5

Reihen

5.1 Folgen von Partialsummen

Definitionen und Beispiele

Ist $a_.$ eine beliebige Folge von Zahlen oder Vektoren, so heisst der formale Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \tag{1}$$

eine **Reihe**, die einzelnen a_k sind die **Glieder** dieser Reihe. Es ist natürlich unmöglich, unendlich viele Additionen tatsächlich auszuführen. Man kann aber die Folge $s_.$ der endlichen **Partialsummen**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

betrachten und das Verhalten dieser Folge untersuchen. Existiert der (eigentliche) Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n =: s$, so heisst die Reihe **konvergent**, und s ist ihre **Summe**. Ist eine Reihe (1) als konvergent erwiesen, so bezeichnet (1) gerade auch deren Summe s. — Besitzt die Folge $s_.$ keinen eigentlichen Grenzwert, so heisst die Reihe (1) **divergent**.

① Die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \tag{2}$$

besitzt für beliebiges $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, die Partialsummen

$$s_n = 1 + z + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \ .$$

Ist $|z| < 1$, so gilt $z^n \to 0 \quad (n \to \infty)$, wir erhalten daher mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad (z \in \mathbb{C},\ |z| < 1)\ .$$

Für $|z| \geq 1$ ist die Reihe (2) divergent, da sie die nachfolgende Konvergenzbedingung (3) nicht erfüllt. ○

(5.1) *Ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent, so gilt jedenfalls*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0\ . \tag{3}$$

⌜ Man hat $a_n = s_n - s_{n-1} \ \to\ s - s = 0 \quad (n \to \infty)\,.$ ⌟

Die Bedingung (3) ist für Konvergenz notwendig, aber nicht hinreichend: Damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, müssen die a_k “genügend schnell” gegen 0 gehen. Hierzu das folgende Standardbeispiel:

② Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

ist divergent, trotz $1/k \to 0 \ \ (k \to \infty)$. Für beliebiges $n \geq 1$ gilt nämlich

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,,$$

und hieraus folgt mit vollständiger Induktion:

$$s_{2^r} \geq 1 + \frac{r}{2} \qquad (r \geq 0)\ .$$

Eine Reihe mit unbeschränkten Partialsummen ist natürlich divergent. ○

Für das Rechnen mit Reihen gelten die folgenden Regeln:

(5.2) *Ist* $\sum_k a_k = s,\ \sum_k b_k = s'$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$, *so folgt*

$$\sum_k (a_k + b_k) = s + s'\,, \qquad \sum_k (\lambda\, a_k) = \lambda s\ .$$

⌜ Aufgrund der Rechenregeln für endliche Summen und für Grenzwerte von Folgen gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = s_n + s'_n \ \to\ s + s' \qquad (n \to \infty)\ .$$

Analog schliesst man für die zweite der behaupteten Formeln. ⌟

Erste Konvergenzkriterien

Es folgen die zwei allgemeinen Konvergenzkriterien **(5.3)** und **(5.4)**. Mit ihrer Hilfe werden wir verschiedene gebrauchsfreundliche Konvergenztests gewinnen, die dann zum ständigen Repertoire gehören.

Wir beginnen mit dem Hauptkriterium für **Reihen mit positiven Gliedern**; das sind Reihen (1) mit reellen Gliedern $a_k \geq 0$. Die Partialsummen einer derartigen Reihe bilden wegen

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0 \qquad (n \geq 0)$$

eine monoton wachsende Folge. Mit Satz **(4.2)** ergibt sich daher sofort:

(5.3) *Eine Reihe* (1) *mit positiven Gliedern ist genau dann konvergent, wenn ihre Partialsummen s_n beschränkt sind, das heisst: wenn es ein M gibt mit $s_n \leq M$ für alle n.*

③ Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

besitzt beschränkte Partialsummen:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2\,, \end{aligned}$$

(eine sogenannte **teleskopierende Summe**), und ist folglich konvergent. Die Summe dieser Reihe ist $\pi^2/6$, wie Euler als erster gefunden hat. ○

Es folgt das **Cauchy-Kriterium für Reihen**:

(5.4) *Eine Reihe (1) mit Gliedern in $\mathbb{X}$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon \qquad \forall m \geq n > n_0\ .$$

⌈ Wegen $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| = |s_m - s_n|$ ist **(5.3)** nichts anderes als das Cauchy-Kriterium **(4.5)**, angewandt auf die Folge der Partialsummen. ⌋

Eine unmittelbare Konsequenz von **(5.4)** ist der folgende Sachverhalt:

(5.5) *Ist $a_k = b_k$ für alle $k \geq k_0$, so sind die Reihen $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ beide konvergent oder beide divergent.*

Restsummen

Ist die Reihe (1) konvergent mit Summe s, so heisst die Reihe

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

die n**-te Restsumme** von (1) oder auch der **Abbrechfehler**. Wie zu erwarten, gilt

(5.6) (a) $$R_n = s - s_n \ ,$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \ .$$

⌜ Betrachte für ein festes n die Partialsummen

$$r_m := \sum_{k=n+1}^{m} a_k \qquad (m \geq n)$$

der Reihe R_n. Es gilt $r_m = s_m - s_n$ und folglich

$$R_n := \lim_{m\to\infty} r_m = s - s_n \ .$$

Damit ist (a) bewiesen, und (b) folgt unmittelbar aus (a). ⌟

Aufgaben

1. Es seien $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ zwei feste Vektoren im dreidimensionalen Raum, $|\mathbf{b}| < 1$, und es sei die Vektorfolge $\mathbf{a}_{\bullet}$ rekursiv definiert durch

   $$\mathbf{a}_0 := \mathbf{a} \ , \qquad \mathbf{a}_{k+1} := \mathbf{b} \times \mathbf{a}_k \quad \text{(Vektorprodukt)}.$$

   Berechne $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k$. *Hinweis:* Benutze die geometrische Definition des Vektorprodukts. Figur!

2. Es sei

   $$\varepsilon_k := \begin{cases} 1, & \text{wenn die Dezimaldarstellung von } k \text{ keine '9' enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zeige, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k}$ konvergiert.

3. Aus zwei reellen Folgen $a_{\bullet}$ und $b_{\bullet}$ wird vermöge

   (a) $c_k := \max\{a_k, b_k\}$, (b) $c_k := a_k b_k$

   eine dritte Folge $c_{\bullet}$ gebildet. Beweise oder widerlege: Konvergieren die Reihen $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_k c_k$.

