9

Integralrechnung

9.1 Begriff des Riemannschen Integrals

Die "Integralrechnung" besteht eigentlich aus zwei Teilen: einem begrifflichen Teil und einem Kalkül.
Im *ersten Teil* geht es darum, gewisse analytische, geometrische oder physikalische Grössen W als "Integral" einer Funktion $f : \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{X}'$ über einen Bereich $B \subset \mathrm{dom}\,(f)$ aufzufassen:

$$W = \int_B f\, d\mu = \int_B f(x)\, d\mu(x) \ . \tag{1}$$

Die Funktion f ist als eine räumlich oder zeitlich ('t' anstelle von 'x') veränderliche "Intensität" zu interpretieren, und das Integral W ist die von f auf B erzielte "Gesamtwirkung". Wir geben einige Beispiele für derartige Grössen W:

— die Fläche zwischen der t-Achse und einer Kurve $y = f(t) \quad (a \le t \le b)$,

— die Länge einer Kurve $\gamma : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (a \le t \le b)$ in der Ebene oder im Raum $\bigl($"Längenintensität" ist die Absolutgeschwindigkeit $v(t) := |\dot{\mathbf{x}}(t)|\bigr)$,

— das "Mass" (Volumen) $\mu(B)$ eines m-dimensionalen Bereiches $B \subset \mathbb{R}^m$ ("Volumenintensität" ist die Funktion $\equiv 1$).

— die Gesamtmasse eines Körpers $B \subset \mathbb{R}^3$ von variabler Dichte ρ, analog: die auf B sitzende Gesamtladung einer kontinuierlichen Ladungsverteilung,

— das Trägheitsmoment eines Körpers $B \subset \mathbb{R}^3$ bezüglich einer körperfesten Achse a,

— die Arbeit eines Vektorfeldes längs einer Kurve,

— der Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche.

Im *zweiten Teil* geht es darum, derartige Integrale in endlich vielen Schritten zu berechnen, wenn die Funktion f als Ausdruck und der Bereich B etwa durch Ungleichungen gegeben sind. Dies ist die "Technik des Integrierens". Oft hilft sie allerdings nichts, und man ist auf numerische Methoden angewiesen.

Grundeigenschaften des Integrals

Vom Ansatz her sollte das Integral (1) die folgenden Eigenschaften besitzen:

(a) *Linearität* bezüglich f:

$$\int_B (f_1 + f_2)\,d\mu = \int_B f_1\,d\mu + \int_B f_2\,d\mu\,, \qquad \int_B (\alpha\, f)\,d\mu = \alpha \int_B f\,d\mu\,,$$

(b) *Additivität* bezüglich B:

$$\mu(B_1 \cap B_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{B_1 \cup B_2} f\,d\mu = \int_{B_1} f\,d\mu + \int_{B_2} f\,d\mu\,,$$

(c) *Positivität*:

$$f(x) \geq 0 \;\forall x \quad \Longrightarrow \int_B f(x)\,d\mu(x) \geq 0\,,$$

(d) *Normierung*:

$$\int_B 1\,d\mu = \mu(B)\ .$$

In diesen Formeln erscheint wiederholt das "Mass" $\mu(B)$ von Mengen $B \subset \mathbb{R}^m$. Schon dieser Begriff ist nicht unproblematisch: Betrachte etwa die Menge der rationalen Zahlen im Intervall $[\,0,1\,] \subset \mathbb{R}$. Wir werden es aber so einrichten, dass die Volumenmessung durch die Integrationstheorie gerade mitgeliefert wird.

Wir wollen Volumina für den Moment akzeptieren und können dann weiter folgendermassen argumentieren: Ist f eine anständige Funktion, so ist f innerhalb von sehr kleinen Teilbereichen $B_k \subset B$ praktisch konstant, und das Integral von f über einen derartigen Teilbereich hat dann wegen (a) und (d) ungefähr den Wert $f(\xi_k)\mu(B_k)$, wobei ξ_k einen in B_k beliebig gewählten "Messpunkt" bezeichnet. Zerlegen wir daher den gegebenen Integrationsbereich B in N derartige Teilbereiche B_k, die sich nur berühren, aber nicht überlappen dürfen, so ergibt sich auf Grund der Additivität (b):

$$\int_B f\,d\mu = \sum_{k=1}^{N} \int_{B_k} f\,d\mu \doteq \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\mu(B_k)\ .$$

Je feiner die Zerlegung $B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, desto besser approximiert die **Riemannsche Summe** rechter Hand das angepeilte Integral. So wird man dazu geführt, das Integral als Grenzwert von Riemannschen Summen zu definieren:

$$\text{“}\quad \int_B f(x)\,d\mu(x) := \lim_{\cdots} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\mu(B_k) \quad\text{”}\ .$$

Nach diesen heuristischen Betrachtungen können wir im Ernst beginnen. Vorweg ein handliches Messinstrument: Ist $M \subset \mathbb{X}$ eine beliebige nichtleere Menge, so heisst

$$\operatorname{diam}(M) := \sup\bigl\{|y - y'| \bigm| y,\, y' \in M\bigr\}$$

(Fig. 9.1.1) der **Durchmesser** von M. Der Durchmesser eines Kreises ist sein Durchmesser. Für eine beschränkte Menge M von reellen Zahlen gilt

$$\operatorname{diam}(M) = \sup M \,-\, \inf M\ ,$$

wie man sich leicht überlegt.

