\ b_k]\ , & \text{falls } f(m_k) \le 0 \end{cases} \ , \quad m_{k+1} := \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}\ .$$

Die Folge $a_\cdot$ ist monoton wachsend und beschränkt durch b_0, die Folge $b_\cdot$ ist monoton fallend und beschränkt durch a_0; ferner gilt:

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a) \qquad (k \ge 0)\ .$$

Die beiden Folgen besitzen daher nach Satz **(4.2)** einen gemeinsamen Grenzwert $\xi \in [\,a,b\,]$.
Nach Konstruktionsvorschrift ist

$$f(a_k) \le 0 < f(b_k) \qquad \forall k \ge 0\ ;$$

und hieraus ergibt sich mit Hilfe der Stetigkeit von f:

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \le 0 \le \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(\xi)\ .$$

Somit ist $f(\xi) = 0$, und ξ ist ein innerer Punkt des Intervalls $[\,a,b\,]$.

Die im Beweis angegebene Konstruktion einer Nullstelle ξ wird **binäre Suche** genannt. Da sie auch in der numerischen Praxis gelegentlich verwendet wird, behandeln wir dazu ein numerisches Beispiel.

5 Betrachte das Polynom dritten Grades

$$f(x) \ := \ x^3 - x - 1\ .$$

Es ist $f(0) = -1$, $f(2) = 5$. Wir legen dann die folgende Tabelle an:

a_k	b_k	m_k	$f(m_k)$
0	2	1	-1
1		1.5	0.875
	1.5	1.25	-0.2969
1.25		1.375	0.2246
	1.375	1.3125	-0.0515
1.3125		1.34375	0.0826
	1.34375	1.328125	0.014576
	1.328125	1.320313	-0.018711
1.320313		1.324219	-0.002128
1.324219		1.326172	0.006209
	1.326172	1.325195	0.002037
	1.325195	1.324707	-0.000047

Folglich besitzt f die Nullstelle $\xi \doteq 1.3247$. ○

⑥ Jedes Polynom ungeraden Grades,

$$p(x) := x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + \ldots + a_1 x + a_0 ,$$

besitzt wenigstens eine reelle Nullstelle.

⌜ Für alle $x \neq 0$ gilt

$$p(x) = x^{2m+1}\left(1 + \frac{a_{2m}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^{2m+1}}\right) .$$

Hier strebt die Klammer mit $x \to \pm\infty$ gegen 1. Wegen $\operatorname{sgn}(x^{2m+1}) = \operatorname{sgn} x$ gibt es daher ein $a < 0$ und ein $b > 0$ mit $p(a) < 0 < p(b)$. Auf diese Situation lässt sich Satz **(4.21)** anwenden. ⌟

○

Monotone Funktionen

Im folgenden ist $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall mit Endpunkten

$$a := \inf I \quad (\geq -\infty) , \qquad b := \sup I \quad (\leq \infty) .$$

Mit Satz **(4.3)** ergibt sich ohne weiteres:

(4.22) *Ist f auf dem Intervall I monoton wachsend, so existieren die Grenzwerte*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to a+} f(t) &= \inf\{f(t) \mid t > a\} =: \alpha \quad (\geq -\infty) , \\ \lim_{t\to b-} f(t) &= \sup\{f(t) \mid t < b\} =: \beta \quad (\leq \infty) \end{aligned} \tag{5}$$

und in jedem inneren Punkt x von I die beiden einseitigen Grenzwerte $f(x-)$, $f(x+)$, wobei gilt: $f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$.

Hieraus folgt, dass eine monotone Funktion nicht allzu unstetig sein kann. Wir beweisen:

(4.23) *Eine monotone Funktion ist stetig bis auf höchstens abzählbar viele Sprungstellen.*

⌜ Gilt $f(x-) = f(x) = f(x+)$, so ist f stetig an der Stelle x. Es genügt daher, zu zeigen, dass es höchstens abzählbar viele $x \in I$ geben kann, für die $f(x-) < f(x)$ oder $f(x) < f(x+)$ ist.

Es seien x und y, $x < y$, zwei Sprungstellen. Dann gilt

$$f(x-) < f(x+) \leq f(y-) < f(y+)\,;$$

somit sind die beiden Sprungintervalle $]\,f(x-), f(x+)\,[$ und $]\,f(y-), f(y+)\,[$ disjunkt. Wählt man daher in jedem Sprungintervall von f eine rationale Zahl, so erhält man lauter verschiedene Zahlen, und hieraus folgt wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$, dass es höchstens abzählbar viele Sprungintervalle bzw. zugehörige Sprungstellen x geben kann. ⌟

Eine streng monotone Funktion ist injektiv. Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ überdies stetig, so ist $f(I)$ wieder ein Intervall, und die Umkehrfunktion ist von selbst stetig. Es gilt nämlich der folgende **Hauptsatz über monotone Funktionen**:

(4.24) *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetige und streng monoton wachsende Funktion. Dann ist $f(I) =: J$ ein Intervall "vom gleichen Typ" wie I, und f bildet I bijektiv auf J ab. Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$ ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.*

⌜ Wir zeigen als erstes:

$$]\,\alpha, \beta\,[\subset J \subset [\,\alpha, \beta\,]\,; \tag{6}$$

dabei sind α und β durch (5) definiert. Zu beliebigem $\eta \in]\,\alpha, \beta\,[$ gibt es nämlich zwei Punkte t_1, $t_2 \in I$ mit $f(t_1) < \eta < f(t_2)$ und somit nach dem Zwischenwertsatz ein $\tau \in]\,t_1, t_2\,[\subset I$ mit $f(\tau) = \eta$. — Die rechte Inklusion (6) ist klar.