5.2 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit Gliedern in $\mathbb{X}$ heisst **absolut konvergent**, wenn die zugehörige **Betragsreihe** $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, eine Reihe mit positiven Gliedern, konvergiert.

(5.7) (a) *Absolut konvergente Reihen sind konvergent.*

(b)
$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \ .$$

⌜ Für beliebige $m \geq n \geq -1$ gilt

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|\right| \ .$$

Hieraus folgt (a) mit **(5.4)**. Setzt man weiter $n := -1$, so ergibt sich mit $m \to \infty$ die Behauptung (b). ⌟

Die Umkehrung von **(5.7)**(a) gilt nicht, in anderen Worten: Es gibt Reihen, die gerade noch konvergieren, da sich positive und negative a_k gegenseitig fast herausheben; die Beträge $|a_k|$ gehen aber nicht schnell genug nach 0, um $\sum_k |a_k|$ konvergent zu machen. Solche Reihen heissen **bedingt konvergent** (s.u.); für die numerische Berechnung der betreffenden Summe taugen sie nichts.

Majorantenkriterium

Konvergiert eine vorgelegte Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut, so lässt sich das im allgemeinen leicht nachweisen. Man benötigt dazu das folgende **Majorantenkriterium** sowie einen Vorrat an bekannten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit positiven Gliedern, die als konvergente **Majoranten** bzw. als divergente **Minoranten** der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in Frage kommen.

(5.8) (a) *Gilt $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq k_0$ und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

(b) *Gilt $0 \leq c_k \leq a_k$ für alle $k \geq k_0$ und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ divergent, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.*

⌜ Für beliebige $m \geq n$ gilt

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} c_k \ .$$

Die Behauptung (a) ergibt sich daher wie im vorangehenden Satz mit **(5.4)**, und (b) folgt durch Kontraposition. $\lrcorner$

① Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit dem allgemeinen Glied

$$a_k := \frac{k \sin k + \sqrt[k]{k^5}}{(2k - \sqrt{k})^3}$$

gilt

$$|a_k| = \frac{1}{k^2}\,|A_k|\,, \qquad A_k := \frac{\sin k + \sqrt[k]{k^5}/k}{(2 - 1/\sqrt{k})^3}\;.$$

Im Ausdruck A_k strebt der Nenner mit $k \to \infty$ gegen 8, der zweite Summand des Zählers gegen 0, ferner ist $|\sin k| \le 1$ für alle k. Es gibt daher ein k_0, so dass für alle $k \ge k_0$ gilt: $|A_k| \le 2/7$, und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ besitzt die nach Beispiel 5.1.③ konvergente Majorante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{7}\frac{1}{k^2}$. Die betrachtete Reihe ist also absolut konvergent. ○

② Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit dem allgemeinen Glied

$$a_k := \frac{(\sqrt{k} - 2)^2}{k^2 + \sqrt{k^4 + 1}}$$

hat man

$$a_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{(1 - 2/\sqrt{k})^2}{1 + \sqrt{1 + 1/k^4}}\;.$$

Hier konvergiert der zweite Faktor mit $k \to \infty$ gegen $1/2$; es gibt somit ein k_0 mit $a_k \ge 1/(3k)$ für alle $k \ge k_0$, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert auf Grund der Divergenz der harmonischen Reihe (Beispiel 5.1.②). ○

Reihen mit exponentiell abnehmenden Gliedern

Satz **(5.8)** liefert zusammen mit dem Ergebnis von Beispiel 5.1.① das folgende Kriterium:

(5.9) *Gibt es ein $q < 1$, ein $C > 0$ und ein k_0 mit*

$$|a_k| \le C\,q^k \qquad (k \ge k_0)\,,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Etwas schwächer ist das folgende **Quotientenkriterium**:

(5.10) *Sind alle $c_k > 0$ und gibt es ein $q < 1$ sowie ein k_0 mit*

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} \leq q \qquad (k \geq k_0)\,, \tag{1}$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent.

⌈ Aus (1) ergibt sich mit vollständiger Induktion: Für beliebige $k \geq k_0$ gilt

$$c_k \leq q^{k-k_0} c_{k_0} = \frac{c_{k_0}}{q^{k_0}}\, q^k\,,$$

und dies beweist nach **(5.9)** die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. ⌋

③ Bei der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k := \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \ldots$$

betragen die Quotienten c_{k+1}/c_k alternierend 2 und 1/8. Das Quotientenkriterium gibt somit keinen Aufschluss. Hingegen hat man

$$c_k = \frac{1}{2^{k+(-1)^k}} \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad (k \geq 0)\,,$$

so dass **(5.9)** die betrachtete Reihe als konvergent erweist. ○

Die nach **(5.9)** bzw. **(5.10)** konvergenten Reihen konvergieren mindestens so gut wie eine geometrische Reihe. Bei einer geometrischen Reihe hat die Restsumme bzw. der Abbrechfehler den Wert

$$s - s_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}}{1-q}\,,$$

nimmt also mit wachsendem n exponentiell ab. Dies lässt sich folgendermassen interpretieren: Mit jedem zusätzlich berücksichtigten Glied erhält man $\log_{10}(1/q)$ weitere Dezimalstellen der gesuchten Summe. Man spricht in diesem Zusammenhang von **linearer Konvergenz**.

An der Grenze zur Divergenz

Die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ von Beispiel 5.1.③ konvergiert schlechter. Für beliebiges $q < 1$ ist ja $\lim_{k\to\infty} k^2 q^k = 0$ und somit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1/k^2}{q^k} = \infty \ .$$

Hieraus zieht man den Schluss, dass es keine Abschätzung der Form

$$\frac{1}{k^2} \leq C q^k \qquad (k \geq k_0)$$

geben kann. Wie dieses Beispiel zeigt, folgt aus dem "Versagen" eines Konvergenzkriteriums noch lange nicht, dass die betrachtete Reihe divergiert. Die allfällige Divergenz muss vielmehr mit Hilfe eines Divergenzkriteriums, zum Beispiel **(5.1)** oder **(5.8)**(b), ausdrücklich bewiesen werden.

Um weitere Vergleichsreihen zur Verfügung zu stellen, beweisen wir noch den folgenden Satz, der das Resultat von Beispiel 5.1③ wesentlich verbessert (ein einfacherer Beweis wird in Abschnitt 9.5 gegeben):

(5.11) *Die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$$

ist für jedes feste $\varepsilon > 0$ konvergent.