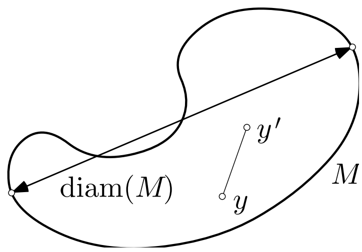

Fig. 9.1.1

Es sei $f : \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{X}'$ eine beliebige Funktion und B eine beliebige Teilmenge von $\operatorname{dom}(f)$. Der Durchmesser der Bildmenge $f(B)$ heisst **Schwankung von** f **auf** B. Die Schwankung

$$|\Delta f|_B := \operatorname{diam}\bigl(f(B)\bigr) = \sup\bigl\{|f(x) - f(x')| \bigm| x,\, x' \in B\bigr\}$$

gibt an, wie weit zwei in B angenommene Funktionswerte schlimmstenfalls auseinanderliegen können.

Teilungen und Riemannsche Summen

Von nun an betrachten wir nur noch $\mathbb{X}$-wertige Funktionen *einer* reellen Variablen t. Die vorgesehenen Integrationsbereiche sind Intervalle (eindimensionale Quader) $Q = [\,a,b\,]$, $a < b$. Intervalle haben einen unproblematischen Inhalt:

$$\mu\bigl([\,a,b\,]\bigr) := b - a\,;$$

ferner gilt

$$a < b < c \qquad \Longrightarrow \qquad \mu\bigl([\,a,c\,]\bigr) = \mu\bigl([\,a,b\,]\bigr) + \mu\bigl([\,b,c\,]\bigr)\ .$$

Eine **Teilung** des Intervalls $[\,a,b\,]$ ist eine endliche Teilmenge

$$T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\} \subset [\,a,b\,]\,, \qquad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$$

(Fig. 9.1.2). Die $N + 1 \geq 2$ **Teilungspunkte** t_k bestimmen N **Teilintervalle**

$$Q_k := [\,t_{k-1}, t_k\,] \qquad (1 \leq k \leq N)\ .$$

Ein zu T gehöriger **Satz von Messpunkten** ist ein N-Tupel $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$ mit

$$\tau_k \in Q_k \qquad (1 \leq k \leq N)\ .$$

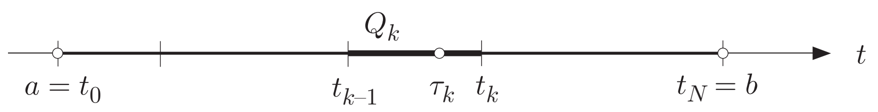

Fig. 9.1.2

Es sei nun $f\colon [\,a,b\,] \to \mathbb{X}$ eine beschränkte Funktion:

$$\exists M \geq 0\ : \qquad |f(t)| \leq M \quad \forall t \in [\,a,b\,]\,,$$

und es sei eine Teilung T des Intervalls $[\,a,b\,]$ samt einem zugehörigen Satz $\boldsymbol{\tau}$ von Messpunkten gegeben. Dann ist

$$R_T(f) := \sum_{k=1}^{N} f(\tau_k)\mu(Q_k)$$

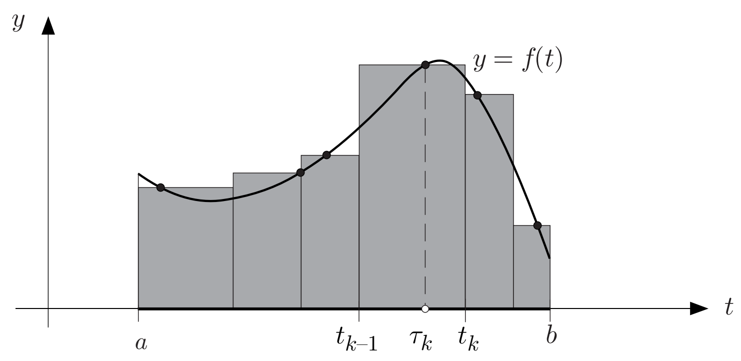

Fig. 9.1.3

(Fig 9.1.3) eine zu f und T gehörige **Riemannsche Summe** (die Abhängigkeit von $\boldsymbol{\tau}$ wird in der Bezeichnung nicht ausgewiesen). $R_T(f)$ ist ein Näherungswert für das angepeilte Integral $\int_Q f\,d\mu$. Wie gut sich die Teilung T für diesen Zweck eignet, lässt sich mit Hilfe der zu f und T gehörigen **Schwankungssumme**

$$D_T(f) := \sum_{k=1}^{N} |\Delta f|_{Q_k}\, \mu(Q_k)$$

kontrollieren: Es wird alles darauf ankommen, diese Grösse durch geeignete Wahl von T "kleiner als ε" zu machen. Im Fall einer skalaren Funktion f ist $D_T(f)$ die Summe der grauen Rechtecksflächen in Fig. 9.1.4.

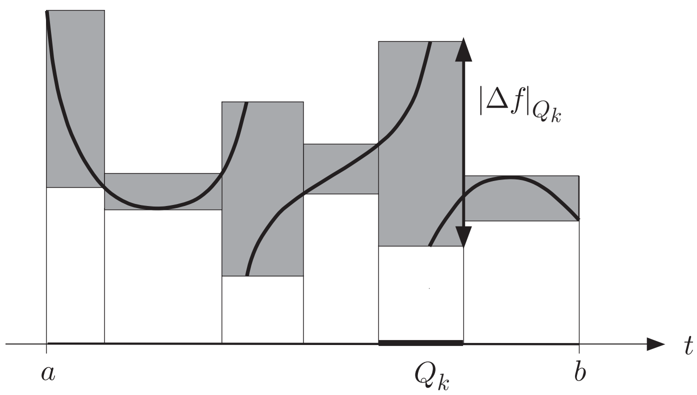

Fig. 9.1.4

Entsteht die Teilung T' des Intervalls $[\,a, b\,]$ aus T durch Hinzufügung weiterer Teilungspunkte (und Umnummerierung), so heisst T' **feiner** als T. Wir beweisen darüber:

