8

Differentialgleichungen I

8.1 Einführung

Mathematische Modelle

Man erhält ein mathematisches Modell von einem realen, in der Natur oder in der Technik angesiedelten “System”, indem man einige als wesentlich und in ihrer Gesamtheit als ausreichend erachtete Zustandsgrössen (zum Beispiel: Druck, Lage und Geschwindigkeit einzelner Komponenten, Stromstärken an bestimmten Stellen eines Netzwerks usw.) herausgreift und sich überlegt, wie diese Grössen in ihrer zeitlichen Entwicklung aneinander gekoppelt sind.

Das Ergebnis dieser Überlegungen sind die sogenannten **konstituierenden Gleichungen** des betreffenden Systems. Bei Systemen von endlich vielen Freiheitsgraden sind das in aller Regel Differentialgleichungen oder Systeme von Differentialgleichungen. Die Herleitung dieser Gleichungen gehört zur Theorie des betreffenden realen Systems, die Mathematik stellt nur die Begriffe, wie “Ableitung”, “Vektorraum”, “periodisch” usw., zur Verfügung. Es gibt über das Aufstellen eines mathematischen Modells keine “Metatheorie” mit eigenen Lehrsätzen, die in entsprechenden Vorlesungen doziert werden könnte. Es ist vielmehr so, dass man nur an Hunderten von Beispielen beobachten und nachvollziehen kann, wie das etwa vor sich geht.

① Eine radioaktive Substanz X wird durch Zerfall ihrer Atome abgebaut zur Substanz Y. Über den Zerfallsmechanismus macht man sich folgende Vorstellungen: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes zur Zeit t noch lebendes X-Atom in dem sehr kurzen Zeitintervall $[\,t, t + \Delta t\,]$ zerfällt, ist proportional zu Δt. Es gibt also eine Materialkonstante $\lambda > 0$ mit

$$\mathcal{P}\big[\,\text{Zerfall in } [\,t, t+\Delta t\,]\,\big] \doteq \lambda\,\Delta t\ .$$

Im weiteren zerfallen die Atome unabhängig voneinander und unabhängig von ihrer Vorgeschichte. Bezeichnet also $N(t)$ die Anzahl der zur Zeit t noch lebenden X-Atome, so kann man erwarten, dass im Zeitintervall $[\,t, t+\Delta t\,]$ insgesamt

$$N(t)\cdot\mathcal{P}\bigl[\,\text{Zerfall in }[\,t, t+\Delta t\,]\bigr]$$

Stück davon zerfallen. Folglich gilt

$$N(t+\Delta t) - N(t) \;\doteq\; -N(t)\,\lambda\,\Delta t\ . \tag{1}$$

Ein X-Atom hat die sehr kleine Masse m_X. Wir dürfen daher die zur Zeit t vorhandene makroskopische Substanzmenge

$$x(t) \;:=\; N(t)\,m_X$$

(= Totalmasse an Substanz X) als kontinuierliche Variable auffassen. Aus (1) folgt sofort

$$x(t+\Delta t) - x(t) \;\doteq\; -x(t)\,\lambda\,\Delta t$$

und somit nach Division mit Δt:

$$\bigl(\,\dot x(t) \;\doteq\bigr) \qquad \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \;\doteq\; -\lambda\,x(t)\ ,$$

wobei dieser Näherung eine sehr kurze Zeitspanne $\Delta t > 0$ zugrundeliegt. Nun kommt ein weiterer Gedankensprung: Wir "gehen zum Limes über" und erklären: Für die reellwertige Funktion $x(\cdot)$, die die Totalmasse an Substanz X modelliert, gilt *exakt*

$$\dot x(t) \;=\; -\lambda\,x(t)\ , \tag{2}$$

und zwar zu jedem Zeitpunkt t. In anderen Worten: Die unbekannte Funktion $x(\cdot)$ und ihre Ableitung $\dot x(\cdot)$ sind miteinander verknüpft durch die Gleichung

$$\dot x \;=\; -\lambda\,x\ .$$

Wir haben hier zum ersten Mal eine sogenannte *Differentialgleichung* vor uns. Die Unbekannte in dieser Gleichung ist nicht eine Zahl oder ein Vektor, sondern eine *Funktion*: Gesucht sind diejenigen Funktionen $t \mapsto x(t)$, die *identisch in* t die Gleichung (2) befriedigen.

Ein Beispiel aus der Mechanik

② Wir betrachten das in Fig. 8.1.1 skizzierte mechanische System. Die Feder übt (in beiden Richtungen) eine zum Ausschlag y proportionale Rückstellkraft aus, und die Dämpfung erzeugt eine zur Momentangeschwindigkeit $\dot{y}$ proportionale Reibungskraft; überdies ist eine (zum Beispiel durch Ein- und Ausschalten eines Magneten bewirkte) äussere Anregung ("Störkraft") $K(t)$ vorgesehen, die als bekannt vorausgesetzt wird und auch $\equiv 0$ sein kann. Es handelt sich um ein System mit einem einzigen Freiheitsgrad: Die Aktion des Systems wird vollständig beschrieben durch das Verhalten der einen Lagevariablen y.
In jedem Moment wirken auf den Massenpunkt drei Kräfte, die zusammen eine Beschleunigung $\ddot{y}$ erzielen. Diese Vorstellung führt nach Newton auf die **Bewegungsgleichung**

$$m\ddot{y} = -fy - b\dot{y} + K(t)$$

bzw.

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = K(t) \tag{3}$$

mit positiven Systemkonstanten m, b, f. Dies ist schon die konstituierende Gleichung des vorliegenden Systems: Für jeden möglichen Ablauf $t \mapsto y(t)$ stehen die drei Funktionen $y(\cdot)$, $\dot{y}(\cdot)$ und $\ddot{y}(\cdot)$ in der Relation (3), und das heisst: Es gilt *identisch in* t:

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + fy(t) \equiv K(t)\ . \tag{4}$$

Die Gleichung (3) ist eine **lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**; sie ist **homogen**, falls $K(t) \equiv 0$ ist. Eine **Lösung** dieser Gleichung ist eine Funktion $y(\cdot)\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$, die die Identität (4) realisiert.
Ein typisches Experiment beginnt zur Zeit $t := 0$ mit einer bestimmten Anfangslage y_0 und einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit v_0. Die physikalische Anschauung sagt uns, dass der weitere Ablauf durch diese beiden **Anfangsbedingungen**

$$y(0) = y_0\ , \qquad \dot{y}(0) = v_0 \tag{5}$$

eindeutig bestimmt ist. Demnach ist zu erwarten, dass die Differentialgleichung (3) a priori unendlich viele Lösungen besitzt und dass erst die Angaben (5) eine ganz bestimmte Funktion aus dieser Lösungsgesamtheit $\mathcal{L}$ festlegen. (3) und (5) zusammen konstituieren ein sogenanntes **Anfangswertproblem**.

Die Aufgabe ist damit gestellt: ausgehend von (3) die Gesamtheit $\mathcal{L}$ der möglichen Abläufe $t \mapsto y(t)$ so explizit wie möglich zu beschreiben oder, wenn das zu schwierig ist, ein Verfahren anzugeben, mit dem Lösungen von Anfangswertproblemen (3)$\wedge$(5) wenigstens numerisch berechnet werden können.

Zur Vereinfachung beschränken wir uns vorläufig auf den homogenen ("ungestörten") Fall

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy \ = \ 0\ . \tag{6}$$

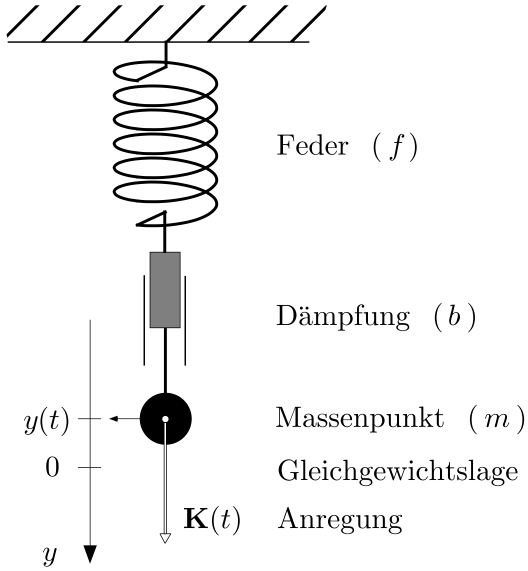

Fig. 8.1.1

Die ähnliche, aber noch einfachere Differentialgleichung $\dot{y} - ay = 0$ bzw. $\dot{y} = ay$ hat die Lösungen $y(t) = C\,e^{at}$, $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir versuchen daher für (6) den Lösungsansatz

$$y(t) \;:=\; e^{\lambda t}\,,$$

wobei wir uns die Wahl von λ noch vorbehalten. Ein solcher Ansatz ist dann erfolgreich, wenn wir durch geeignete Wahl des (komplexen!) Parameters λ die "Einsetzung" in (6) identisch in t befriedigen können. Wegen

$$y(t) = e^{\lambda t}\,, \qquad \dot{y}(t) = \lambda\, e^{\lambda t} \qquad \ddot{y}(t) = \lambda^2\, e^{\lambda t}$$

müsste also folgendes gelten:

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + f e^{\lambda t} \;\equiv\; 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (m\lambda^2 + b\lambda + f)\, e^{\lambda t} \equiv 0\;.$$

Es zeigt sich, dass λ der quadratischen Gleichung

$$m\lambda^2 + b\lambda + f = 0 \tag{7}$$

genügen muss. Man nennt $q_L(\lambda) := m\lambda^2 + b\lambda + f$ das zu (6) gehörige **charakteristische Polynom**, (7) die **charakteristische Gleichung** und deren Lösungen die **Eigenwerte** von (6).