⌜ Es gibt ein natürliches p mit $\dfrac{1}{p} < \varepsilon$, und hieraus folgt

$$\frac{1}{k^{1+\varepsilon}} \leq \frac{1}{k^{1+1/p}} \qquad (k \geq 1) \ .$$

Wir stellen die folgende Hilfsbetrachtung an: Ist $0 < x < y$, so gilt

$$y^p - x^p = (y-x)(y^{p-1} + y^{p-2}x + \ldots + x^{p-1}) < (y-x)\, p\, y^{p-1} \cdot \frac{y^2}{xy} \ ,$$

wobei wir rechter Hand den Faktor $y^2/(xy) > 1$ hinzugefügt haben. Es folgt

$$\frac{y^p - x^p}{y^{p+1}} < p\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \ .$$

Setzen wir $x := (k-1)^{1/p}$ und $y := k^{1/p}$, so geht dies über in

$$\frac{1}{k^{1+1/p}} < p\left(\frac{1}{(k-1)^{1/p}} - \frac{1}{k^{1/p}}\right) \ ,$$

und durch Summation ergibt sich (das meiste hebt sich heraus):

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{1+1/p}} < p\left(1 - \frac{1}{n^{1/p}}\right) < p \qquad (n \geq 2) .$$

Hieraus folgt mit **(5.3)** die Behauptung (p ist fest!). ┘

Satz **(5.11)** und das Beispiel der harmonischen Reihe (Beispiel 5.1.2) zusammen genommen lassen vielleicht die Vermutung aufkommen, es existiere eine “letzte” konvergente Reihe oder eine “erste” divergente Reihe mit positiven Gliedern c_k. Die betreffenden Folgen $c_.$ lägen “irgendwo in der Nähe der Folge $k \mapsto 1/k$” und müssten dann ein “universelles Vergleichskriterium” liefern. Um solche Vorstellungen ein für allemal auszuräumen, beweisen wir den folgenden Satz:

(5.12) *Zu jeder konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, alle $c_k > 0$, gibt es eine Folge $d_.$ mit $d_k/c_k \to \infty$, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ immer noch konvergiert.*

┌ Die Restsummen $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$ konvergieren nach **(5.6)** und nach Voraussetzung über die c_k monoton fallend nach 0. Setzen wir daher

$$d_k := \sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k} \qquad (k \geq 1) ,$$

so gilt für die Partialsummen s_n der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}\right) = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_n} \to \sqrt{R_0} \qquad (n \to \infty) .$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ ist also konvergent. Ferner hat man wegen der Monotonie der R_k:

$$d_k = \frac{R_{k-1} - R_k}{\sqrt{R_{k-1}} + \sqrt{R_k}} \geq \frac{c_k}{2\sqrt{R_{k-1}}} ,$$

und hieraus ergibt sich

$$\frac{d_k}{c_k} \geq \frac{1}{2\sqrt{R_{k-1}}} \to \infty \qquad (k \to \infty) .$$ ┘

Auf ähnliche Art beweist man den zu **(5.12)** komplementären Satz für eine divergente Ausgangsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$: Hier gibt es eine Folge $d_.$ mit $d_k/c_k \to 0$, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ immer noch divergiert.

Aufgaben

1. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + i^k}{(3i)^k - 2^k}$,

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$, (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$.

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent?

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin(x/k)$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \bigl(1 - \cos(x/k)\bigr)$,

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tan\left(\frac{x}{k}\right)$, (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k$ (Quotientenkriterium).

3. Zeige: Konvergieren die a_k monoton fallend gegen 0 und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt

   $$\lim_{k\to\infty} \bigl(k a_k\bigr) = 0 \ .$$

   Hinweis: $n a_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.

4. Es sei K die Menge der Punkte in der (α, β)-Ebene, für die die Reihe

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k^\alpha}$$

   konvergiert. Zeichne die Menge K, mit Angabe von Gründen.

5. Zeige: Zu jeder divergenten Reihe $\sum_k c_k$ mit positiven Gliedern c_k gibt es eine Folge $d_.$ mit $d_k/c_k \to 0$, so dass die Reihe $\sum_k d_k$ immer noch divergiert.

6. Schreibt man eine Binärfolge

   $$\beta_. : \quad \mathbb{Z} \to \mathbb{B} \ , \qquad k \mapsto \beta_k$$

   mit $\beta_k = 0$ $(k < -r)$ als “unendlichen Dualbruch”

   $$‘\ \beta_{-r}\ \ldots\ \beta_{-1}\,\beta_0\ .\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\ \ldots\ ’ \ ,$$

   so wird dadurch eine reelle Zahl x bestimmt, nämlich

   $$x := \sum_{k=-r}^{\infty} \beta_k 2^{-k} \ . \tag{$*$}$$

   Umgekehrt: Jedes $x \geq 0$ lässt sich in der Form $(*)$ darstellen, und zwar besitzen die $x \in \mathbb{D}_{>0}$ genau zwei derartige Darstellungen, alle übrigen $x \geq 0$ genau eine. *Hinweis:* Ist $x > 0$ gegeben, so lassen sich die zugehörigen β_n rekursiv bestimmen, indem man zunächst ein zulässiges r findet und dann die Grössen $x - \sum_{k=-r}^{n-1} \beta_k 2^{-k}$ betrachtet.

5.3 Bedingt konvergente Reihen

Alternierende Reihen

Bei absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kommt die Konvergenz allein durch das Kleinwerden der Beträge $|a_k|$ zustande, bei bedingt konvergenten Reihen hingegen in erster Linie durch den Ausgleich zwischen positiven und negativen Gliedern. Am anschaulichsten kommt dies bei den sogenannten **alternierenden Reihen** zum Ausdruck, das sind Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$$

mit positiven und streng monoton nach 0 abnehmenden c_k:

$$c_k > c_{k+1} > 0 \quad (k \geq 0) , \qquad \lim_{k\to\infty} c_k = 0 . \tag{1}$$

Es gilt der folgende Satz:

(5.13) (a) *Alternierende Reihen sind konvergent.*

(b) *Ist $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k$ eine alternierende Reihe mit Summe s, so bilden die Partialsummen s_2, s_4, s_6, … eine streng monoton fallende und die Partialsummen s_1, s_3, s_5, … eine streng monoton wachsende Folge, und für alle n gilt*

$$s = s_n + \theta\,(-1)^{n+1} c_{n+1} \tag{2}$$

mit einem (von n abhängigen) $\theta \in\,]\,0,1\,[$. In anderen Worten: Der Abbrechfehler ist ein echter Bruchteil des ersten vernachlässigten Gliedes.