Hiernach ist J ein Intervall. Wegen der strengen Monotonie von f besitzt J genau dann ein minimales bzw. ein maximales Element, wenn das für I der Fall ist; somit ist J "vom gleichen Typ" wie I.

Wir setzen zur Abkürzung $f^{-1} =: g$ und betrachten zwei Punkte y_1, $y_2 \in J$ mit $g(y_1) \geq g(y_2)$. Da f monoton ist, ergibt sich hieraus

$$f\bigl(g(y_1)\bigr) \geq f\bigl(g(y_2)\bigr)\,,$$

also $y_1 \geq y_2$. Hiermit ist gezeigt: Aus $y_1 < y_2$ folgt $g(y_1) < g(y_2)$; das heisst: g ist streng monoton wachsend.

Um die Stetigkeit von g zu beweisen, genügt es, das folgende zu verifizieren: Für jedes feste $\eta < \beta$ gilt

$$\lim_{y\to\eta+} g(y) = g(\eta) \quad (=: \xi)\ .$$

Der angeschriebene Grenzwert existiert jedenfalls. Die Stetigkeit von f garantiert

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi) = \eta\ ,$$

und zwar ist $f(x) > \eta$ für alle $x > \xi$. Somit erhalten wir auf Grund von Satz **(3.15)**:

$$\lim_{y\to\eta+} g(y) = \lim_{x\to\xi+} g\bigl(f(x)\bigr) = \lim_{x\to\xi+} x = \xi\ .$$

⑦ $\bigl($Vgl. den Satz **(4.3)**$\bigr)$ Betrachte einen festen Wurzelexponenten $q \geq 2$. Die Funktion $f : t \mapsto t^q$ ist stetig und streng monoton wachsend auf dem Intervall $I := [\,0, \infty\,[$. Wegen $f(0) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ können wir daher folgendes sagen: Die Funktion f bildet das Intervall I bijektiv auf sich selbst ab. Insbesondere gibt es zu jedem $y \geq 0$ genau ein $t \geq 0$ mit $t^q = y$; dieses t ist die q**-te Wurzel** von y und wird mit $\sqrt[q]{y}$ bezeichnet. Die Wurzelfunktion

$$(f^{-1} =) \quad \sqrt[q]{\cdot}\ : \quad [\,0, \infty\,[\ \to\ [\,0, \infty\,[$$

ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Hieraus folgt natürlich auch die Regel

$$y_k \geq 0 \ \ \forall k \quad \wedge \quad \lim_{k\to\infty} y_k = \eta \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[q]{y_k} = \sqrt[q]{\eta}\ .$$

Aufgaben

1. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
   (a) Zeige, dass f ein globales Maximum oder ein globales Minimum annimmt.
   (b) Darf man in (a) das "oder" durch "und" ersetzen?
2. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y,z) := \frac{\cos(x+y) - \sin(x+z)}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

   Zeige, dass f sowohl ein globales Maximum als auch ein globales Minimum annimmt.

3. Die folgenden Aussagen über eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind so zu formulieren, dass dabei keine Negation ("nicht", "kein", "un-" oder ähnlich) verwendet wird:
   (a) der $\lim_{x\to 1} f(x)$ existiert nicht;
   (b) f ist nicht gleichmässig stetig;
   (c) f ist nicht streng monoton.
4. Ist die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I :=]\,0, 1\,]$ gleichmässig stetig, so existiert der $\lim_{x\to 0+} f(x)$. *Hinweis:* Cauchy-Kriterium.
5. Eine stetige Funktion $f : [\,a, b\,] \to [\,a, b\,]$ besitzt wenigstens einen **Fixpunkt**, das heisst: Es gibt einen Punkt $\xi \in [\,a, b\,]$ mit $f(\xi) = \xi$. Figur!
6. Es sei λ ein fester reeller Parameter. Zeige: Die Gleichung
$$\cot x = \lambda x$$
   besitzt in jedem Intervall $]k\pi, (k+1)\pi[\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$, eine Lösung.
7. Es seien a_1 und a_2 positive Zahlen, und es sei $\lambda_1 < \lambda_2$. Dann besitzt die Gleichung
$$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} = 0$$
   genau eine Lösung im Intervall $]\,\lambda_1, \lambda_2\,[$.
8. Ist $f : S^1 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf der Peripherie des Einheitskreises, so gibt es zwei Diametralpunkte auf S^1, in denen f denselben Wert annimmt.
9. Die vier Teilflächen der Figur 4.4.2 besitzen denselben Flächeninhalt. Bestimme mit Hilfe binärer Suche einen Näherungswert für den Winkel α.

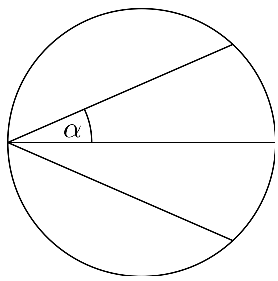

Fig. 4.4.2

10. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst **unimodal**, wenn sie bis zu einer bestimmten Stelle $\xi \in I$ streng monoton wächst und anschliessend streng monoton fällt.
    (a) Erfinde einen Suchalgorithmus für ξ $(I = [\,a, b\,]$ vorausgesetzt).
    (b) Wende diesen Algorithmus an auf das Beispiel
$$f(t) := \sqrt{t} - e^t \qquad (0 \le t \le 1) .$$