Eigenwerte sind die beiden (unter Umständen komplexen) Zahlen

$$\lambda_1 \;:=\; \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m}\,, \qquad \lambda_2 \;:=\; \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m}\,,$$

wobei wir für das weitere $b^2 - 4fm > 0$ annehmen wollen. Bei dieser starken Dämpfung fallen λ_1 und λ_2 reell aus, und zwar ist $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Damit haben wir zunächst einmal die beiden folgenden Lösungen von (6):

$$Y_1(t) := e^{\lambda_1 t}, \qquad Y_2(t) := e^{\lambda_2 t}.$$

Die Linearität und Homogenität der Differentialgleichung (6) hat nun zur Folge, dass mit $Y_1(\cdot)$ und $Y_2(\cdot)$ von selbst auch jede **Linearkombination**

$$y(t) := c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

diese Gleichung löst:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + b\dot{y} + fy &= m(c_1Y_1 + c_2Y2)^{\cdot\cdot} + b(c_1Y_1 + c_2Y_2)^{\cdot} + f(c_1Y_1 + c_2Y_2) \\ &= c_1(m\ddot{Y}_1 + b\dot{Y}_1 + fY_1) + c_2(m\ddot{Y}_2 + b\dot{Y}_2 + fY_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die zweiparametrige Funktionenschar (8) stellt schon die Gesamtheit $\mathcal{L}$ der Lösungen von (6) dar (dies wird sich aus der allgemeinen Theorie ergeben). Alle Lösungen nehmen mit $t \to \infty$ exponentiell ab (Fig. 8.1.2). Schreiben wir sie in der Form

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}\right) \\ &= e^{\lambda_1 t}\bigl(c_1 + o(1)\bigr) \qquad (t \to \infty), \end{aligned}$$

so sehen wir, dass die “Zeitkonstante” dieser Abnahme durch den grösseren Eigenwert λ_1 bestimmt ist, und weiter, dass es höchstens *einen* Nulldurchgang gibt, nämlich dann, wenn die monotone Funktion

$$t \mapsto c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

eine Nullstelle besitzt.

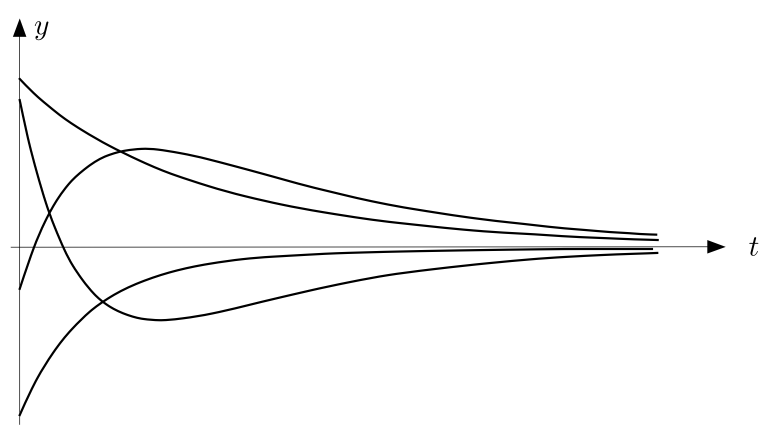

Fig. 8.1.2

Sind Anfangsbedingungen (5) vorgegeben, so werden dadurch die **Integrationskonstanten** c_1 und c_2 bestimmt. Wir müssen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \ , \\ \dot{y}(t) &= c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

an der Stelle $t := 0$ betrachten und erhalten wegen $e^0 = 1$ das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{ccccc} c_1 & + & c_2 & = & y_0 \\ \lambda_1 c_1 & + & \lambda_2 c_2 & = & v_0 \end{array}\right\} \ .$$

Dieses System besitzt genau eine Lösung, nämlich

$$c_1 = \frac{v_0 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \ , \qquad c_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \ .$$

Damit erhalten wir definitiv als Lösung des Anfangswertproblems (6)∧(5):

$$y(t) \ = \ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[(v_0 - \lambda_2 y_0) e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 y_0 - v_0) e^{\lambda_2 t} \right] \ .$$

○

Differentialgleichungen, allgemein

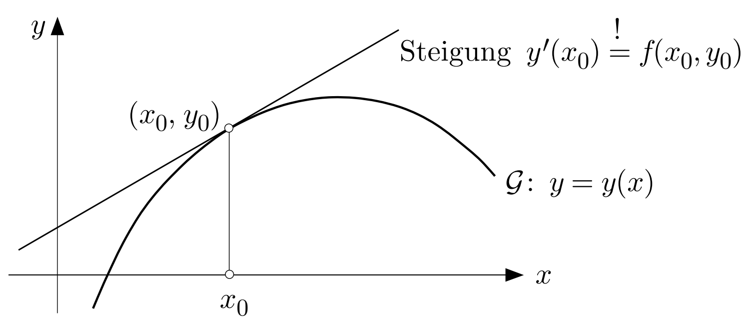

Fig. 8.1.3

In dem hier behandelten Beispiel diente die Differentialgleichung zur Beschreibung eines gewissen zeitlichen Ablaufs; wir haben daher die unabhängige Variable mit t bezeichnet. Wir können aber auch geometrisch argumentieren; es geht dann um “Lösungskurven” in der (x, y)-Ebene.

Eine **Differentialgleichung erster Ordnung** hat allgemein die Form

$$y' \ = \ f(x, y) \qquad \big((x, y) \in \Omega\big) \ ; \tag{9}$$

dabei ist die **rechte Seite** $f(x, y)$ eine *gegebene* Funktion der Variablen x und y. Die Gleichung (9) definiert auf implizite Weise eine Kurvenschar in der (x, y)-Ebene, und zwar folgendermassen: Für jeden Punkt $(x, y) \in \Omega$ stellt der Funktionswert $f(x, y)$ eine in diesem Punkt vorgeschriebene Steigung dar. Gesucht sind die Funktionen

$$y(\cdot): \quad x \mapsto y(x) \qquad (x \in I)$$

mit folgender Eigenschaft: Die Tangentensteigung des Graphen $\mathcal{G}$ von $y(\cdot)$ stimmt an jeder Stelle $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}$ mit dem dort vorgeschriebenen f-Wert $f(x_0, y_0) = f(x_0, y(x_0))$ überein (Fig. 8.1.3). Diese Funktionen $y(\cdot)$ genügen also *identisch in* x der Beziehung

$$y'(x) \;=\; f\bigl(x, y(x)\bigr) \qquad (x \in I)\,,$$

wobei I das Definitionsintervall des jeweiligen $y(\cdot)$ bezeichnet.

In anderen Worten: Die Differentialgleichung (9) definiert ein **Richtungsfeld** in $\operatorname{dom}(f) = \Omega$ (Fig. 8.1.4). Gesucht sind diejenigen Kurven in Ω, die sich in jedem ihrer Punkte der dort gegebenen Richtung anschmiegen.

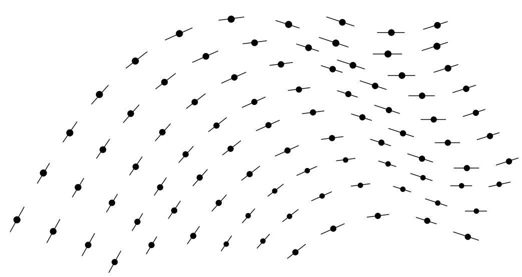

Fig. 8.1.4

Anmerkung: In der Theorie der Differentialgleichungen ist es üblich, denselben Buchstaben als Koordinatenvariable *und* als Variable für Funktionen mit Werten in der betreffenden Koordinate zu verwenden, den Buchstaben y also als Koordinate in der (x, y)-Ebene und als Variable für Funktionen, deren Graph in der (x, y)-Ebene liegt.

③ Betrachte die Differentialgleichung

$$y' \;=\; -x/y \qquad (y > 0)\;.$$

Die im Punkt (x, y) vorgeschriebene Steigung $f(x, y) := -x/y$ liefert die auf dem Ortsvektor (x, y) senkrecht stehende Richtung (Fig. 8.1.5). Die Lösungskurven sind offenbar Halbkreisbögen um O, und zwar geht durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom}(f)$ genau ein derartiger Bogen. Analytisch wird die Lösungsschar beschrieben durch

$$y_c(x) \;=\; \sqrt{c^2 - x^2} \quad (-c < x < c)\,, \qquad c \in \mathbb{R}_{>0}\;.$$

○

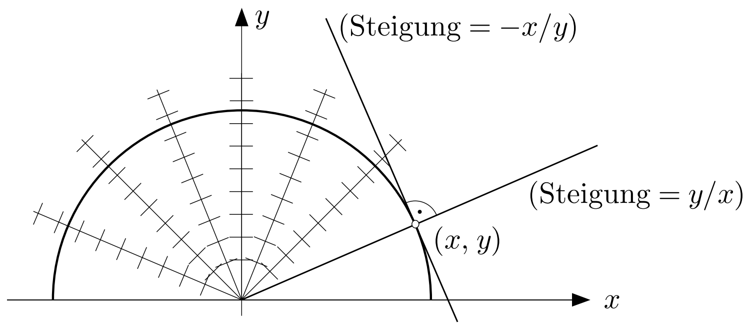

Fig. 8.1.5

Der Hauptsatz über Anfangswertprobleme

Wir werden in Kapitel 11 den folgenden **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** exakt formulieren und beweisen:

(EE) *Ist die rechte Seite der Differentialgleichung* (9) *eine "vernünftige" Funktion, so geht durch jeden Punkt* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *genau eine Lösungskurve. In anderen Worten: Jedes Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y)\,, \qquad y(x_0) = y_0$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung

$$x \mapsto y(x) \qquad (x \in I)\ ,$$

deren Definitionsintervall I *noch von* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *abhängen kann.*

Jede in der Nähe von (x_0, y_0) vorbeigehende Lösung schneidet die Vertikale $x = x_0$ auf einer bestimmten Höhe $y = C$ und lässt sich damit als Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y)\,, \qquad y(x_0) = C$$

auffassen. In der Folge ist die Gesamtheit $\mathcal{L}$ der Lösungen von (9) eine einparametrige Funktionenschar mit Scharparameter C. Die Parametrisierung von $\mathcal{L}$, das heisst: die "Nummerierung" der einzelnen Lösungen, ist allerdings durch (9) nicht vorbestimmt. So lassen sich zum Beispiel die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$y' = y \qquad (y > 0)$$

in der Form

$$\gamma_C: \quad y = Ce^x \qquad (C > 0)$$

(vgl. Beispiel ②) präsentieren, aber auch in der Form

$$\gamma_c: \quad y = e^{x-c} \qquad (c \in \mathbb{R})\ .$$

④ Die Differentialgleichung

$$y' = 3\,|y|^{2/3}$$

besitzt die "ordentlichen" Lösungen

$$y_c(x) \;:=\; (x-c)^3\;, \qquad c \in \mathbb{R}\;,$$

sowie die "ausserordentliche" Lösung $y(x) :\equiv 0$; und wenn man will, kann man aus diesem Material weitere Lösungen fabrizieren (Fig. 8.1.6). Die zu den Punkten $(x_0, 0)$ gehörigen Anfangswertprobleme besitzen also mehrere Lösungen, in scheinbarem Widerspruch zu **(EE)**. Dieses Phänomen hat folgenden Grund: Die rechte Seite $f(x,y) := 3|y|^{2/3}$ ist in den Punkten $(x_0, 0)$ nicht genügend "vernünftig" (genau: nicht lipstetig bezüglich y), denn die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} = 3\,|y|^{-1/3}\operatorname{sgn} y$$

sind für $y \to 0$ unbeschränkt. ○

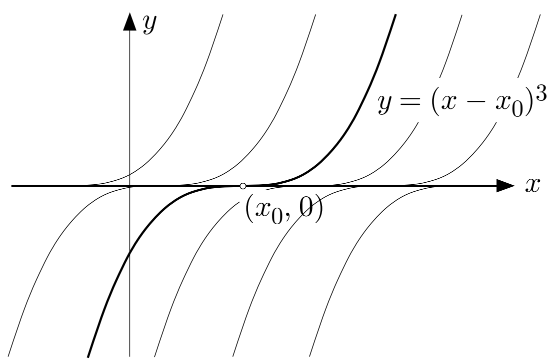

Fig. 8.1.6

Es gibt keinen Algorithmus, mit dessen Hilfe jede formelmässig vorliegende Differentialgleichung formelmässig gelöst ("integriert") werden kann, genau so wenig, wie es einen Algorithmus gibt, der beliebige Gleichungen für eine unbekannte Zahl x, zum Beispiel

$$x^3 + \sin x - e^{-x} = 0\;,$$

akzeptiert und nach endlich vielen Operationen die exakte Lösung ausgibt. Es gibt hingegen wichtige Typen und Klassen von Differentialgleichungen, die formelmässig gelöst werden können; wir werden im folgenden einige davon behandeln. Das vollständigste Verzeichnis derartiger "lösbarer" Differentialgleichungen findet sich in dem immer wieder nachgedruckten Werk