⌜ Für beliebiges $m \geq 0$ gelten die Ungleichungen

$$s_{2m+2} = s_{2m} - c_{2m+1} + c_{2m+2} < s_{2m} ,$$
$$s_{2m+3} = s_{2m+1} + c_{2m+2} - c_{2m+3} > s_{2m+1}$$

(Fig. 5.3.1). Die beiden Folgen $(s_{2m})_{m\geq 0}$ und $(s_{2m+1})_{m\geq 0}$ sind somit streng monoton wie angegeben, und es folgt weiter

$$s_1 \leq s_{2m+1} = s_{2m} - c_{2m+1} < s_{2m} \leq s_0 \qquad (m \geq 0) .$$

Aufgrund von Satz **(4.2)** konvergieren daher die s_{2m+1} gegen einen Grenzwert s' und die s_{2m} gegen s''. Wegen $s_{2m} - s_{2m+1} = c_{2m+1} \to 0 \;\; (m \to \infty)$ ist notwendigerweise $s' = s'' =: s$. Man hat daher

$$s_{2m+1} < s < s_{2m+2} = s_{2m+1} + c_{2m+2} ,$$

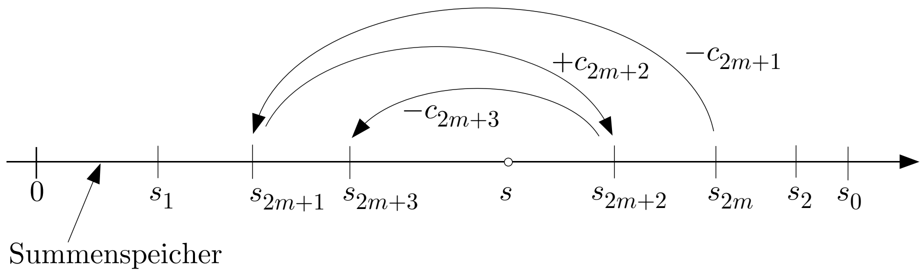

Fig. 5.3.1

und dies ist äquivalent zu (2) für $n := 2m+1$. Analog schliesst man für gerades n. (1) und (2) zusammen liefern schliesslich $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. $\lrcorner$

① Das Standardbeispiel einer bedingt konvergenten Reihe ist die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \quad .$$

Wie wir später zeigen werden, besitzt sie die Summe $\log 2$. Mit dieser Reihe verwandt ist die **Leibnizsche Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

mit der Summe $\pi/4$. Zur numerischen Berechnung von $\log 2$ und $\pi/4$ sind diese Reihen natürlich ungeeignet. ◯

Satz **(5.13)**(a) ist enthalten in dem folgenden **Konvergenzkriterium von Abel**:

(5.14) *Genügt die Folge* $c_.$ *der Bedingung* (1) *und besitzt die Reihe* $\sum \alpha_k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, *beschränkte Partialsummen, so ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \alpha_k$ *konvergent.*

Bei den hier betrachteten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \alpha_k$ erbringen die α_k (sie brauchen nicht zu konvergieren) die für bedingte Konvergenz erforderliche Oszillation, während die "Dämpfungsfaktoren" c_k dafür sorgen, dass jedenfalls $c_k \alpha_k \to 0$ $(k \to \infty)$ gilt. Charakteristische Kandidaten für das Abelsche Konvergenzkriterium sind die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\phi)}{k}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\phi)}{k}\,,$$

ϕ fest. Die in Beispiel ① betrachteten Reihen sind Spezialfälle hiervon. Wir werden darauf zurückkommen.

Zum Beweis von **(5.14)** benötigen wir den Kunstgriff der **partiellen Summation**, die offensichtlich der partiellen Integration (Abschnitt 9.3) nachempfunden ist. Für beliebige Folgen $s_.$ und $c_.$ und für beliebige $m \geq n \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_{k-1})c_k &= \sum_{k=n+1}^{m} s_k c_k - \sum_{k=n+1}^{m} s_{k-1} c_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} s_k c_k - \sum_{k'=n}^{m-1} s_{k'} c_{k'+1} \qquad (3) \\ &= s_m c_m - s_n c_n + \sum_{k=n}^{m-1} s_k (c_k - c_{k+1}) \ . \end{aligned}$$

⌜ Beweis von **(5.14)**: Wir setzen $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k =: s_n$. Nach Voraussetzung gibt es ein $M > 0$ mit $|s_n| \leq M$ für alle n. Es sei nun ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und n_0 so bestimmt, dass gilt:

$$c_n < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (n > n_0) \ .$$

Wegen $s_k - s_{k-1} = \alpha_k$ ergibt sich nun mit (3), dass folgende Abschätzung für alle $n > n_0$ zutrifft:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k c_k \right| &\leq |s_m|\,|c_m| + |s_n|\,|c_n| + \sum_{k=n}^{m-1} |s_k|\,|c_{k+1} - c_k| \\ &\leq M \left(c_m + c_n + \sum_{k=n}^{m-1} (c_k - c_{k+1}) \right) = M \cdot 2c_n < \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt mit **(5.3)** die Behauptung. ⌟

Umstellung der Reihenglieder

Absolut konvergente Reihen sind ziemlich robust und haben in vielerlei Hinsicht dieselben Eigenschaften wie endliche Summen. Insbesondere können ihre Glieder beliebig umgestellt werden, und die Summe bleibt dieselbe. Im Gegensatz dazu sind bedingt konvergente Reihen sehr subtile Kreaturen. Wird die Reihenfolge der Glieder verändert, so ändert sich im allgemeinen auch die Summe — noch schlimmer: Durch geeignete Umstellung der Glieder lässt sich jedes vorgegebene $\sigma \in \bar{\mathbb{R}}$ als Summe realisieren. Wir beweisen darüber:

(5.15) *Es sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{X}$, *eine absolut konvergente Reihe mit Summe* s. *Dann besitzt auch jede durch Vertauschung der* a_k *erhaltene Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *die Summe* s.