(9.1) *Ist T' feiner als T und sind $R(f)$, $R'(f)$ zu T bzw. zu T' gehörige Riemannsche Summen, so gilt*

(a) $$|R(f) - R'(f)| \le D_T(f)\ ,$$

(b) $$D_{T'}(f) \le D_T(f)\ .$$

⌜ Es seien Q_k $(1 \le k \le N)$ die Teilintervalle von T und Q'_j $(1 \le j \le N')$ diejenigen von T'. Die zwischen den Q_k und den Q'_j vorhandenen Inzidenzen werden festgehalten in der Matrix $[\varepsilon_{jk}]$:

$$\varepsilon_{jk} := \begin{cases} 1 & (Q'_j \subset Q_k), \\ 0 & (\text{sonst})\ . \end{cases}$$

Dann gilt $\sum_k \varepsilon_{jk} = 1$ für jedes feste j und $\sum_j \varepsilon_{jk}\mu(Q'_j) = \mu(Q_k)$ für jedes feste k. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} R(f) - R'(f) &= \sum_k f(\tau_k)\mu(Q_k) - \sum_j f(\tau'_j)\mu(Q'_j) \\ &= \sum_{j,\,k} \varepsilon_{jk}\big(f(\tau_k) - f(\tau'_j)\big)\mu(Q'_j) \end{aligned}$$

und folglich

$$|R(f) - R'(f)| \le \sum_{j,k} \varepsilon_{jk}|\Delta f|_{Q_k}\, \mu(Q'_j) = \sum_k |\Delta f|_{Q_k}\, \mu(Q_k) = D_T(f) \ .$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\begin{aligned} D_{T'}(f) &= \sum_j |\Delta f|_{Q'_j}\, \mu(Q'_j) = \sum_{j,\,k} \varepsilon_{jk}|\Delta f|_{Q'_j}\, \mu(Q'_j) \\ &\le \sum_{j,k} \varepsilon_{jk}|\Delta f|_{Q_k}\, \mu(Q'_j) = D_T(f) \ . \end{aligned}$$

(9.2) *Sind T_1 und T_2 beliebige Teilungen des Intervalls Q und sind $R_1(f)$, $R_2(f)$ zugehörige Riemannsche Summen, so gilt*

$$|R_1(f) - R_2(f)| \le D_{T_1}(f) + D_{T_2}(f) \ .$$

$T' := T_1 \cup T_2$ ist feiner als T_1 und als T_2. Es sei $R'(f)$ eine beliebige zu T' gehörige Riemannsche Summe. Dann gilt nach **(9.1)**(a):

$$|R_1(f) - R_2(f)| \le |R_1(f) - R'(f)| + |R'(f) - R_2(f)| \le D_{T_1}(f) + D_{T_2}(f) \ .$$

Die "metrische Feinheit" einer Teilung T wird angegeben durch ihr **Korn**

$$\|T\| := \max_k \operatorname{diam}(Q_k) \ .$$

Diese Definition ist auch im mehrdimensionalen Fall sinnvoll; im vorliegenden eindimensionalen Fall gilt natürlich $\|T\| = \max_k \mu(Q_k)$. Der folgende Hilfssatz ist ein metrisches *Pendant* zu **(9.1)**(b):

(9.3) *Ist T eine Teilung des Intervalls Q in Teilintervalle Q_k und genügt die weitere Teilung $T' \subset Q$ der Bedingung*

$$\|T'\| \le \min_k \operatorname{diam}(Q_k) \ ,$$

so gilt

$$D_{T'}(f) \le 3D_T(f) \ .$$

Wir führen wieder eine "Inzidenzmatrix" $[\varepsilon_{jk}]$ ein:

$$\varepsilon_{jk} := \begin{cases} 1 & (Q'_j \between Q_k) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \quad .$$

Dann gilt erstens für jedes feste j:

$$|\Delta f|_{Q'_j} \le \sum_k \varepsilon_{jk} |\Delta f|_{Q_k} \ ,$$

und zweitens für jedes feste k:

$$\sum_j \varepsilon_{jk} \mu(Q'_j) \le \mu(Q_k) + 2 \max_j \mu(Q'_j) \le \mu(Q_k) + 2 \min_{k'} \mu(Q_{k'}) \le 3\mu(Q_k)$$

(Fig. 9.1.5). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{T'}(f) &= \sum_j |\Delta f|_{Q'_j} \, \mu(Q'_j) \le \sum_{j,k} \varepsilon_{jk} |\Delta f|_{Q_k} \, \mu(Q'_j) \\ &\le 3 \sum_k |\Delta f|_{Q_k} \, \mu(Q_k) = 3D_T(f) \ . \end{aligned}$$

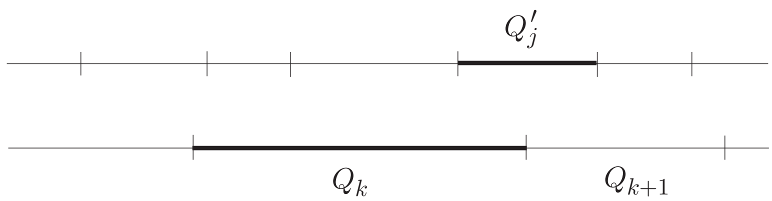

Fig. 9.1.5

Existenz des Integrals

Nach diesen Vereinbarungen und vorbereitenden Hilfssätzen definieren wir: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ heisst **(Riemann-)integrierbar** über $[\,a, b\,]$, wenn sie den folgenden Test besteht:

(RI) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Teilung T von $[\,a, b\,]$ mit $D_T(f) \le \varepsilon$.