E. Kamke: Differentialgleichungen – Lösungsmethoden und Lösungen. Erste Auflage: 1942 (Teubner).

Ein einfaches numerisches Verfahren

Die geometrische Interpretation legt das folgende einfache Verfahren zur numerischen Behandlung eines Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y) \;, \qquad y(x_0) = y_0$$

nahe (Fig. 8.1.7):

— Wähle eine Schrittweite $h > 0$.

— Für $k \geq 0$ setze rekursiv

$$\begin{aligned} x_{k+1} &:= x_k + h \qquad\qquad (\Longrightarrow\ x_n = x_0 + nh) \;, \\ y_{k+1} &:= y_k + f(x_k, y_k)\, h \;. \end{aligned}$$

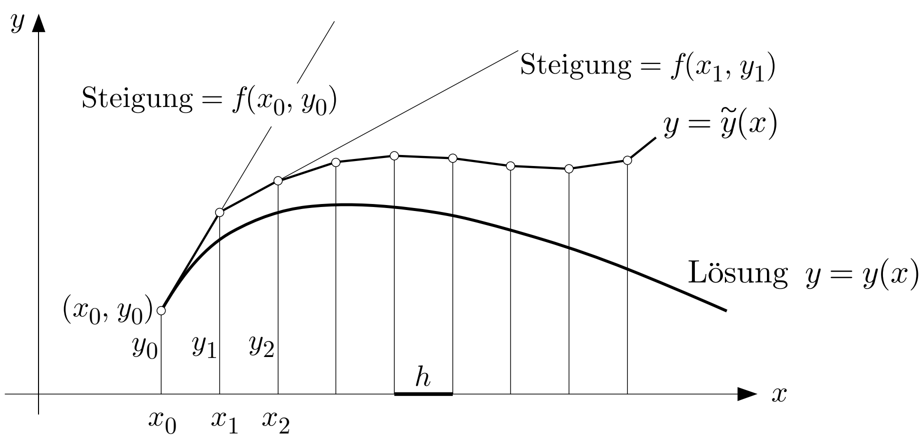

Fig. 8.1.7

Ist $x \mapsto y(x)$ die wahre Lösung des vorliegenden Anfangswertproblems, so liefert dieses sogenannte **Polygonverfahren** zunächst nur an diskreten Stellen x_k Näherungswerte y_k für die wahren Funktionswerte $y(x_k)$. Man kann die Punkte (x_k, y_k) durch einen Streckenzug oder auch durch eine glatte Kurve verbinden und erhält damit eine “angenäherte Lösung” $\tilde{y}(\cdot)$. Der Fehler $|\tilde{y}(x) - y(x)|$ ist natürlich um so kleiner, je kleiner die Schrittweite h gewählt wurde, und wächst exponentiell mit der Distanz des Punktes x von x_0.

③ (Forts.) Wir behandeln das Anfangswertproblem

$$y' = -x/y \;, \qquad y(0) = 1$$

zunächst mit der Schrittweite $h := 0.05$. Es ergibt sich

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$y_{k+1} := y_k + f(x_k, y_k)h$
0	0	1	0	1
1	0.05	1	$-0.05/1$	$1 - 0.05^2 = 0.9975$
2	0.10	0.9975	$-0.10/0.9975$	0.9924
3	0.15	0.9924		
$\vdots$				
10	0.50	0.8814		

Damit erhalten wir den Näherungswert $y(0.5) \doteq 0.8814$. Wählen wir stattdessen $h := 0.001$, so liefert die Rechnung

$$y(0.5) \doteq y_{500} = 0.86634 \ .$$

Nun ist ja die wahre Lösung der Kreisbogen $y = \sqrt{1-x^2}$. Der exakte Wert an der Stelle $x := 0.5$ ist somit

$$y(0.5) = \sqrt{3/4} = 0.86603 \ .$$

○

Differentialgleichungen höherer Ordnung, Systeme von Dglen

Eine **Differentialgleichung** n**-ter Ordnung**, $n \geq 1$, hat allgemein die Form

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}); \tag{10}$$

dabei ist $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Gesucht sind Funktionen $t \to y(t)$, die zusammen mit ihren Ableitungen die Identität

$$y^{(n)}(t) \equiv f\bigl(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\bigr)$$

realisieren. Ein korrekter Satz von Anfangsbedingungen besteht aus den n Einzeldaten

$$y(t_0) = \eta_0 \ , \quad \dot{y}(t_0) = \eta_1 \ , \quad \ldots \ , \quad y^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1} \ . \tag{11}$$

Ist zum Beispiel $n = 2$, so darf man für einen frei gewählten Anfangszeitpunkt Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit vorgeben (siehe Beispiel 2). Da die resultierende Lösungsfunktion in bestimmter Weise von den n Anfangswerten η_0, η_1, …, η_{n-1} abhängt, ist die Lösungsgesamtheit $\mathcal{L}$ eine n-parametrige Funktionenschar.

In Wirklichkeit kommen Differentialgleichungen höherer als vierter Ordnung kaum vor, wohl aber **Systeme von** n **Differentialgleichungen erster Ordnung** für n unbekannte Funktionen $x_k(\cdot) : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$. Ein derartiges System sieht allgemein folgendermassen aus:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} . \tag{12}$$

Tritt die Variable t rechter Hand nicht in Erscheinung, so spricht man von einem **autonomen** ("sich selbst überlassenen") System. Die i-te Gleichung,

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{bzw.} \qquad \dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n),$$

drückt aus, in welcher Weise die zeitliche Änderungsrate der Grösse x_i (zum Beispiel des Drucks im Reaktorgefäss Nr. i) vom augenblicklichen Wert aller einbezogenen Grössen x_1, …, x_n und allenfalls von t-abhängigen äusseren Einflüssen abhängt.

Schreibt man das System (12) vektoriell in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) ,$$

so sieht es aus wie die simple Differentialgleichung (9). Wir werden daher den Satz **(EE)** von Anfang an vektoriell formulieren und beweisen. Da sich die Differentialgleichung (10) mit Hilfe eines einfachen Tricks in ein System (12) überführen lässt, ist dann mitbewiesen, dass Anfangswertprobleme n-ter Ordnung (10)$\wedge$(11) genau eine Lösung haben.

Aufgaben

1. Bestimme die Differentialgleichung des freien Falls
   (a) in der Nähe der Erdoberfläche, unter Vernachlässigung des Luftwiderstands;
   (b) über der Erdoberfläche, unter Berücksichtigung der Abnahme der Schwerkraft;
   (c) im Erdinnern.

   An physikalischen Konstanten erscheinen nur die Erdbeschleunigung $g = 9.81\ \mathrm{m/sec^2}$ und der Erdradius R im Ergebnis. Für (c) muss man wissen, dass die den fallenden Körper umfassende Erdrinde keine Kraft auf ihn ausübt.

2. (a) Es sei

   $$\Gamma : \qquad x^2 + (y - c)^2 = c^2 \quad (c \in \mathbb{R})$$

   die Schar der Kreise, die die x-Achse im Ursprung berühren. Leite durch elementargeometrische Betrachtungen die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ dieser Schar her.

(b) Eine **Orthogonaltrajektorie** der Schar Γ ist eine Kurve σ, die in jedem ihrer Punkte die Scharkurve γ durch den betreffenden Punkt senkrecht schneidet. Wie lautet die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien?

(c) Zeichne einige Kreise der Schar Γ sowie einige Orthogonaltrajektorien. Die Figur bringt einen auf eine plausible Vermutung betreffend die Orthogonalschar $\Gamma^{\perp}$. Beweise diese Vermutung elementargeometrisch.

(d) Verifiziere, dass die in (c) geometrisch ermittelten Orthogonaltrajektorien in der Tat Lösungen der in (b) gefundenen Differentialgleichung sind.

3. Es sei $s > 0$ gegeben. Man bestimme die Differentialgleichung der Kurven γ: $y = y(x)$ im ersten Quadranten, die die Eigenschaft (a) bzw. (b) bzw. (c) besitzen.

   (a) Die Tangentenabschnitte zwischen Berührungspunkt und x-Achse haben alle dieselbe Länge s.

   (b) Die Tangentenabschnitte zwischen den beiden Koordinatenachsen haben alle dieselbe Länge s.

   (c) Die Dreiecke, begrenzt durch Tangente, Ordinate im Berührungspunkt und x-Achse, haben alle denselben Flächeninhalt s^2.

4. Betrachte ein gedämpftes Federpendel mit Masse $m := 2.00$ kg, Federkonstante $f := 300$ N/m und Dämpfungskonstante $b := 60$ kg/s. Der Anfangsausschlag beträgt $y(0) := 0.50$ m. Wie gross darf die nach unten gerichtete Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ höchstens sein, wenn kein Nulldurchgang eintreten soll?

5. Für eine "implizite Differentialgleichung" $F(t, y, y') = 0$ braucht der Existenz- und Eindeutigkeitssatz nicht zu gelten. Zwei Lösungen $y_1(t)$, $y_2(t)$ eines Anfangswertproblems

$$F(t, y, y') = 0\,, \qquad y(t_0) = y_0$$

   werden als verschieden betrachtet, wenn sie in jedem noch so kleinen Intervall $]\, t_0 - h, t_0 + h\, [$ voneinander verschieden sind. — Wieviele verschiedene Lösungen der Differentialgleichung $(y')^4 - y^2 = 0$ gibt es

   (a) für den Anfangspunkt $(1, 0)$, (b) für den Anfangspunkt $(0, 1)$?