⌜ Die Umstellung der Ausgangsreihe wird durch eine bijektive Abbildung $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ realisiert; es ist $b_j := a_{\phi(j)} \quad (j \geq 0)$. — Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon \ .$$

Es gibt ein r_0, so dass die Menge der Zahlen $\phi(j)$, $0 \leq j \leq r_0$, wenigstens alle Zahlen von 0 bis n_0 enthält. Für alle $r \geq r_0$ und für alle $n \geq n_0$ gilt daher

$$\left| \sum_{j=0}^{r} b_j - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{N} |a_k| < \varepsilon \ , \tag{4}$$

dabei bezeichnet N die grösste der Zahlen n, $\phi(0)$, $\phi(1)$, $\ldots$, $\phi(r)$. Beide Summen linker Hand enthalten nämlich wenigstens die Glieder a_0, a_1, $\ldots$, a_{n_0}, aber kein a_k mit $k > N$. Aus (4) folgt mit $n \to \infty$:

$$\left| \sum_{j=0}^{r} b_j - s \right| \leq \varepsilon \qquad (r \geq r_0) \ ,$$

was zu beweisen war. ⌟

(5.16) *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern a_k, und es sei ein Wert $\sigma \in \bar{\mathbb{R}}$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine Permutation ϕ von $\mathbb{N}$ mit $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\phi(j)} = \sigma$.*

⌜ Für beliebige $a \in \mathbb{R}$ bezeichnet man mit

$$a^+ := \max\{a, 0\} \ , \qquad a^- := \max\{-a, 0\}$$

den positiven und den negativen “Anteil” von a. Es gilt

$$a = a^+ - a^- \ , \qquad |a| = a^+ + a^- \ .$$

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k^+ + a_k^-)$ divergiert, muss wenigstens eine der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- \tag{5}$$

divergieren, und da $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-)$ konvergiert, müssen dann gleich beide Reihen (5) divergieren. Hieraus folgt mit **(5.5)**:

$(*)$ Zu jedem n und zu jedem C gibt es ein m und ein m' mit

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k^+ > C \ , \qquad\qquad \sum_{k=n+1}^{m'} a_k^- > C \ .$$

Wir konstruieren nun rekursiv eine Permutation ϕ, die die Glieder der Ausgangsreihe so umstellt, dass eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} b_j,\ \ b_j = a_{\phi(j)}$, mit Summe $\sigma \in \mathbb{R}$ entsteht (die Fälle $\sigma = \pm\infty$ überlassen wir dem Leser). Mit s_n bezeichnen wir die Partialsummen der *umgestellten* Reihe, $s_{-1} := 0$. Die Rekursionsvorschrift lautet folgendermassen:

$$\phi(n) := \begin{cases} \min\bigl\{k \bigm| a_k > 0 \ \wedge\ k \neq \phi(j)\ (0 \leq j < n)\bigr\} & (s_{n-1} < \sigma) \\ \min\bigl\{k \bigm| a_k \leq 0 \ \wedge\ k \neq \phi(j)\ (0 \leq j < n)\bigr\} & (s_{n-1} \geq \sigma) \end{cases} .$$

In Worten: Ist $s_{n-1} < \sigma$, so wählt man als b_n das erste noch “unverbrauchte” $a_k > 0$, und ist $s_{n-1} \geq \sigma$, so wählt man als b_n das erste noch “unverbrauchte” $a_k \leq 0$. Durch $(*)$ ist sichergestellt, dass die Partialsummen s_n nie definitiv auf einer Seite von σ bleiben (siehe die Fig. 5.3.2), so dass sowohl die $a_k > 0$ wie die $a_k \leq 0$ nach und nach “aufgebraucht” werden. Durch das beschriebene Verfahren wird also in der Tat eine Permutation ϕ von $\mathbb{N}$ definiert.

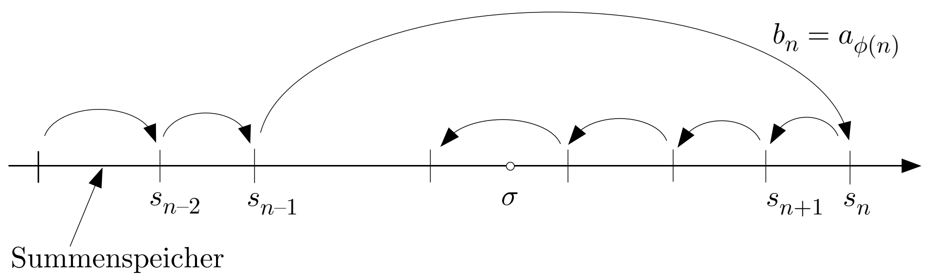

Fig. 5.3.2

Um nun $\sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sigma$ zu beweisen, geben wir ein $\varepsilon > 0$ vor und beachten, dass die a_k gegen 0 konvergieren. Es gibt daher ein k_0 mit $|a_k| < \varepsilon$ für alle $k > k_0$. Weiter gibt es ein r_0 mit

$$\phi(j) > k_0 \qquad (j > r_0)\ , \tag{6}$$

denn nach einer gewissen Anzahl Schritten sind $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{k_0}$ bestimmt “aufgebraucht”. Aus (6) folgt

$$|b_j| = |a_{\phi(j)}| < \varepsilon \qquad (j > r_0)\ . \tag{7}$$

Schliesslich gibt es ein $r_1 > r_0$, so dass gilt:

$$s_{r_1-1} < \sigma \leq s_{r_1} = s_{r_1-1} + b_{r_1}\ . \tag{8}$$

Wir behaupten: Für alle $n \geq r_1$ gilt $|s_n - \sigma| < \varepsilon$. Wegen (8) trifft dies jedenfalls zu für $n = r_1$. Im weiteren Verlauf liegt s_{n+1} jeweils näher bei σ als s_n, falls kein Sprung über σ hinweg erfolgt, und wegen (7) gilt

$$|s_{n+1} - \sigma| \leq |b_{n+1}| < \varepsilon\ ,$$

wenn s_n und s_{n+1} auf verschiedenen Seiten von σ liegen. $\lrcorner$

Aufgaben

1. Man stelle die Glieder der alternierenden harmonischen Reihe so um, dass eine divergente Reihe entsteht. Es sind so viele Glieder der umgestellten Reihe anzuschreiben, dass ein Konstruktionsgesetz erkennbar wird. *Hinweis:* Divergenzbeweis für die harmonische Reihe.
2. Behandle den Fall $\sigma = \infty$ in Satz **(5.16)**.