Stetigkeit ist hierfür hinreichend (aber nicht notwendig, s.u.):

(9.4) *Ist* $f\colon [\,a,b\,] \to \mathbb{X}$ *stetig, so ist* f *über* $[\,a,b\,]$ *integrierbar.*

⌜ Nach Satz **(4.20)** ist f auf dem kompakten Intervall $[\,a,b\,] =: Q$ gleichmässig stetig. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$, so dass für beliebige t, $t' \in Q$ gilt:

$$|t - t'| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t) - f(t')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \ .$$

Besitzt nun die Teilung T ein Korn $\|T\| < \delta$, so hat man für jedes Teilintervall Q_k die Abschätzung

$$|\Delta f|_{Q_k} \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \ .$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$D_T(f) = \sum_{k=1}^{N} |\Delta f|_{Q_k}\, \mu(Q_k) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{N} \mu(Q_k) = \varepsilon \ . \qquad ⌟$$

Die obige Definition erhält ihre Rechtfertigung durch den folgenden fundamentalen Satz:

(9.5) *Ist* $f\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ *über* $[\,a,b\,]$ *integrierbar, so gibt es ein wohlbestimmtes Element* $S \in \mathbb{X}$ *mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Teilung* T *von* $[\,a,b\,]$ *und jede zu* T *gehörige Riemannsche Summe* $R_T(f)$ *gilt*

$$|R_T(f) - S| \leq D_T(f) \ . \tag{2}$$

Dieses S heisst **(Riemannsches) Integral von** f **über** $[\,a,b\,]$. Bis auf weiteres verwenden wir dafür die folgenden Bezeichnungen:

$$\int_{[\,a,b\,]} f\, d\mu \ , \qquad \int_{[\,a,b\,]} f(t)\, d\mu(t) \ .$$

Satz **(9.5)** sichert nicht nur die Existenz des Integrals unter der einfachen Bedingung (RI), sondern er liefert auch eine Fehlerabschätzung für die Riemannschen Summen.

⌜ (I) Eindeutigkeit: Besitzen sowohl S wie S' die Eigenschaft (2), so gilt für alle T:

$$|S - S'| \leq |S - R_T(f)| + |R_T(f) - S'| \leq 2D_T(f) \ ,$$

und hieraus folgt $S = S'$, da die rechte Seite beliebig klein gemacht werden kann.

(II) Existenz: Es gibt eine Folge $(T_n)_{n\geq 1}$ von Teilungen des Intervalls $[\,a,b\,]$ mit
$$D_{T_n}(f) < \frac{1}{n}\ .$$
Wird zu jedem T_n ein Satz von Messpunkten gewählt und die zugehörige Riemannsche Summe $R_n(f)$ berechnet, so gilt nach Lemma **(9.2)**:
$$|R_n(f) - R_m(f)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon \qquad \forall\, m,\, n > \frac{2}{\varepsilon}\ ,$$
und das heisst: Die $R_n(f)$ bilden eine Cauchy-Folge in $\mathbb{X}$. Nach Satz **(4.5)** gibt es daher ein $S \in \mathbb{X}$ mit
$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = S\ .$$
Es sei jetzt T eine ganz beliebige Teilung des Intervalls $[\,a,b\,]$ und $R_T(f)$ eine zugehörige Riemannsche Summe. Führt man in der Formel
$$|R_T(f) - R_n(f)| \leq D_T(f) + D_{T_n}(f)$$
(Lemma **(9.2)**) bei festem T den Grenzübergang $n \to \infty$ durch, so folgt die Behauptung (2). ⌟

Lemma **(9.3)** ermöglicht, das Integral (wie angekündigt) als Limes von Riemannschen Summen darzustellen:

(9.6) *Ist $f\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ über $[\,a,b\,]$ integrierbar, so gilt*
$$\lim_{\|T\|\to 0} R_T(f) = \int_{[\,a,b\,]} f\, d\mu\ ;$$
gemeint ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit
$$\left| R_T(f) - \int_{[\,a,b\,]} f\, d\mu \right| < \varepsilon$$
für alle Teilungen T mit $\|T\| < \delta$.

⌜ Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Teilung T_0 mit $D_{T_0}(f) < \varepsilon/3$. Es sei $\delta > 0$ die Länge des *kürzesten* Teilintervalles von T_0. Ist T eine beliebige Teilung mit einem Korn $\|T\| < \delta$, so gilt auf Grund von (3) und Lemma **(9.3)**:
$$\left| R_T(f) - \int_{[\,a,b\,]} f\, d\mu \right| \leq D_T(f) \leq 3D_{T_0}(f) < \varepsilon\ .$$ ⌟

(9.7) *Es sei $f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ über $[\,a,b\,]$ integrierbar. Ist $(T_n)_{n\geq 0}$ eine beliebige Folge von Teilungen mit $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 0$ und sind $R_n(f)$ zugehörige Riemannsche Summen, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = \int_{[\,a,b\,]} f\, d\mu \ .$$

① Wir berechnen das Integral

$$\int_{[\,a,b\,]} e^{\lambda t}\, d\mu(t) \ , \qquad \lambda \in \mathbb{C}^* \ .$$