6. (a) Zeichne das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = \min\{y, 1\}\ .$$

   (b) Bestimme explizit die beiden Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$ mit den Anfangspunkten

$$P_1 := (0, -1)\,, \qquad P_2 := \left(0, \frac{1}{e}\right)\ .$$

8.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Betrachtungen

Nach den vorbereitenden Beispielen und allgemeinen Ausführungen des vorhergehenden Abschnitts soll hier eine bestimmte Klasse von Differentialgleichungen eingehender untersucht werden. Es trifft sich,

(a) dass die betreffenden Differentialgleichungen unter einem einheitlichen Gesichtspunkt betrachtet und explizit gelöst werden können, und

(b) dass derartige Gleichungen in den verschiedensten Anwendungsgebieten (Physik, Elektrotechnik, ...) eine ungeheure Rolle spielen.

Die in Beispiel 8.1.② behandelte Gleichung gehört zu dieser Klasse. Die nun folgende Theorie ist eine schöne Anwendung der linearen Algebra auf die Analysis.

Es sei $n \geq 1$. Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ \ldots\ + a_1 y' + a_0 y \ = \ 0 \tag{1}$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten a_i heisst **homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**. Sind die a_i reell, so werden reellwertige Lösungen gewünscht; sind sie komplex, so dürfen auch die Lösungen komplex sein.

(8.1) (a) *Jede Lösung von* (1) *ist eine auf ganz* $\mathbb{R}$ *definierte* C^∞*-Funktion.*

(b) *Sind* y_1, y_2 *und* y *Lösungen von* (1), *so sind auch die Funktionen* $y_1 + y_2$ *und* αy $(\alpha \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\in \mathbb{C})$ *Lösungen.*

(c) *Es gibt* n *linear unabhängige Lösungen* $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, *und jede Lösung* y *ist in der Form*

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1 + \ldots + c_{n-1} y_{n-1}$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$ *(bzw.* $\in \mathbb{C}$*) darstellbar.*

In anderen Worten: Die Lösungen von (1) *bilden einen* n*-dimensionalen Vektorraum* $\mathcal{L} \subset C^\infty(\mathbb{R})$.

⌜ Es sei I ein beliebiges offenes Intervall und $\mathcal{L}_I$ die Menge der Lösungen $y\colon I \to \mathbb{R}$. $\mathcal{L}_I$ enthält jedenfalls die **triviale Lösung** $y(t) :\equiv 0$. Jedes $y \in \mathcal{L}_I$ ist *eo ipso* n-mal differenzierbar, also in C^{n-1}. Der Sachverhalt

$$y \in C^{n-1+r} \tag{2}$$

trifft daher für $r = 0$ zu. Gilt aber (2) für ein beliebiges $r \geq 0$, so folgt

$$y^{(n)} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \, y^{(k)} \in C^r \ ,$$

denn jeder Summand rechter Hand ist wenigstens r weitere Male stetig differenzierbar. Hieraus schliesst man auf $y \in C^{n+r}$, das heisst: (2) gilt mit $r+1$ anstelle von r. Die $y \in \mathcal{L}_I$ sind somit beliebig oft differenzierbar.

Die Menge $X := C^\infty(I)$ ist ein Vektorraum, und die Ableitungsoperation

$$D: \quad X \to X \ , \qquad y \mapsto y'$$

ist ein linearer Operator auf X mit Potenzen

$$D^k: \quad X \to X \ , \qquad y \mapsto y^{(k)} \qquad\qquad (k \geq 0) \ .$$

In der Folge gilt für ein beliebiges $y \in X$:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_1 y' + a_0 y & \\ &= D^n y + a_{n-1} \, D^{n-1} y + \ldots + a_0 \, D^0 y \\ &= \bigl(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_0 D^0\bigr) \, y \ . \end{aligned}$$

Wir führen daher den zu (1) gehörigen **Differentialoperator**

$$L := D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_0 D^0 : \quad X \to X \tag{3}$$

ein und können damit (1) in der folgenden kondensierten Art schreiben:

$$Ly = 0 \ . \tag{1'}$$

Hiernach ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}_I$ der Kern des linearen Operators L, also ein Vektorraum von C^∞-Funktionen $I \to \mathbb{R}$.

Wir zeigen als nächstes: Es gibt ein Intervall $I := \,]-h, h[\,$, $h > 0$, mit $\dim \mathcal{L}_I = n$.

⌜ Betrachte für jedes feste $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ das Anfangswertproblem

$$\mathrm{AWP}_r : \quad \begin{cases} \quad Ly \ = \ 0 \ ; \\ y^{(k)}(0) \ = \ \delta_{kr} \qquad (0 \leq k \leq n-1) \ . \end{cases}$$

Hier ist zum ersten Mal das überaus praktische **Kronecker-Delta**

$$\delta_{kr} := \begin{cases} 1 & (k = r) \\ 0 & (k \neq r) \end{cases}$$

aufgetaucht. Nach dem Hauptsatz **(EE)** besitzt jedes dieser n Probleme AWP_r eine wohlbestimmte Lösung $y_r(\cdot)$ mit einem gewissen Definitionsbereich $]-h_r, h_r[$. Die n Funktionen $y_0(\cdot)$, $y_1(\cdot)$, $\ldots$, $y_{n-1}(\cdot)$ sind linear unabhängig, denn jedes $y_r(\cdot)$ besitzt eine Eigenschaft die von keiner Linearkombination der übrigen produziert werden kann: Es ist $y_r^{(r)}(0) = 1$, aber $y_k^{(r)}(0) = 0$ für alle $k \neq r$. Setzt man daher $h := \min_r h_r$ und $I :=]-h, h[$, so gilt $\dim \mathcal{L}_I \geq n$.

Es sei jetzt $\tilde{y}$ eine beliebige in einer Umgebung von $t = 0$ definierte Lösung, und es seien $c_k := \tilde{y}^{(k)}(0) \quad (0 \leq k \leq n-1)$ ihre Ableitungswerte bis zur Ordnung $n-1$ an der Stelle 0. Dann ist

$$\tilde{y} = c_0 y_0 + c_1 y_1 + \ \ldots \ + c_{n-1} y_{n-1} \ ; \tag{4}$$

denn beide Seiten dieser Gleichung sind Lösungen desselben Anfangswertproblems

$$Ly = 0 \, , \qquad y^{(k)}(0) = c_k \quad (0 \leq k \leq n-1) \, ,$$

nämlich $\tilde{y}$ nach Definition der c_k und die rechte Seite wegen der besonderen Anfangswerte $y_r^{(k)}(0) = \delta_{kr}$.

Im ganzen hat sich ergeben: Die n Funktionen $y_0, \ldots, y_{n-1}$ bilden eine Basis von $\mathcal{L}_I$. ⌟

Damit bleibt noch zu zeigen, dass jede Lösung $y(\cdot) \in \mathcal{L}_I$ in eindeutiger Weise auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.

Es sei $a > 0$ beliebig. Ist $y \in \mathcal{L}_I$, so ist die "um a nach rechts verschobene Funktion" $y_a(t) := y(t-a)$ eine Lösung auf dem Intervall $I_a :=]\,a-h, a+h\,[$. Dies folgt unmittelbar daraus, dass die Koeffizienten a_i in (1) nicht von t abhängen. Da ausserdem für alle k gilt: $y^{(k)}(0) = y_a^{(k)}(a)$, sind wir sicher, dass sich jedes Anfangswertproblem

$$Ly = 0 \, , \qquad y^{(k)}(a) = c_k \quad (0 \leq k \leq n-1) \tag{5}$$

auf I_a eindeutig lösen lässt.

Es sei jetzt J ein offenes Intervall, das wenigstens die Strecke $[\,0, a\,]$ enthält, und es sei $y \in \mathcal{L}_J$ eine in ganz J definierte Lösung. Wir setzen

$$y^{(k)}(a) =: c_k \qquad (0 \leq k \leq n-1)$$

und bezeichnen mit z die Lösung des Anfangswertproblems (5) für diese c_k. Dann ist die "zusammengesetzte" Funktion

$$\tilde{y}(t) := \begin{cases} y(t) & (t \leq a) \\ z(t) & (a \leq t < a+h) \end{cases}$$

eine Lösung auf einem offenen Intervall J', das mindestens die Strecke $[0, a']$, $a' := a + \dfrac{h}{2}$, enthält. In dieser Weise fortfahrend lässt sich die anfänglich nur auf I definierte Lösung (auch nach links) auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.
Diese Fortsetzung ist eindeutig bestimmt: Es seien y_1 und y_2 zwei verschiedene Fortsetzungen und

$$\tau := \inf\bigl\{t > 0 \bigm| y_1(t) \neq y_2(t)\bigr\} . \tag{6}$$

Dann stimmen y_1 und y_2 in einer Umgebung von $a := \tau - \frac{h}{2}$ überein, sind also Lösungen desselben Anfangswertproblems (5) für gewisse c_k. Dann ist aber $y_1(t) \equiv y_2(t)$ in einer ganzen Umgebung von τ — im Widerspruch zu (6).

Das charakteristische Polynom

Die Darstellung (3) des Differentialoperators L legt nahe, das mit den Koeffizienten von (1) gebildete Polynom

$$q_L(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

der (komplexen) Hilfsvariablen λ einzuführen. Man nennt q_L das zu L bzw. (1) gehörige **charakteristische Polynom**. Aber auch $q_L(D)$ hat einen guten Sinn, und zwar ist $q_L(D) = L$. Damit erhält (1) die weitere Gestalt

$$q_L(D)\, y \;=\; 0 \; . \tag{1''}$$

Die Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}$, die wir im folgenden explizit angeben werden, ist nicht die Kollektion $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ von Satz **(8.1)**, sondern besteht aus n anderen Funktionen Y_k $(1 \leq k \leq n)$, die mit der Zerlegung des charakteristischen Polynoms in Linearfaktoren zusammenhängen. Die Bestimmung der bei einem vorgelegten Anfangswertproblem waltenden Konstanten c_k ist dann allerdings nicht mehr gratis wie bei den $y_k(\cdot)$ von **(8.1)**, siehe (4), sondern erfordert die Auflösung eines linearen Gleichungssystems; siehe den Schluss von Beispiel 8.1.2.
Angelpunkte der ganzen Theorie sind die beiden folgenden Bemerkungen:

(8.2) *Es sei $q(\lambda)$ das Produkt der beiden Polynome $q_1(\lambda)$ und $q_2(\lambda)$. Dann gilt*

$$q(D) = q_1(D) \circ q_2(D) \, ;$$

in Worten: Dem Produkt von zwei Polynomen entspricht bei der formalen Ersetzung $\lambda := D$ das Produkt der zugehörigen Operatoren.