5.4 Potenzreihen I

Funktionenreihen

Die bis dahin betrachteten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ waren **konstante Reihen**: Für jedes k ist a_k eine bestimmte Zahl bzw. ein Vektor. Die Summe einer derartigen Reihe ist wieder eine gewisse Zahl, zum Beispiel π, bzw. ein Vektor. Wesentlich aufregender sind Funktionenreihen, mit deren Hilfe wir vom Boden der rationalen Funktionen abheben und in vielfältiger Weise neuartige Klassen von Funktionen produzieren können.

Ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion

$$f_k : \quad A \to \mathbb{X}, \qquad x \mapsto f_k(x) \tag{1}$$

erklärt, so spricht man von einer **Funktionenfolge** auf A und bezeichnet diese Folge mit $(f_k)_{k \geq 0}$ oder ähnlich. Die allgemeine Untersuchung von Funktionenfolgen findet in Kapitel 11 statt; insbesondere wird man erklären müssen, was "Konvergenz gegen eine Grenzfunktion f" bedeutet.

Ist eine Funktionenfolge (1) gegeben, so stellt $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für jedes feste $x \in A$ eine konstante Reihe dar. Für einige $x \in A$ wird diese Reihe konvergieren, für andere nicht. Die erstgenannten $x \in A$ konstituieren zusammen den **Konvergenzbereich** A' $(\subset A)$ der **Funktionenreihe** $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Die **Summe** dieser Funktionenreihe ist dann — wie erwartet — die Funktion

$$s(\cdot) : \quad A' \to \mathbb{X}\,, \qquad x \mapsto s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\ .$$

Von den Funktionenreihen sind die Potenzreihen am verbreitetsten und am leichtesten zu handhaben, theoretisch und rechnerisch. Von Newton stammt das folgende Prinzip: *"Jede vernünftige Funktion f lässt sich an jeder Stelle x_0 im Innern von* $\operatorname{dom}(f)$ *in eine Potenzreihe entwickeln oder als Potenzreihe ansetzen."* Die Theorie der Potenzreihen wird am besten verständlich, wenn man sie im Komplexen betrachtet. Wir werden also wahlweise die reelle Variable t (bzw. x) oder die komplexe Variable z benützen.

Es sei $a_.$ eine beliebige Folge von reellen oder komplexen Zahlen. Dann heisst

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{2}$$

eine **Potenzreihe (mit Mittelpunkt** 0**)**, etwas allgemeiner ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

eine **Potenzreihe mit Mittelpunkt** x_0. Für grundsätzliche Erwägungen genügt es natürlich, Reihen der Form (2) zu betrachten.

Die einzelnen Summanden in (2) sind Monome $z \mapsto a_k z^k$, die Partialsummen $s_n(z)$ sind Polynome in der Variablen z und damit auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Der Konvergenzbereich einer Reihe (2) hängt natürlich ab von den **Koeffizienten** a_k: Werden die Beträge $|a_k|$ mit $k \to \infty$ rasch sehr klein, so darf $|z|$ ziemlich gross sein, und die Reihe (2) konvergiert immer noch. Wenn die Beträge $|a_k|$ im Gegenteil mit $k \to \infty$ rasch anwachsen, so wird die Reihe nur für sehr kleine $|z|$ konvergieren. Im einzelnen gilt der folgende Satz:

Potenzreihen konvergieren auf Kreisscheiben

(5.17) (a) *Jede Potenzreihe* (2) *besitzt einen wohlbestimmten* **Konvergenzradius** ρ, $0 \leq \rho \leq \infty$*: Für* $|z| < \rho$ *ist die Reihe absolut konvergent und für* $|z| > \rho$ *divergent.*

(b) *Der Konvergenzradius* ρ *hat den Wert*

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \qquad (\leq \infty)\,, \tag{3}$$

falls dieser Grenzwert existiert, und in jedem Fall den Wert

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}\,, \tag{4}$$

wobei $1/0 := \infty$, $1/\infty := 0$ *gesetzt werden soll.*

Es sei ρ definiert durch (3). Ist $|z| > \rho$, so gibt es ein k_0 mit

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| < |z| \qquad (k > k_0)\,,$$

und hieraus folgt $|a_{k+1} z^{k+1}| > |a_k z^k|$ $(k > k_0)$. Mit $a_k z^k \to 0$ $(k \to \infty)$ ist dies jedenfalls nicht vereinbar; somit ist die Reihe (2) für ein derartiges z divergent.

Ist $|z| < \rho$ $(\leq \infty)$, so gibt es ein ρ' mit $|z| < \rho' < \rho$ und weiter ein k_0 mit

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| > \rho' \qquad (k > k_0)\ .$$

Hieraus folgt

$$\frac{|a_{k+1} z^{k+1}|}{|a_k z^k|} < \frac{|z|}{\rho'} < 1 \qquad (k > k_0)\,;$$

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k|$ ist daher nach dem Quotientenkriterium **(5.10)** konvergent.

Es sei jetzt ρ definiert durch (4). Ist $|z| > \rho$ (≥ 0), so gilt

$$\frac{1}{|z|} < \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

und folglich $\sqrt[k]{|a_k|} > 1/|z|$ für unendlich viele k. Dies impliziert $|a_k z^k| > 1$ für unendlich viele k; somit ist die Reihe (2) für dieses z divergent.

Ist $|z| < \rho$, so gibt es wieder ein ρ' mit $|z| < \rho' < \rho$ $(\leq \infty)$, und man hat

$$\frac{1}{\rho'} > \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\ .$$

Es gibt daher ein k_0 mit $\sqrt[k]{|a_k|} < 1/\rho'$ für alle $k > k_0$, und hieraus folgt weiter

$$|a_k z^k| < \left(\frac{|z|}{\rho'}\right)^k \qquad (k > k_0)\ .$$

Wegen $q := |z|/\rho' < 1$ folgt hieraus mit **(5.9)**, dass die Reihe (2) für das betreffende z absolut konvergiert. ┘

① Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert auf der offenen Kreisscheibe $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und stellt dort, aber nicht darüber hinaus, die Funktion $z \mapsto 1/(1-z)$ dar.