Hierzu verwenden wir Teilungen T_n von $[\,a,b\,]$ in $n \geq 1$ gleiche Teile der Länge $h := (b-a)/n$. Damit ergeben sich die Teilungspunkte $t_k := a + k\,h$ $(0 \leq k \leq n)$, und wir wählen als Messpunkt jeweils den linken Endpunkt des betreffenden Teilintervalls: $\tau_k := t_{k-1}$ $(1 \leq k \leq n)$. Die zugehörigen Riemannschen Summen haben den Wert

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\lambda(a+k\,h)}\, h = e^{\lambda a} \frac{e^{\lambda(b-a)} - 1}{e^{\lambda h} - 1}\, h = \frac{e^{\lambda b} - e^{\lambda a}}{\lambda} \, \frac{\lambda h}{e^{\lambda h} - 1} \ .$$

Wegen $\|T_n\| = h = \dfrac{(b-a)}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ dürfen wir Satz **(9.7)** anwenden und erhalten mit Hilfe von **(5.21)**:

$$\int_{[\,a,b\,]} e^{\lambda t}\, d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{\lambda}\big(e^{\lambda b} - e^{\lambda a}\big) \ .$$

Setzen wir hier zum Beispiel $\lambda := i$, so ergibt sich unter Vorwegnahme einer plausiblen Rechenregel:

$$\int_{[\,a,b\,]} \cos t\, d\mu(t) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{i}\big(e^{ib} - e^{ia}\big)\right] = \operatorname{Im}\big(e^{ib} - e^{ia}\big) = \sin b - \sin a \ ,$$

und analog

$$\int_{[\,a,b\,]} \sin t\, d\mu(t) = \operatorname{Im}\left[\frac{1}{i}\big(e^{ib} - e^{ia}\big)\right] = -\operatorname{Re}\big(e^{ib} - e^{ia}\big) = -\cos b + \cos a \ ,$$

was die wenigsten überraschen wird. ○

② Es soll das Integral

$$\int_{[a,b]} \frac{1}{t}\, d\mu(t)\,, \qquad 0 < a < b\,,$$

berechnet werden. Hierzu teilen wir das Intervall $[a,b]$ auf einer logarithmischen Skala in n gleiche Teile: Wir setzen $\sqrt[n]{b/a} =: \rho > 1$ und weiter

$$t_k := a \cdot \rho^k \quad (0 \le k \le n)\,, \qquad \tau_k := t_{k-1} \quad (1 \le k \le n)\ .$$

Damit ergibt sich $\mu(Q_k) = t_k - t_{k-1} = a\rho^{k-1}(\rho - 1)$ und

$$\|T_n\| = \mu(Q_n) = a\rho^{n-1}(\rho - 1) < b\left(\sqrt[n]{b/a} - 1\right)\ ,$$

so dass $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 0$ sichergestellt ist. Die zugehörigen Riemannschen Summen haben den Wert

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tau_k}\, \mu(Q_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a\rho^{k-1}}\, a\rho^{k-1}\,(\rho - 1) = n\left(\sqrt[n]{b/a} - 1\right)\ .$$

Wir können jetzt Satz **(9.7)** anwenden und erhalten

$$\int_{[a,b]} \frac{1}{t}\, d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(b/a)^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{(b/a)^x - 1}{x} = \log\frac{b}{a}\ ,$$

wie erwartet. ○

Rechenregeln

Das Integral genügt natürlich verschiedenen Rechenregeln:

(9.8) *Für eine vektorwertige Funktion* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ *gilt*

$$\int_{[a,b]} \mathbf{f}\, d\mu = \mathbf{s} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{[a,b]} f_i\, d\mu = s_i \quad (1 \le i \le m)\,;$$

insbesondere ist

$$\int_{[a,b]} \mathrm{Re} f\, d\mu = \mathrm{Re}\left(\int_{[a,b]} f\, d\mu\right)\,,$$

und analog für den Imaginärteil.

⌜ Für beliebige Teilintervalle $J \subset [a,b]$ gilt

$$|\Delta f_i|_J \le |\Delta \mathbf{f}|_J \le \sum_{i=1}^{m} |\Delta f_i|_J\,,$$

folglich genügen die Schwankungssummen analogen Ungleichungen. Hieraus ergibt sich weiter, dass $\mathbf{f}$ genau dann integrierbar ist, wenn das für die Koordinatenfunktionen f_i zutrifft. Der Rest folgt aus Regel **(3.14)**(a). ⌟

(9.9) *Sind f und g integrierbar über $[a,b]$ und ist $\alpha \in \mathbb{X}$ eine beliebige Konstante, so sind auch die Funktionen*

$$f+g\,,\quad \alpha f\,,\quad |f|\,,\quad f\cdot g$$

über $[a,b]$ integrierbar, und zwar gilt

(a) $$\int_{[a,b]}(f+g)\,d\mu = \int_{[a,b]} f\,d\mu + \int_{[a,b]} g\,d\mu\,,$$

(b) $$\int_{[a,b]}(\alpha f)\,d\mu = \alpha\int_{[a,b]} f\,d\mu\,,$$

(c) $$f(t)\geq 0\quad \forall t\in[a,b] \qquad\Longrightarrow\qquad \int_{[a,b]} f\,d\mu \geq 0\,,$$

(d) $$\left|\int_{[a,b]} f\,d\mu\right| \leq \int_{[a,b]} |f|\,d\mu\,,$$

(e) $$\int_{[a,b]} 1\,d\mu = b-a\,.$$

⌜ Um die Integrierbarkeit von $|f| = \operatorname{abs}\circ f$ zu beweisen, überlegen wir folgendermassen: Wegen

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \qquad \forall\, x,\, y\in\mathbb{X}$$

ist abs lipstetig mit Lipzahl 1. Hieraus folgt für beliebige Teilintervalle $J\subset[a,b]$ die Ungleichung

$$\big|\Delta(\operatorname{abs}\circ f)\big|_J \leq |\Delta f|_J\,,$$

und hieraus ergibt sich weiter, dass $|f|$ eher kleinere Schwankungssummen besitzt als f.