Aus Linearitätsgründen können wir uns darauf beschränken, Monome zu betrachten:

$$q_1(\lambda) := \lambda^r \, , \qquad q_2(\lambda) := \lambda^s \; .$$

Dann ist $q(\lambda) = \lambda^{r+s}$ und somit

$$q(D) = D^{r+s} = D^r \circ D^s = q_1(D) \circ q_2(D)\,,$$

wie behauptet. $\lrcorner$

Zweitens: Für jedes $k \geq 0$ gilt

$$D^k(e^{\lambda t}) \;=\; \lambda^k\, e^{\lambda t}\ ,$$

und hieraus folgt für ein beliebiges Polynom $q(\cdot)$ die Formel

$$q(D)(e^{\lambda t}) \;=\; q(\lambda)\, e^{\lambda t}\ . \tag{8.3}$$

Wir versuchen nun, die Gleichung $(1'')$ mit dem Ansatz

$$y(t) \;:=\; e^{\lambda t}$$

zu befriedigen, wobei wir uns die Wahl von λ noch vorbehalten. Die Forderung $q_L(D)(e^{\lambda t}) \equiv 0$ ist nach **(8.3)** gleichbedeutend mit

$$q_L(\lambda)\, e^{\lambda t} \;\equiv\; 0\,,$$

und dies ist wegen $e^{\lambda t} \neq 0$ genau dann erfüllt, wenn

$$\bigl(\,q_L(\lambda) = \,\bigr) \qquad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \;=\; 0 \tag{7}$$

ist $\bigl($vgl. Beispiel 8.1.2$\bigr)$. Die Gleichung (7) wird als **charakteristische Gleichung** von (1) bezeichnet; ihre n reellen oder komplexen Lösungen λ_1, λ_2, …, λ_n sind die **Eigenwerte**, die Menge

$$\operatorname{spec} L := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$$

ist das **Spektrum** des Operators $L = q_L(D)$.

(I) Sind die Lösungen λ_1, λ_2, …, λ_n der charakteristischen Gleichung (7) paarweise verschieden, so bilden die zugehörigen **Eigenfunktionen**

$$Y_k(t) := e^{\lambda_k t} \qquad (1 \leq k \leq n) \tag{8}$$

eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}$. Lösungen sind sie nach Konstruktion, und linear unabhängig sind sie auch:

(8.4) *Sind die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden, so sind die Funktionen $Y_k\colon t \mapsto e^{\lambda_k t}$ linear unabhängig.*

⌜ Die Behauptung trifft zu für $n := 1$ und sei richtig für $n-1$. Dann sind jedenfalls $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ linear unabhängig. Angenommen, es gilt

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k Y_k\ , \qquad \text{d.h.} \qquad e^{\lambda_n t} \equiv \sum_{k=1}^{n-1} c_k e^{\lambda_k t}\ ,$$

so folgt durch Ableitung:

$$\lambda_n e^{\lambda_n t} \equiv \sum_{k=1}^{n-1} c_k \lambda_k e^{\lambda_k t}\ .$$

Subtrahiert man hiervon das λ_n-fache der vorangehenden Identität, so kommt

$$0 \equiv \sum_{k=1}^{n-1} c_k(\lambda_k - \lambda_n) e^{\lambda_k t}\ , \qquad \text{d.h.} \qquad 0 = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(\lambda_k - \lambda_n) Y_k\ .$$

Dies impliziert wegen $\lambda_k \neq \lambda_n$, dass alle c_k verschwinden, und dann wäre $Y_n = 0$ — ein Widerspruch. ⌟

Aufgrund von **(8.1)** ist somit die allgemeine Lösung von (1) in dem hier betrachteten Fall gegeben durch

$$y(t) := c_1 Y_1(t) + \ \ldots\ + c_n Y_n(t)\ , \qquad c_k \in \mathbb{R} \ \text{ bzw. } \in \mathbb{C} \quad (1 \le k \le n)\ .$$

Komplexe Eigenwerte

(II) Die charakteristische Gleichung (7) kann komplexe Nullstellen λ_k haben, obwohl die Koeffizienten a_i reell sind. Die zugehörigen Funktionen (8) sind dann komplexwertig und werden vom Auftraggeber unter Umständen nicht akzeptiert. Hierzu bemerken wir:

Ist $z(\cdot)$ eine beliebige komplexwertige C^∞-Funktion, so gilt

$$D(\operatorname{Re} z) = \operatorname{Re}(Dz)$$

und folglich für alle $k \ge 0$:

$$D^k(\operatorname{Re} z) = \operatorname{Re}(D^k z)\ .$$

Sind die Koeffizienten a_i von (1) *reell*, so ergibt sich hieraus

$$L(\operatorname{Re} z) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k(\operatorname{Re} z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \operatorname{Re}(D^k z) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k z\right) = \operatorname{Re}(Lz)\,;$$

in Worten: Die Anwendung des Operators L auf eine komplexwertige Funktion $z(\cdot)$ bringt die Real- und Imaginärteile nicht durcheinander. Ist also $z(\cdot)$ eine komplexe Lösung von (1), so müssen der Realteil und der Imaginärteil von $z(\cdot)$ je für sich die Gleichung (1) befriedigen; das heisst: $\operatorname{Re} z(\cdot)$ und $\operatorname{Im} z(\cdot)$ sind zwei reelle Lösungen von (1).

Es sei jetzt (bei reellen Koeffizienten a_i) die Zahl

$$\lambda_0 := \mu_0 + i\nu_0 , \qquad \nu_0 \neq 0 ,$$

ein echt komplexer Eigenwert. Dann ist die Zahl $\bar\lambda_0 = \mu_0 - i\nu_0$ ebenfalls ein Eigenwert (der gleichen Vielfachheit, siehe Abschnitt 9.6), und wir haben die beiden (wesentlich verschiedenen!) komplexwertigen Eigenfunktionen

$$Z_0(t) := e^{\lambda_0 t} , \qquad \bar Z_0(t) := e^{\bar\lambda_0 t} .$$

Nach dem oben Gesagten sind in diesem Fall die Funktionen

$$\begin{aligned} X_0(t) &:= \operatorname{Re} Z_0(t) = e^{\mu_0 t}\cos(\nu_0 t) , \\ Y_0(t) &:= \operatorname{Im} Z_0(t) = e^{\mu_0 t}\sin(\nu_0 t) , \end{aligned}$$

(zwar keine Eigenfunktionen, aber) linear unabhängige reelle Lösungen von (1), die sozusagen im Verein die beiden Eigenwerte λ_0 und $\bar\lambda_0$ gepachtet haben (die analoge Zerlegung von $\bar Z_0(\cdot)$ bringt nichts Neues.)

① Betrachte für ein festes $\omega > 0$ die Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' + \omega^2 y = 0 .$$

Es handelt sich um die **Differentialgleichung der** (ungedämpften) **harmonischen Schwingung**. Ihre charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

besitzt die beiden Lösungen $\lambda_1 := i\omega$, $\lambda_2 := -i\omega$. Die allgemeinste komplexwertige Lösung $z(\cdot)$ der Schwingungsgleichung ist daher

$$z(t) := c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} , \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{C} ,$$

und lässt sich als elliptische Bewegung in der komplexen Ebene auffassen. Man kann nämlich $z(\cdot)$ in der Form

$$z(t) = (c_1 + c_2)\cos(\omega t) + i(c_1 - c_2)\sin(\omega t)$$

schreiben und erkennt die Vektoren $e_1 := c_1 + c_2$ und $e_2 := i(c_1 - c_2)$ als konjugierte Halbmesser (Fig. 8.2.1).

Der Raum der *reellen* Lösungen $y(\cdot)$ der Schwingungsgleichung wird aufgespannt von den beiden Funktionen

$$\begin{aligned} X_0(t) &:= \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) = \cos(\omega t) , \\ Y_0(t) &:= \operatorname{Im}(e^{i\omega t}) = \sin(\omega t) ; \end{aligned}$$

die allgemeinste reelle Lösung ist daher die harmonische Schwingung

$$y(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) , \qquad a,\, b \in \mathbb{R} .$$

○

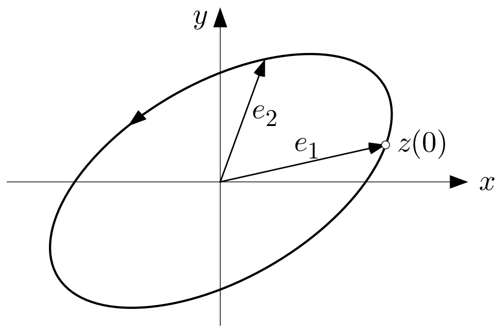

Fig. 8.2.1

Mehrfache Eigenwerte

(III) Die charakteristische Gleichung (7) kann mehrfache Nullstellen haben, so dass es weniger als n verschiedene Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen (8) gibt. Hier müssen wir weiter bohren.

Die einfachste Differentialgleichung (1) mit mehrfachen Eigenwerten lautet offenbar

$$D^m y = 0\,; \tag{9}$$

die zugehörige charakteristische Gleichung besitzt die m-fache Nullstelle 0. Die Lösungen von (9) sind leicht zu erraten: Es sind die Funktionen

$$y(t) := c_0 + c_1 t + \ldots + c_{m-1} t^{m-1}\,, \qquad c_k \in \mathbb{R} \quad (\text{bzw.} \ \in \mathbb{C})\ .$$

⌜ Die angeschriebenen Funktionen bilden einen m-dimensionalen Vektorraum von Lösungen. ⌟

Wir müssen daher auch im allgemeinen Fall damit rechnen, dass Polynome ins Spiel kommen, und entsprechende Vorschläge *in petto* haben. In diesem Sinn liefert der folgende Satz gerade die passende Anzahl linear unabhängiger Lösungen. Wir schreiben dabei $p(t)$ und $e^{\lambda_0 t}$, wenn im Grunde genommen die Funktionen $t \mapsto p(t)$ und $t \mapsto e^{\lambda_0 t}$ gemeint sind.

(8.5) *Ist λ_0 eine m-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so sind die m Funktionen*

$$e^{\lambda_0 t},\ te^{\lambda_0 t},\ \ldots,\ t^{m-1}e^{\lambda_0 t} \tag{10}$$

linear unabhängige Lösungen von (1).