Allgemeiner: Gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, ein $C > 0$ und ein k_0 mit

$$\frac{1}{Ck^p} \leq |a_k| \leq Ck^p \qquad (k > k_0)\ , \tag{5}$$

so besitzt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ den Konvergenzradius 1. Aus (5) folgt nämlich

$$\frac{1}{\sqrt[k]{C}\,\left(\sqrt[k]{k}\right)^p} \leq \sqrt[k]{|a_k|} \leq \sqrt[k]{C}\,\left(\sqrt[k]{k}\right)^p\ ,$$

und hier konvergieren die äusseren Glieder mit $k \to \infty$ gegen 1.

Die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{j^2}}{j!} = 1 + z + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{16}}{4!} + \ldots$$

muss erst auf die Form (2) gebracht werden. Es ergibt sich

$$a_k = \begin{cases} 1/j! & (k = j^2,\ j \in \mathbb{N}) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

und somit

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j^2]{1/j!} \ .$$

Für alle $j \geq 1$ gilt $1 \leq j! \leq j^j$ und folglich

$$1 \leq \sqrt[j^2]{j!} \leq \sqrt[j]{j} \ .$$

Da hier die rechte Seite mit $j \to \infty$ gegen 1 konvergiert, ergibt sich auch in diesem Beispiel: $\rho = 1$. ◯

Satz **(5.17)** sagt nichts aus über das Verhalten der Reihe (2) auf der Kreislinie $|z| = \rho$. Dieses Verhalten ist tatsächlich von Reihe zu Reihe verschieden, wie die folgenden Beispiele zeigen.

② Die Reihe $\sum_{k=0}^\infty z^k$ ist in allen Punkten von $\partial D := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| = 1\bigr\}$ divergent. — Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty z^k/k$ divergiert an der Stelle $z := 1$ und konvergiert an der Stelle $z := -1$. Mit Hilfe des Abelschen Konvergenzkriteriums lässt sich zeigen, dass diese Reihe tatsächlich in allen Punkten $z \in \partial D \setminus \{1\}$ konvergiert (s.u.). — Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty z^k/k^2$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium in allen Punkten von ∂D. ◯

Vor allem sagt **(5.17)** nichts aus über die Eigenschaften der von der Reihe (2) dargestellten Funktion

$$f(z) := \sum_{k=0}^\infty a_k z^k \qquad \bigl(|z| < \rho\bigr) \ .$$

Ist f stetig (differenzierbar, ...)? Wir werden in Abschnitt 11.5 sehen, dass ein derartiges f so “schön” ist, wie man nur will. Bis wir so weit sind, müssen wir gegebenenfalls *ad hoc* Stetigkeitsbetrachtungen durchführen.

Es seien

$$f(z) := \sum_{k=0}^\infty a_k z^k \ , \qquad g(z) := \sum_{k=0}^\infty b_k z^k \tag{6}$$

zwei in der Kreisscheibe $|z| < \rho$ durch Potenzreihen dargestellte Funktionen. Dann gilt natürlich

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^\infty (a_k + b_k) z^k \qquad (|z| < \rho) \ .$$

Produkt zweier Reihen

Lässt sich auch das Produkt $f \cdot g$ durch eine Potenzreihe ausdrücken? Werden die zwei Reihen (6) wie Polynome distributiv ausmultipliziert und die sich ergebenden Terme nach ihrem Grad in Pakete zusammengefasst, so ergibt sich rein formal

$$f(z)g(z) = \sum_k a_k z^k \cdot \sum_l b_l z^l \overset{?}{=} \sum_{k,\,l} a_k b_l z^{k+l} \overset{?}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=r} a_k b_l \right) z^r \ . \qquad (7)$$

Dies legt nahe, die Grössen

$$c_r := \sum_{k+l=r} a_k b_l = \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k} \ \in \mathbb{C} \qquad (r \in \mathbb{N}) \qquad (8)$$

einzuführen. Jedes einzelne c_r ist eine endliche Summe; die Folge

$$c_. =: a_. * b_.$$

heisst das **Faltungsprodukt** der beiden Folgen $a_.$ und $b_.$. — Der folgende Satz handelt von konstanten Reihen (bzw. vom Spezialfall $z := 1$), wobei wir uns natürlich von (7) inspirieren lassen.

(5.18) *Die beiden (reellen oder komplexen) Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ seien absolut konvergent, und es sei $c_. := a_. * b_.$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} c_r$ absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l \ . \qquad (9)$$

⌜ Aus (8) folgt zunächst

$$\left| \sum_{r=0}^{N} c_r - \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \sum_{l=0}^{N} b_l \right| \le \sum_{(k,l)\in\Delta} |a_k b_l| =: R \,, \qquad (10)$$

dabei bezeichnet Δ die Menge der $(k, l) \in [0\,.\,.N] \times [0\,.\,.N]$ mit $k + l > N$. Ist $k + l > N$, so ist wenigstens eine der Zahlen k und l grösser als $N/2$. Wir haben daher weiter (siehe die Fig. 5.4.1):

$$\begin{aligned} R \ &\le \sum_{N/2<k\le N} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{N} |b_l| + \sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot \sum_{N/2<l\le N} |b_l| \\ &\le \sum_{k>N/2} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{l>N/2} |b_l| \ . \end{aligned}$$

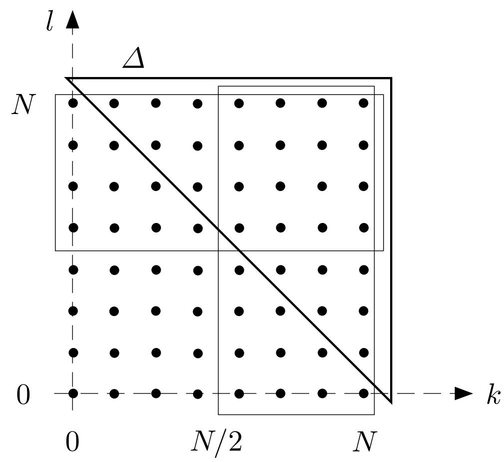

Fig. 5.4.1

Da die Ausgangsreihen absolut konvergieren, strebt hier die rechte Seite nach **(5.6)** mit $N \to \infty$ gegen 0, also auch die linke Seite von (10). Damit ist (9) bewiesen.