Nun zu $f\cdot g$: Es gibt ein $M>0$ mit

$$|f(t)|\leq M\,,\quad |g(t)|\leq M \qquad \forall t\in[a,b]\,.$$

Für beliebige $t,\, t'\in[a,b]$ gilt daher

$$\begin{aligned}|f(t)g(t)-f(t')g(t')| &\leq |f(t)|\,|g(t)-g(t')| + |g(t')|\,|f(t)-f(t')|\\ &\leq M\big(|f(t)-f(t')| + |g(t)-g(t')|\big)\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\big|\Delta(f\cdot g)\big|_J \leq M\left(|\Delta f|_J + |\Delta g|_J\right)$$

für beliebige Teilintervalle $J\subset[a,b]$ und weiter

$$D_T(f\cdot g)\leq M\big(D_T(f)+D_T(g)\big)$$

für die Schwankungssummen. Sind daher $D_T(f)$ und $D_T(g)$ je $<\varepsilon/(2M)$, so ist $D_T(f\cdot g)<\varepsilon$. — *Anmerkung:* Für das Produkt gibt es *keine* Regel vom Typ (a)!

Die Regeln (a)–(d) ergeben sich mit Hilfe von Satz **(9.7)** und allgemeinen Regeln über Grenzwerte aus den entsprechenden Formeln für die Riemannschen Summen. Schliesslich noch (e): Ist $f(t)\equiv 1$, so haben alle Riemannschen Summen den Wert $b-a$. ⌟

Mit Hilfe dieser Regeln verifiziert man sofort die folgende pauschale Form des Mittelwertsatzes:

(9.10) *Genügt* $f\colon [\,a,b\,] \to \mathbb{X}$ *der Abschätzung*

$$|f(t)| \le M \qquad \forall t \in [\,a,b\,]\,,$$

so gilt

$$\left|\int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu\right| \le M\,(b-a)\ .$$

Der eigentliche **Mittelwertsatz der Integralrechnung** handelt von stetigen reellwertigen Funktionen (Fig. 9.1.6):

(9.11) *Es sei* $f\colon [\,a,b\,] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann gibt es ein* $\tau \in [\,a,b\,]$ *mit*

$$\int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu = f(\tau)\,(b-a)\ .$$

⌜ Es seien η_* und η^* beziehungsweise das Minimum und das Maximum von f auf $[\,a,b\,]$. Dann gilt

$$\forall t \in [\,a,b\,]: \qquad \eta_* \le f(t) \le \eta^*$$

und somit

$$\eta_*(b-a) = \int_{[\,a,b\,]} \eta_*\,d\mu \le \int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu \le \int_{[\,a,b\,]} \eta^*\,d\mu = \eta^*(b-a)\ .$$

Dies ist äquivalent mit

$$\frac{1}{b-a}\int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu =: \eta \in [\,\eta_*, \eta^*\,]\ .$$

Nach dem Zwischenwertsatz **(4.21)** gibt es jetzt einen Punkt $\tau \in [\,a,b\,]$ mit $f(\tau) = \eta$. Dieses τ genügt. ⌟

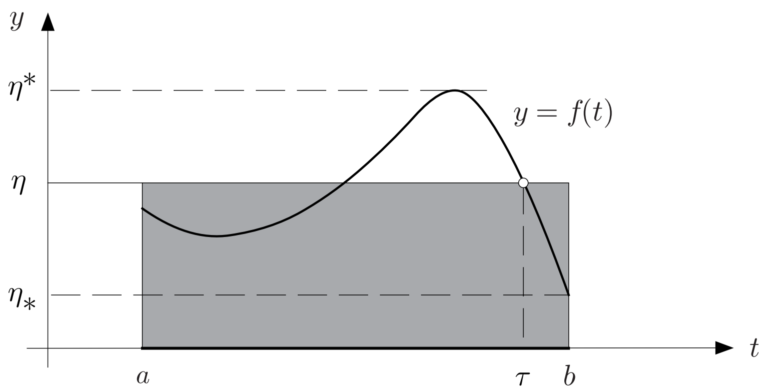

Fig. 9.1.6

Von den Grundeigenschaften des Integrals fehlt noch die Additivität bezüglich der Vereinigung von (aneinanderstossenden) Integrationsbereichen. Also:

(9.12) *Es sei $a < b < c$. Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ integrierbar über $[\,a, b\,]$ und über $[\,b, c\,]$, so auch über $[\,a, c\,]$, und umgekehrt. Es gilt dann*

$$\int_{[\,a,c\,]} f\,d\mu = \int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu + \int_{[\,b,c\,]} f\,d\mu \ .$$

Sind T' und T'' Teilungen von $[\,a, b\,]$ und $[\,b, c\,]$, so ist $T := T' \cup T''$ eine Teilung von $[\,a, c\,]$, und es gilt

$$D_T(f) = D_{T'}(f) + D_{T''}(f) \ . \tag{3}$$

Ist umgekehrt T^* eine Teilung von $[\,a, c\,]$, so induziert $T := T^* \cup \{b\}$ Teilungen T' und T'' von $[\,a, b\,]$ und $[\,b, c\,]$; dabei gilt nach Lemma **(9.1)**(b):

$$D_{T'}(f) + D_{T''}(f) = D_T(f) \leq D_{T^*}(f) \ . \tag{4}$$

Aus (3) und (4) ergeben sich unmittelbar die Behauptungen betreffend die Integrierbarkeit.
Sind weiter R' und R'' zu T' und T'' gehörige Riemannsche Summen, so ist $R := R' + R''$ eine zu T gehörige Riemannsche Summe. Es seien S, S' und S'' die angeschriebenen Integrale. Dann gilt

$$S - (S' + S'') = (S - R) + (R' - S') + (R'' - S'')$$

und somit wegen **(9.5)**:

$$\begin{aligned} |S - (S' + S')| &\leq |R - S| + |R' - S'| + |R'' - S''| \leq D_T + D_{T'} + D_{T''} \\ &= 2\big(D_{T'} + D_{T''}\big) \ . \end{aligned}$$

Da hier die rechte Seite beliebig klein gemacht werden kann, muss die linke Seite gleich 0 sein.