Wir benötigen den folgenden Hilfssatz:

(8.6) *Es sei $p(t)$ ein beliebiges Polynom. Dann gilt für beliebige λ, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$:*

$$(D-\lambda)\bigl(p(t)e^{\lambda_0 t}\bigr) = p_1(t)e^{\lambda_0 t}$$

mit $p_1 = p'$ im Fall $\lambda = \lambda_0$ und $\deg(p_1) = \deg(p)$ *im Fall $\lambda \neq \lambda_0$.*

⌜ Die Behauptungen ergeben sich durch Inspektion der rechten Seite von

$$\begin{aligned}(D-\lambda)\bigl(p(t)e^{\lambda_0 t}\bigr) &= p'(t)e^{\lambda_0 t} + p(t)\lambda_0 e^{\lambda_0 t} - \lambda p(t)e^{\lambda_0 t} \\ &= \bigl(p'(t) + (\lambda_0-\lambda)p(t)\bigr)\, e^{\lambda_0 t} \ .\end{aligned}$$ ⌟

Damit kommen wir zum Beweis von Satz **(8.5)**:

⌜ Nach Voraussetzung gilt

$$q_L(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^m q_1(\lambda)$$

für ein gewisses Polynom q_1. Ist

$$y(t) := p(t)e^{\lambda_0 t}\ , \qquad \deg(p) \le m-1\ ,$$

eine beliebige Linearkombination der Funktionen (10), so ergibt sich mit Hilfe von **(8.2)** und **(8.6)**:

$$q_L(D)y = q_1(D)(D-\lambda_0)^m\bigl(p(t)e^{\lambda_0 t}\bigr) = q_1(D)\bigl(p^{(m)}(t)e^{\lambda_0 t}\bigr) = 0\ ,$$

denn $p^{(m)}(t) \equiv 0$. Somit ist $y(\cdot)$ eine Lösung von (1). ⌟

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Lösungen der charakteristischen Gleichung (7) und $m_1, \ldots, m_r$ ihre Vielfachheiten, so ist $m_1 + \ldots + m_r = n$. Aufgrund von Satz **(8.5)** erhalten wir daher insgesamt n Lösungen

$$t^k e^{\lambda_j t} \qquad (0 \le k \le m_j - 1,\ 1 \le j \le r)\ , \tag{11}$$

die zusammen eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}$ von (1) bilden. (Wir verzichten auf die Verifikation, dass die Funktionen (11) linear unabhängig sind.)

② Es sollen die reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$$

bestimmt werden. — Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$$

besitzt ersichtlich die Nullstelle $\lambda_1 := 1$, und das reduzierte Polynom

$$(\lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5) : (\lambda - 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5$$

besitzt immer noch die Nullstelle 1 ($=: \lambda_2$). Nochmalige Division mit $(\lambda - 1)$ liefert schliesslich die quadratische Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ und damit die beiden komplexen Eigenwerte

$$\lambda_3 := -1 + 2i\ , \qquad \lambda_4 := -1 - 2i\ .$$

Aufgrund von (II) und (III) erhalten wir daher die vier reellen Basislösungen

$$\begin{aligned} Y_1(t) &:= e^t\ , & Y_2(t) &:= t\,e^t\ , \\ Y_3(t) &:= e^{-t}\cos(2t)\ , & Y_4(t) &:= e^{-t}\sin(2t)\ ,\end{aligned}$$

von denen die zwei ersten mit $t \to \infty$ exponentiell zunehmen, während die beiden andern gedämpfte Schwingungen darstellen. Die allgemeine reelle Lösung lässt sich folgendermassen schreiben:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + \bigl(c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t)\bigr)e^{-t} , \qquad c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{R} .$$

○

Inhomogene Differentialgleichungen

Soviel zum homogenen Fall. Wir betrachten nun die **inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ \ldots\ + a_1 y' + a_0 y \ = \ K(t) , \tag{12}$$

bzw. in kondensierter Form:

$$L\,y \ = \ K(t) . \tag{12'}$$

Dabei bezeichnet L wiederum den Differentialoperator (3), und $K(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\to \mathbb{C}$) ist eine *gegebene* Funktion von t. Diese Differentialgleichung modelliert zum Beispiel ein schwingendes elektrisches oder mechanisches System, das durch die Systemparameter a_i $(0 \leq a_i \leq n-1)$ charakterisiert ist und zusätzlich einer willkürlich von der Zeit abhängenden **Anregung** $K(\cdot)$ unterliegt, siehe Beispiel 8.1.2. Die Differentialgleichung (12) ist dermassen wichtig und verbreitet, dass im Lauf der Zeit verschiedene Lösungsverfahren ersonnen worden sind, unter anderen die folgenden:

(a) spezieller Lösungsansatz für spezielle Anregungen $K(\cdot)$,

(b) Methode der Variation der Konstanten,

(c) Laplace-Transformation.

Bevor wir uns der “primitivsten” und nicht für beliebige $K(\cdot)$ anwendbaren Methode (a) annehmen, beweisen wir:

(8.7) *Ist* $\bigl(Y_1(\cdot), \ldots, Y_n(\cdot)\bigr)$ *eine Basis des Lösungsraums der h o m o g e n e n Differentialgleichung* $Ly = 0$ *und ist* $y_*(\cdot)$ *eine irgendwie gefundene Lösung der i n h o m o g e n e n Differentialgleichung* $Ly = K(t)$, *so ist die allgemeine Lösung* $y(\cdot)$ *der i n h o m o g e n e n Differentialgleichung gegeben durch*

$$y(t) \ := \ c_1 Y_1(t) + \ \ldots\ + c_n Y_n(t) \ + y_*(t) .$$

⌜ Aus

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k Y_k + y_*$$

folgt wegen $LY_k = 0$:

$$Ly = L\left(\sum_{k=1}^{n} c_k Y_k\right) + Ly_* = \sum_{k=1}^{n} c_k\, LY_k + K(\cdot) = K(\cdot)\ .$$

Umgekehrt: Ist $\tilde{y}$ eine beliebige Lösung von (12′), so ist

$$L(\tilde{y} - y_*) = L\tilde{y} - Ly_* = K(\cdot) - K(\cdot) = 0\ ,$$

das heisst: $\tilde{y} - y_*$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Hieraus folgt mit **(8.1)**(c):

$$\tilde{y} = (\tilde{y} - y_*) + y_* = \sum_{k=1}^{n} c_k Y_k + y_*$$

für geeignete Konstanten c_k. ┘

Da wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $Ly = 0$ explizit angeben können, haben wir nach diesem Satz das inhomogene Problem (12) vollständig gelöst, wenn wir (ausser den Lösungen $Y_1, \ldots, Y_n$ des homogenen Problems) eine einzige sogenannte **partikuläre Lösung** y_* von (12) gefunden haben. Hierzu dienen die oben genannten Methoden (a)–(c).

Konstruktion einer partikulären Lösung

Die Methode (a) ist anwendbar, falls die Anregung $K(\cdot)$ selber Lösung einer geeigneten *homogenen* linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sein kann. $K(\cdot)$ muss also von der Form

$$K(t) \ :=\ t^r\, e^{\lambda t}\ , \qquad r \in \mathbb{N}\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\ ,$$

oder eine Linearkombination von Funktionen dieser Art sein.

Bsp : $\quad 1, \quad b_0 + b_1 t + \ldots + b_r t^r, \quad \cos(\omega t), \quad e^{-\delta t}\sin(\omega t), \quad t^r e^{-t}\ .$

In diesem Fall hilft ein geeigneter Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten. Es gilt nämlich der folgende Satz:

(8.8) *Liegt eine inhomogene Differentialgleichung* (12) *vor mit*

$$K(t) = p_0(t)e^{\lambda_0 t}\ ,$$

p_0 ein Polynom, und ist λ_0 ein m-facher Eigenwert von L, $m \geq 0$, so gibt es genau eine Lösung y_* von (12) *der Form*

$$y_*(t) = p_1(t)t^m e^{\lambda_0 t}\ , \qquad \deg(p_1) \leq \deg(p_0)\ .$$

⌜ Es sei $\deg(p_0) =: r \geq 0$. Betrachte die beiden Vektorräume

$$\begin{aligned} V &:= \left\langle t^m e^{\lambda_0 t}, t^{m+1} e^{\lambda_0 t}, \ldots, t^{m+r} e^{\lambda_0 t} \right\rangle \,, \\ W &:= \left\langle e^{\lambda_0 t}, t e^{\lambda_0 t}, \ldots, t^r e^{\lambda_0 t} \right\rangle \end{aligned}$$

(gemeint sind die von den angegebenen Funktionen erzeugten Räume). Nach Voraussetzung ist $K(\cdot) \in W$, und die Behauptung lautet: Es gibt genau ein $y_* \in V$ mit $Ly_* = K$. Da V und W dieselbe Dimension $r+1$ haben, genügt es, folgendes zu zeigen: Die Einschränkung $L\restriction V$ bildet V *injektiv* und damit automatisch *surjektiv* auf W ab.

Nach Annahme über λ_0 lässt sich L in der folgenden Art schreiben:

$$L = q_L(D) = \prod_{j=1}^{n-m} (D - \lambda_j) \,\cdot\, (D - \lambda_0)^m \,;$$

dabei ist $\lambda_j \neq \lambda_0 \quad (1 \leq j \leq n-m)$. Es sei nun

$$y(t) := p(t) e^{\lambda_0 t} \,, \qquad \deg(p) = m + k, \quad 0 \leq k \leq r \,,$$

eine beliebige von 0 verschiedene Funktion in V. Dann ergibt sich mit Hilfe von **(8.2)** und **(8.6)**:

$$\begin{aligned} Ly &= \prod_{j=1}^{n-m} (D - \lambda_j) \,\cdot\, (D - \lambda_0)^m \left(p(t) e^{\lambda_0 t} \right) \\ &= \prod_{j=1}^{n-m} (D - \lambda_j) \left(p^{(m)}(t) e^{\lambda_0 t} \right) =: \tilde{p}(t) e^{\lambda_0 t} \,, \end{aligned}$$

und zwar ist $\deg(\tilde{p}) = \deg(p) - m = k \in [\,0\,..\,r\,]$. Dies besagt $Ly \in W$, $Ly \neq 0$; insbesondere ist damit $L\restriction V$ als injektiv erwiesen. ⌟

Satz **(8.8)** handelt vom schlimmstmöglichen Fall. Im allgemeinen sind wenigstens zwei der drei Zahlen r, m, λ_0 gleich 0, und alles wird viel einfacher. Ist $m > 0$, das heisst: $\lambda_0 \in \operatorname{spec} L$, so sind wir im **Resonanzfall**: Die Anregung $K(\cdot)$ schwingt mit gleicher Frequenz wie eine Eigenschwingung des ungestörten Systems. Dies führt bekanntlich zu besonderen Effekten.

Ist die Anregung $K(\cdot)$ eine Superposition von Termen $K_j(t) := p_j(t) e^{\lambda_j t}$ mit verschiedenen λ_j, so ist für jeden derartigen Term ein y_{*j} gemäss **(8.8)** anzusetzen, und die zu $K := \sum_j K_j$ gehörige partikuläre Lösung ist dann gegeben durch $y_* = \sum_j y_{*j}$.