Weiter gilt $|c_r| \leq \sum_{k+l=r} |a_k|\,|b_l| =: \tilde{c}_r$, und die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{c}_r$ ist nach dem schon Bewiesenen konvergent. Folglich ist die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} c_r$ absolut konvergent. ⌟

Besitzen die beiden Reihen (6) Konvergenzradien $\geq \rho$, so genügen sie für jedes feste z mit $|z| < \rho$ den Voraussetzungen von Satz **(5.18)**. Für jedes solche z gilt daher

$$f(z)g(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} a_k z^k \, b_{r-k} z^{r-k} \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k} \right) z^r ,$$

mit absoluter Konvergenz. Damit haben wir bewiesen:

(5.19) *Besitzen die beiden Reihen*

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k , \qquad g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Konvergenzradien $\geq \rho$ *und ist* $c_{\cdot} := a_{\cdot} * b_{\cdot}$ *, so besitzt* $f \cdot g$ *die Darstellung*

$$f(z)g(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r \qquad \big(|z| < \rho\big) \ .$$

③ Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^k \ .$$

Faltet man die Folge $(1, 1, 1, \ldots)$ mit sich selbst, so ergibt sich $\sum_{k=0}^{r} 1 \cdot 1 = r + 1$ für alle $r \in \mathbb{N}$. Die Funktion $z \mapsto 1/(1-z)^2$ besitzt daher die folgende Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) z^r = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots \qquad (|z| < 1) \; .$$

○

Die Exponentialreihe

Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \ldots \tag{11}$$

heisst **Exponentialreihe**. Wegen

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{(k+1)!}{k!} = k + 1 \to \infty \qquad (k \to \infty)$$

besitzt sie den Konvergenzradius ∞, somit ist

$$\exp: \quad z \mapsto \exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

eine in der ganzen z-Ebene definierte komplexwertige Funktion, genannt **Exponentialfunktion**. Für reelle z ist natürlich auch $\exp z$ reell. Wir werden diese Funktion im nächsten Kapitel eingehend untersuchen und beweisen hier nur die folgenden drei Grundtatsachen:

Erstens die **Funktionalgleichung der Exponentialfunktion**, eine fundamentale Identität, die man als "Additionstheorem" von exp auffassen kann:

(5.20) *Für beliebige z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2 \; .$$

⌜ Faltet man die Folgen $a_k := z_1^k/k!$ und $b_l := z_2^l/l!$, so erhält man nach dem binomischen Lehrsatz:

$$c_r := \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k} = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{r} \frac{r!}{k!(r-k)!} z_1^k z_2^{r-k} = \frac{(z_1 + z_2)^r}{r!} \qquad (r \in \mathbb{N}) \, ,$$

und mit **(5.18)** ergibt sich

$$\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{r=0}^{\infty} c_r = \exp(z_1 + z_2) \; .$$ ⌟

Zweitens gibt es einen Grenzwert:

(5.21)
$$\lim_{z\to 0}\frac{\exp z - 1}{z} = 1 \ .$$

⌜ Wir dürfen von vorneherein $|z| < 1$ annehmen. Aus (11) folgt

$$\frac{\exp z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots =: 1 + R(z) \ ,$$

wobei sich $R(z)$ durch

$$|R(z)| \le \frac{|z|}{2} + \frac{|z|^2}{6} + \frac{|z|^3}{24} + \ldots \le \frac{|z|}{2}\big(1 + |z| + |z|^2 + \ldots\big) = \frac{|z|}{2(1-|z|)}$$

abschätzen lässt. Hier strebt die rechte Seite mit $z \to 0$ gegen 0, somit ist auch $\lim_{z\to 0} R(z) = 0$. ⌟

Drittens ergibt sich mit Hilfe der beiden ersten:

(5.22) *Die Exponentialfunktion ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.*

⌜ Betrachte ein festes $z_0 \in \mathbb{C}$. Nach **(5.20)** gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$:

$$\begin{aligned}\exp z &= \exp z_0 + \exp z_0 \cdot \big(\exp(z - z_0) - 1\big) \\ &= \exp z_0 + \exp z_0 \, \frac{\exp(z - z_0) - 1}{z - z_0}\,(z - z_0) \ .\end{aligned}$$

Nach **(3.15)** und **(5.21)** strebt hier der Bruch rechter Hand mit $z \to z_0$ gegen 1, und es folgt
$$\lim_{z\to z_0} \exp z = \exp z_0 \ .$$

Da $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig war, ist hiermit die Behauptung bewiesen. ⌟

Aufgaben

1. Es bezeichne β_n die Anzahl der Ziffern in der Binärdarstellung von n. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n$.

2. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ gegebene nichtnegative Zahlen. Bestimme den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_p^k) t^{2k} \ .$$

3. Es bezeichne a_n die Anzahl Arten, n Leute im Verhältnis $1:2$ in zwei Gruppen einzuteilen. Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + 3z^3 + \ldots\ .$$

4. Es seien α und β positive Zahlen. Wie gross ist der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+\alpha^k}{1+\beta^k}\, z^k\ ?$$

5. Mit Hilfe der **Fibonacci-Folge**

$$a_0 := 0\,, \qquad a_1 := 1 \qquad a_k := a_{k-1} + a_{k-2} \quad (k \geq 2)$$

wird folgende Potenzreihe gebildet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + \ldots\ . \qquad (*)$$

(a) Die Reihe $(*)$ konvergiert mindestens für $|z| < 1/2$ und stellt dort eine Funktion $f(z)$ dar.

(b) Es ist $f(z) = \dfrac{z}{1-z-z^2}$. *Hinweis:* Verifiziere $(1-z-z^2)f(z) \equiv z$.

(c) Die Funktion f besitzt eine Zerlegung der Form

$$f(z) = \frac{A}{1-\lambda z} + \frac{B}{1-\mu z}$$

und lässt sich daher als Summe von zwei geometrischen Reihen schreiben. Dies liefert eine zweite Darstellung von f als Potenzreihe und damit einen geschlossenen Ausdruck für die k-te Fibonacci-Zahl a_k.

(d) Bestimme den Konvergenzradius der Reihe $(*)$.

6. Zeige (ohne Verweis auf die Exponentialfunktion): Die Funktion

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

genügt der Funktionalgleichung

$$f(2z) = 2\bigl(f(z)\bigr)^2 - 1 \qquad (z \in \mathbb{C})\ .$$

Hinweis: Beginne mit der rechten Seite der behaupteten Identität. Es werden Potenzen $(1 \pm 1)^r$ auftreten.