Nullmengen

Es wurde bereits angedeutet, dass eine Funktion nicht im Ganzen stetig zu sein braucht und doch integrierbar sein kann. Wir wollen das noch genauer anschauen.

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heisst eine **(Jordan-)Nullmenge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele *offene* Intervalle $J_l \ \ (1 \leq l \leq r)$ gibt mit

$$A \subset \bigcup_{l=1}^{r} J_l \ , \qquad \sum_{l=1}^{r} \mu(J_l) < \varepsilon \ . \tag{5}$$

Bsp: eine endliche Menge, die Menge $\left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Interessante "natürliche" Nullmengen gibt es erst im mehrdimensionalen Fall: Eine Kurve γ in der Ebene hat zwar positive Länge, ist aber als Teilmenge $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge. Ohne weiteres verifiziert man:

— Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

— Sind A und B Nullmengen, so ist auch $A \cup B$ eine Nullmenge.

Im Hinblick aufs Integral müssen wir die vielleicht improvisierte Überdekkung (5) der Nullmenge A in den Rahmen einer "sauberen" Teilung stellen können. Dies leistet das folgende Lemma:

(9.13) *Es seien* $[\,a,b\,]$ *ein Intervall und* $A \subset \mathbb{R}$ *eine beliebige Nullmenge . Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Teilung* T *von* $[\,a,b\,]$ *mit*

$$\sum_{Q_k \between A} \mu(Q_k) < \varepsilon \ .$$

⌜ Es sei (6) eine Überdeckung von A durch offene Intervalle $J_l =]\,a_l, b_l\,[$ $(1 \le l \le r)$ der Gesamtlänge $< \varepsilon$. Dann stellt die Menge

$$T := \{a, b,\, a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r\} \cap [\,a,b\,]$$

eine Teilung des Intervalls $[\,a,b\,]$ dar. Zu jedem Teilintervall Q_k, das die Menge A schneidet, gibt es mindestens ein l mit $Q_k \between J_l$, und die Q_k, die ein vorgegebenes J_l schneiden, haben eine Gesamtlänge $\le \mu(J_l)$ (Fig. 9.1.7). Wir können daher schreiben:

$$\sum_{Q_k \between A} \mu(Q_k) \le \sum_l \left(\sum_{Q_k \between J_l} \mu(Q_k) \right) \le \sum_l \mu(J_l) < \varepsilon \ . \qquad ⌟$$

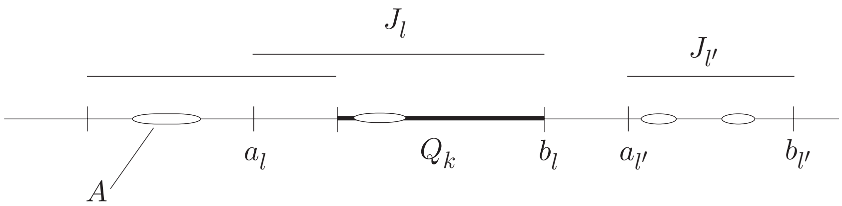

Fig. 9.1.7

Im Zusammenhang mit "Ausnahmepunkten" hat sich die folgende Redeweise eingebürgert: Eine Aussage über Punkte x gilt **fast überall**, wenn sie für alle betrachteten x, mit Ausnahme einer gewissen Nullmenge, zutrifft.

Bsp: Die Funktion abs ist fast überall differenzierbar.

(9.14) *Ist* $f\colon [\,a,b\,] \to \mathbb{X}$ *beschränkt und fast überall* $= 0$, *so ist*

$$\int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu = 0\ .$$

⌜ Es sei $|f(t)| \le M$, $M > 0$, und $A := \{t \mid f(t) \neq 0\}$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach **(9.13)** eine Teilung T des Intervalls $[\,a,b\,]$ mit

$$\sum_{Q_k \between A} \mu(Q_k) < \frac{\varepsilon}{2M}\ .$$

Für diese Teilung ist

$$D_T(f) = \sum_{Q_k \between A} |\Delta f|_{Q_k}\, \mu(Q_k) \le \sum_{Q_k \between A} 2M\, \mu(Q_k) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\ ;$$

somit ist f über $[\,a,b\,]$ integrierbar. In analoger Weise erhält man

$$\bigl|R_T(f)\bigr| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

so dass mit **(9.5)** folgt:

$$\left|\int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu\right| \le |R_T(f)| + D_T(f) < \frac{3\varepsilon}{2}\ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, hat das Integral den Wert 0. ⌟

Aus **(9.14)** ziehen wir noch den folgenden Schluss: Wird eine integrierbare Funktion auf einer Nullmenge abgeändert, so bleibt sie integrierbar, und der Wert des Integrals ändert sich nicht. — Nun zur Hauptsache (Fig. 9.1.8):