⌜ Sind die Funktionen y_j beliebige Lösungen der jeweiligen Differentialgleichung $Ly = K_j$, so ist $y := \sum_j y_j$ eine Lösung der Differentialgleichung $Ly = \sum_j K_j$. ⌟

Ist $K(\cdot)$ zum Beispiel ein "trigonometrisches Monom": $K(t) = \cos(\omega t)$, so sind damit die beiden Frequenzen $i\omega$ und $-i\omega$ angeregt, und die zugehörige partikuläre Lösung wird im allgemeinen $e^{i\omega t}$- und $e^{-i\omega t}$-Terme enthalten. Ist alles reell (und $\pm i\omega$ kein Eigenwert von L), so wird man daher von vorneherein

$$y_*(t) := A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

ansetzen. — Weitere Beispiele findet man in der folgenden Tabelle.

$K(t)$	Spektralbedingung	Ansatz für $y_p(t)$
t^r	$0 \notin \operatorname{spec} L$	$A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r$
	$0 \in \operatorname{spec} L$, m-fach	$A_0 t^m + A_1 t^{m+1} + \ldots + A_r t^{m+r}$
$b_0 + b_1 t + \ldots + b_r t^r$, $b_i \in \mathbb{R}$	$0 \notin \operatorname{spec} L$	$A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r$
$e^{\lambda_0 t}, \quad \lambda_0 \in \mathbb{C}$	$\lambda_0 \notin \operatorname{spec} L$	$Ae^{\lambda_0 t}$
	$\lambda_0 \in \operatorname{spec} L$, m-fach	$At^m e^{\lambda_0 t}$
$\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$	$\pm i\omega \notin \operatorname{spec} L$	$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
	$\pm i\omega \in \operatorname{spec} L$, einfach	$t\big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big)$
$t^2 e^{-t}$	$-1 \notin \operatorname{spec} L$	$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)e^{-t}$

Beispiele

③ Die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega t) \tag{13}$$

beschreibt den resonant angeregten ungedämpften harmonischen Oszillator. In Beispiel ① haben wir die allgemeine reelle Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y'' + \omega^2 y = 0$ bestimmt; es ergab sich

$$y(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\ , \qquad a,\ b \in \mathbb{R}\ .$$

Für eine partikuläre Lösung von (13) machen wir den Ansatz

$$y_*(t)\ :=\ t\,\big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big)\ ,$$

wobei nun die Koeffizienten A und B so festzulegen sind, dass die in (13) eingebrachte Funktion y_* diese Gleichung identisch in t erfüllt. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} y_*'(t) &= (A + B\omega t)\cos(\omega t) + (B - A\omega t)\sin(\omega t)\ , \\ y_*''(t) &= (2B\omega - A\omega^2 t)\cos(\omega t) + (-2A\omega - B\omega^2 t)\sin(\omega t)\ . \end{aligned}$$

Führen wir jetzt in

$$y_*''(t) + \omega^2\, y_*(t) = 2B\omega\cos(\omega t) - 2A\omega\sin(\omega t) \overset{!}{\equiv} \cos(\omega t)$$

den Koeffizientenvergleich durch, so folgt

$$A = 0\,, \qquad B = \frac{1}{2\omega}\ .$$

Aufgrund von Satz **(8.7)** lautet demnach die allgemeine Lösung von (13):

$$y(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) + \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)\ .$$

Wir beobachten eine Schwingung der Kreisfrequenz ω, deren Amplitude (unter beliebigen Anfangsbedingungen) im wesentlichen linear mit der Zeit zunimmt (Fig. 8.2.2). ◯

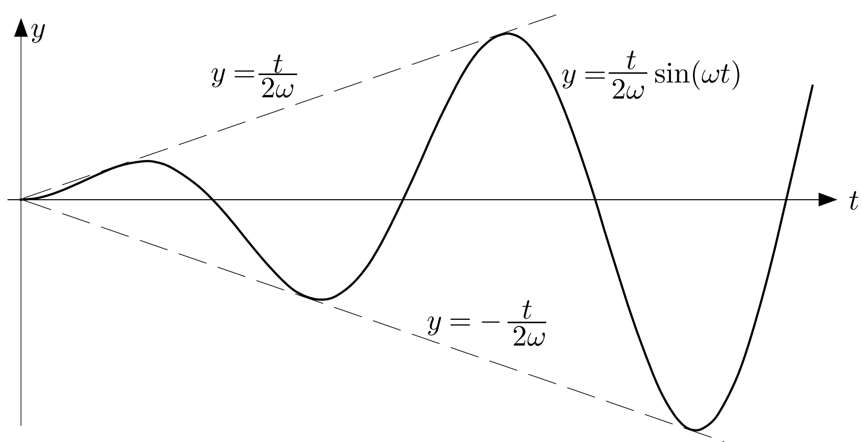

Fig. 8.2.2

④ (Forts. von Beispiel 8.1.②) Wir kehren zu dem in Fig. 8.1.1 dargestellten mechanischen System zurück; allerdings soll es jetzt nur noch schwach gedämpft sein. Es sei also $b^2 - 4fm < 0$; dann werden die beiden Eigenwerte

$$\lambda_{.} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{-\left(\frac{f}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)}$$

komplex. Setzen wir zur Abkürzung

$$\delta := \frac{b}{2m}, \qquad \omega_0 := \sqrt{\frac{f}{m}}, \qquad \omega_* := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \tag{14}$$

so kommt

$$\lambda_1 = -\delta + i\omega_* , \qquad \lambda_2 = -\delta - i\omega_* .$$

Die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung 8.1.(1) hat dann die Form

$$y(t) = e^{-\delta t}\big(A\cos(\omega_* t) + B\sin(\omega_* t)\big) \tag{15}$$

und stellt (unter beliebigen Anfangsbedingungen) eine gedämpfte Schwingung dar. Man nennt δ die **Dämpfungskonstante** und ω_* die **Eigen-Kreisfrequenz** des Systems. Aus (14) geht hervor, dass ω_* im Fall $\delta = 0$ (keine Dämpfung) den Wert $\omega_0 = \sqrt{f/m}$ besitzt und mit zunehmender Dämpfung abnimmt.

Wir wollen weiter untersuchen, wie das System auf eine harmonisch oszillierende Anregung $K(\cdot)$ der (beliebig einstellbaren) Kreisfrequenz $\omega > 0$ reagiert. Hierzu betrachten wir die spezielle inhomogene Differentialgleichung

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = K_0\, e^{i\omega t}, \qquad K_0 > 0, \tag{16}$$

wobei wir $K(\cdot)$ komplex angesetzt haben, um die Phasenlage der entstehenden Schwingungen leichter beurteilen zu können. Im weiteren sei $\delta > 0$, so dass $i\omega$ bestimmt kein Eigenwert der homogenen Gleichung ist. Nach **(8.8)** dürfen wir daher eine partikuläre Lösung $y_s(\cdot)$ von (16) in der Form

$$y_s(t) := c\, e^{i\omega t}$$

ansetzen, das heisst: als harmonische Schwingung mit einer (noch zu bestimmenden) **komplexen Amplitude** c. Tragen wir $y_s(\cdot)$ und seine Ableitungen

$$\dot{y}_s(t) = i\omega c\, e^{i\omega t}, \qquad \ddot{y}_s(t) = -\omega^2 c\, e^{i\omega t}$$

in (16) ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich für c die Bedingung

$$-m\omega^2 c + bi\omega\, c + fc = K_0 .$$

Damit ist c bestimmt zu

$$c = \frac{K_0}{(f - m\omega^2) + ib\,\omega} = \frac{K_0}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} .$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung von (16), indem wir $y_s(\cdot)$ zur allgemeinen Lösung (15) der homogenen Gleichung addieren. Da alle Funktionen (15) mit

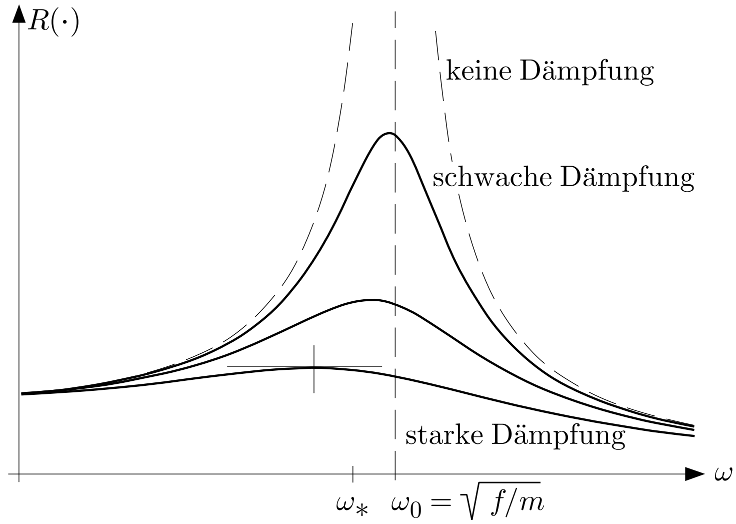

Fig. 8.2.3

$t \to \infty$ exponentiell abklingen, bleibt nach Beendigung dieses Einschwingvorgangs nur noch der (von den Anfangsbedingungen unabhängige) Summand $y_s(\cdot)$ übrig. Man nennt daher $y_s(\cdot)$ die **stationäre Lösung** von (16).

Die stationäre Lösung schwingt mit derselben (von den Systemparametern ω_0 und δ unabhängigen) Frequenz wie die Anregung $K(\cdot)$. Wir untersuchen nun ihre komplexe Amplitude c etwas genauer. Der Betrag

$$|c| \;=\; \frac{K_0}{m}\,\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}} \;=:\; R(\omega)$$

stellt die Amplitude der effektiv beobachteten Schwingung $\operatorname{Re} y_s(\cdot)$ dar und hängt in charakteristischer Weise von der Störfrequenz ω ab (Fig. 8.2.3). Man nennt $R(\cdot)$ die **Resonanzfunktion** des betrachteten Systems. $R(\omega)$ ist maximal für diejenige Anregungsfrequenz ω, die den Radikanden

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2 = \Bigl(\omega^2-(\omega_0^2-2\delta^2)\Bigr)^2+4\delta^2(\omega_0^2-\delta^2)$$

zu einem Minimum macht, und das ist ersichtlich der Fall, wenn die grosse Klammer verschwindet, das heisst für

$$\omega \;=\; \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

(und nicht für $\omega := \omega_*$, wie man vielleicht erwarten würde).

Um die Phase von $y_s(\cdot)$ bezüglich $K(\cdot)$ zu bestimmen, schreiben wir c in der Form

$$c \;=\; \frac{K_0}{m}\,\frac{\omega_0^2-\omega^2-2i\delta\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}\ .$$

Mit $\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega \ =: \ c'$ folgt

$$\arg c = \arg c' = \arg(\omega_0^2 - \omega^2, -2\delta\omega)$$

(Fig. 8.2.4). Hiernach ist $-\pi < \arg c < 0$, in Worten: Der Systemzustand $y_s(\cdot)$ eilt der Anregung $K(\cdot)$ nach. Ist $\omega = \omega_0$, so ist $\arg c = -\pi/2$, und für $\omega \to \infty$ strebt $\arg c$ gegen $-\pi$. ◯

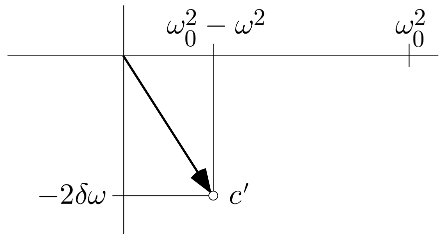

Fig. 8.2.4

Aufgaben

1. Bestimme eine möglichst einfache lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten reellen Koeffizienten, welche die Funktion

$$f(x) := x\, e^{-2x} \, \cos x$$

als eine Lösung hat.

2. Für diejenigen der folgenden Funktionen, die Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sein können, gebe man je eine derartige Differentialgleichung an.

(a) $\phi_1(t) := \cosh t$, (b) $\phi_2(t) := t^{3/2} \quad (t > 0)$,

(c) $\phi_3(t) := \sin(t+1)$, (d) $\phi_4(t) := t + \cos t$,

(e) $\phi_5(t) := t^{1/\log t} \quad (t > 0)$.

3. Bestimme die allgemeine reelle Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen:

(a) $\ddot{y} - 4y = te^{-t}$,

(b) $\dddot{y} + \omega^2 \dot{y} = t^2\big(1 + \cos(\omega t)\big)$.

4. Für welche Werte des *komplexen* Parameters α besitzt die Differentialgleichung

$$\dddot{y} + \alpha y = 0$$

nichttriviale 2π-periodische Lösungen?

5. Bestimme drei linear unabhängige reellwertige Funktionen $y_0(\cdot)$, $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$, die auf folgende Weise untereinander verknüpft sind:

$$y_0' = y_1\,, \qquad y_1' = y_2\,, \qquad y_2' = y_0\ .$$

6. Betrachte den Oszillator

$$\ddot{y} + (2 + \cos\alpha + \sin\alpha)\,\dot{y} + 3y = 0$$

für verschiedene Werte des reellen Parameters α.
   (a) Zeige: Sämtliche Lösungen sind gedämpfte harmonische Schwingungen, und das für jeden Wert von α.
   (b) Lege α so fest, dass diese Schwingungen für $t \to \infty$ möglichst rasch abklingen.

7. Gesucht sind die sämtlichen für $t \to \infty$ exponentiell gedämpften Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{\ddot{y}} + i\,y = 0$. $(i^2 = -1)$

8. Ein ungedämpfter harmonischer Oszillator befindet sich zunächst in Ruhestellung. In einem gewissen Moment wird eine auslenkende Kraft eingeschaltet, die mit der Zeit exponentiell nachlässt. Es geht also um das Anfangswertproblem

$$\ddot{y} + \omega^2 y = e^{-\delta t}\,, \qquad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0\,.$$

Langfristig, das heisst: nach dem Einschwingvorgang, verbleibt eine stationäre harmonische Schwingung. Berechne deren (reelle) Amplitude.

8.3 Eulersche Differentialgleichungen

Streckungsinvarianz

Wie wir beim Beweis von Satz **(8.1)** bemerkt haben, liegt den homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten eine gewisse Translationsinvarianz der betrachteten Phänomene zugrunde: Ist $y(\cdot)$ eine Lösung einer derartigen Gleichung, so auch die "um a verschobene" Funktion $y_a(\cdot)$. In ähnlicher Weise stellt man bei gewissen geometrischen Situationen statt der Translationsinvarianz eine "Streckungsinvarianz" fest, die ebenfalls zu linearen Differentialgleichungen von einem bestimmten Typ führt. Wir bezeichnen hierzu die unabhängige Variable mit r und lassen für r von vorneherein nur positive Werte zu, so dass Potenzen r^α mit beliebigen reellen Exponenten α definiert sind.
Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y^{(n)} + \frac{b_{n-1}}{r} y^{(n-1)} + \ \ldots \ + \frac{b_1}{r^{n-1}} y' + \frac{b_0}{r^n} y \ = \ 0 \tag{1}$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten b_k wird **(homogene) Eulersche Differentialgleichung** genannt. Die Sätze **(8.1)** $\big($ohne Teil (a)$\big)$ und **(8.6)** gelten für beliebige lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung, also auch hier. Überdies hat man, wie oben angedeutet:

(8.9) *Ist $y(\cdot)$ eine Lösung von* (1)*, so ist auch die gegenüber $y(\cdot)$ "um den Faktor $\lambda > 0$ gestreckte Funktion"*

$$r \ \mapsto \ y_\lambda(r) := y\Big(\frac{r}{\lambda}\Big)$$

eine Lösung von (1).

⌜ Die Kettenregel liefert $y_\lambda^{(k)}(r) = y^{(k)}(r/\lambda)\, \lambda^{-k}$; folglich ist

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{r^{n-k}}\, y_\lambda^{(k)}(r) = \lambda^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(r/\lambda)^{n-k}}\, y^{(k)}(r/\lambda) = 0 \ .$$ ⌟

Man kann (1) mit Hilfe der Substitution $r := e^t$ und längeren Rechnungen in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführen. Rascher kommt man mit dem richtigen Ansatz zum Ziel; er lautet:

$$y(r) \ := \ r^\alpha \ , \tag{2}$$

wobei der Exponent α noch geeignet zu bestimmen ist. Aus (2) folgt

$$y'(r) = \alpha\, r^{\alpha-1}\ , \qquad y''(r) = \alpha(\alpha-1)\, r^{\alpha-2}\ , \qquad \ldots\ ,$$

und mit der Abkürzung

$$\alpha^{(k)} := \begin{cases} 1 & (k=0)\,, \\ \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot\big(\alpha-(k-1)\big) & (k\ge 1) \end{cases}$$

$\big(\alpha^{(k)}$ ist ein Polynom in der Hilfsvariablen $\alpha\,!\big)$ erhalten wir allgemein

$$y^{(k)}(r) \;=\; \alpha^{(k)}\, r^{\alpha-k} \qquad (k\ge 0)\;.$$

Setzen wir das in (1) ein, so ergibt sich für die linke Seite der Ausdruck

$$\begin{aligned} &\alpha^{(n)} r^{\alpha-n} + \frac{b_{n-1}}{r}\alpha^{(n-1)} r^{\alpha-(n-1)} + \ldots + \frac{b_1}{r^{n-1}}\alpha r^{\alpha-1} + \frac{b_0}{r^n} r^{\alpha} \\ &\quad = \Big(\alpha^{(n)} + b_{n-1}\alpha^{(n-1)} + \ldots + b_1\alpha + b_0\Big)\; r^{\alpha-n} \\ &\quad =:\; q_{\rm ind}(\alpha)\, r^{\alpha-n}\;. \end{aligned}$$

Das Indexpolynom

Dabei bezeichnet

$$q_{\rm ind}(\alpha) \;:=\; \alpha^{(n)} + b_{n-1}\alpha^{(n-1)} + \ldots + b_1\alpha + b_0$$

das sogenannte **Indexpolynom** der Gleichung (1); $q_{\rm ind}(\cdot)$ besitzt den genauen Grad n. Die angesetzte Funktion (2) ist genau dann eine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung (1), wenn der Ausdruck $q_{\rm ind}(\alpha)\, r^{\alpha-n}$ identisch in r verschwindet, und das ist genau dann der Fall, wenn

$$q_{\rm ind}(\alpha) \;=\; 0 \tag{3}$$

ist. Hieraus folgt: Gibt es n verschiedene Lösungen $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ der **Indexgleichung** (3), so bilden die n (linear unabhängigen) Funktionen

$$Y_k(r) \;:=\; r^{\alpha_k} \qquad (1\le k\le n)$$

eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}$ von (1). Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$y(r) \;:=\; c_1 r^{\alpha_1} + c_2 r^{\alpha_2} + \ldots + c_n r^{\alpha_n}\;,$$

und wir stellen fest, dass alle Lösungen auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$ definiert sind.

① Zu der Eulerschen Differentialgleichung

$$y''' + \frac{3}{r}y'' - \frac{3}{r^2}y' \;=\; 0$$

gehört das Indexpolynom

$$q_{\rm ind}(\alpha) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1) - 3\alpha = \alpha^3 - 4\alpha = \alpha(\alpha+2)(\alpha-2)$$

mit den Nullstellen $\alpha_1 := 0$, $\alpha_2 := 2$, $\alpha_3 := -2$. Die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung lautet daher:

$$y(r) \;:=\; c_1 + c_2 r^2 + c_3\frac{1}{r^2}\;.$$

○

Wir untersuchen nicht, was bei komplexen Nullstellen des Indexpolynoms zu tun ist, gehen aber noch kurz auf den Fall mehrfacher Nullstellen ein. Die genauere Analyse liefert folgendes: Ist α_0 zum Beispiel eine zweifache Nullstelle des Indexpolynoms, so sind

$$Y_1(r) \;:=\; r^{\alpha_0}\,, \qquad Y_2(r) \;:=\; r^{\alpha_0}\,\log r$$

zwei zugehörige linear unabhängige Lösungen von (1). Dies war auf Grund der Verwandtschaft von (1) mit 8.2.(1) zu erwarten.

② Untersucht man stationäre Temperaturverteilungen auf Kreisscheiben oder auf Kreisringen, so wird man auf folgende Differentialgleichung geführt:

$$y'' + \frac{1}{r}y' - \frac{k^2}{r^2}y \;=\; 0\;; \tag{4}$$

dabei ist der Parameter k eine beliebige natürliche Zahl. Das Indexpolynom

$$q_{\text{ind}}(\alpha) = \alpha(\alpha-1) + \alpha - k^2 = \alpha^2 - k^2$$

besitzt für $k > 0$ die zwei verschiedenen Nullstellen $\alpha_1 := k$, $\alpha_2 := -k$, und die allgemeine Lösung von (4) lautet in diesem Fall:

$$y(r) \;=\; c_1 r^k + c_2\frac{1}{r^k}\;.$$

Ist jedoch $k = 0$, so besitzt das Indexpolynom die doppelte Nullstelle $\alpha_0 := 0$, so dass nun die allgemeine Lösung von (4) die Form

$$y(r) \;=\; c_1 + c_2 \log r$$

annimmt. ○

Aufgaben

1. Versuche einen naheliegenden Ansatz zur Lösung der folgenden inhomogenen Eulerschen Differentialgleichung:

$$y'' - \frac{4}{r}y' + \frac{6}{r^2}y = r^5\;.$$