(9.15) *Ist die Funktion* $f\colon [\,a,b\,] \to \mathbb{X}$ *beschränkt und fast überall stetig, so ist* f *über* $[\,a,b\,]$ *integrierbar.*

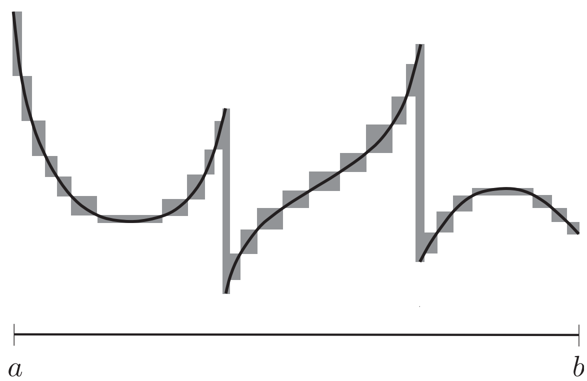

Fig. 9.1.8

Es sei $|f(t)| \leq M, \quad M > 0$, und es sei A die Menge der Unstetigkeitspunkte von f. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach **(9.13)** eine Teilung T_0 von $[\,a, b\,]$ mit

$$\sum_{Q_k \mathrel{\not\supset\!\subset} A} \mu(Q_k) < \frac{\varepsilon}{4M} \;.$$

Es sei $G := \bigl\{k \;\big|\; Q_k \mathrel{\supset\!\subset} A\bigr\}$ die Menge der "guten" k. Ist $k \in G$, so ist f nach Satz **(9.4)** über Q_k integrierbar. Es gibt daher für jedes solche k eine Teilung T_k von Q_k mit

$$D_{T_k}(f) < \frac{\mu(Q_k)}{b-a} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \;.$$

Setzt man jetzt $T := T_0 \cup \bigcup_{k \in G} T_k$, so ist

$$\begin{aligned} D_T(f) &= \sum_{k \in G} D_{T_k}(f) + \sum_{Q_k \mathrel{\not\supset\!\subset} A} D_{T_k}(f) \\ &\leq \frac{\varepsilon/2}{b-a} \sum_{k \in G} \mu(Q_k) + \sum_{Q_k \mathrel{\not\supset\!\subset} A} 2M\,\mu(Q_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. Zur Begründung des Riemannschen Integrals von *reellwertigen* Funktionen $f\colon [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ werden häufig auch die sogenannten **(Riemannschen) Obersummen** $\overline{R}_T(f)$ bzw. **Untersummen** $\underline{R}_T(f)$ herangezogen. Definiere diese Grössen sinngemäss und zeige, was folgt:
   (a) Für beliebige Teilungen T von $[\,a, b\,]$ gilt: $\overline{R}_T(f) - \underline{R}_T(f) = D_T(f)$.
   (b) Ist T' feiner als T, so gilt: $\overline{R}_{T'}(f) \leq \overline{R}_T(f)$.
   (c) Ist f integrierbar, so gilt für beliebige T:
   $$\underline{R}_T(f) \leq \int_{[\,a,b\,]} f\, d\mu \leq \overline{R}_T(f) \;.$$

2. Berechne einen Näherungswert für das Integral
   $$\int_0^2 e^{-t^2/2}\, dt$$
   mit Hilfe einer Zerlegung des Intervalls $[\,0, 2\,]$ in 20 gleiche Teile. Schätze den Fehler ab und vergleiche mit dem Tabellenwert.

3. Zeige, dass die Funktion
   $$f(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{t} - \left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor & (0 < t \leq 1) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

über $[0,1]$ integrierbar ist, und berechne den Wert des Integrals.

4. (a) Zeige: eine monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. *Hinweis:* Teile $[a,b]$ in N^2 gleiche Teile $[t_{k-1}, t_k]$. Bei höchstens N davon ist
$$|f(t_k) - f(t_{k-1})| \geq \frac{|f(b) - f(a)|}{N} .$$
   (b) Konstruiere eine monoton wachsende Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen.
   (c) Konstruiere eine monoton wachsende Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit einer in $[0,1]$ dichten Menge von Unstetigkeitsstellen.

5. Beweise ohne Rückgriff auf den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung die Gleichung
$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \qquad (x > 0) .$$
Hinweis: Setze $\arctan x =: \alpha$ und betrachte Teilungen
$$T_n : \qquad t_k := \tan(k\alpha/n) \qquad (0 \leq k \leq n) .$$
Bei geeigneter Wahl der Messpunkte lassen sich die Zahlen
$$R_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k - t_{k-1}}{1 + t_k t_{k-1}}$$
als Riemannsche Summen zu dem angeschriebenen Integral auffassen.

9.2 Der Hauptsatz der Integralrechnung

Aufintegrieren

Wir benötigen eine allgemeine Methode zur Berechnung von Integralen. Die Beispiele 9.1.①–② sind nämlich nicht typisch: Nur in ganz speziellen Fällen ist es möglich, ein Integral mit Hilfe von Riemannschen Summen exakt zu berechnen. Es braucht noch eine neue Idee, und die lautet bekanntlich, das Integral "als Funktion der oberen Grenze" zu betrachten.

Im folgenden ist $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges (endliches, unendliches, offenes, halboffenes, ...) Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{X}$ heisst **lokal integrierbar**, wenn sie über beliebige kompakte Teilintervalle $[\,x, y\,] \subset I$ integrierbar ist. Dies sei für f der Fall, und es sei $a \in I$ ein fest gewählter Punkt. Wir bilden die Funktion

$$F_a(x) := \begin{cases} \int_{[\,a,x\,]} f\,d\mu & (x > a) \\ 0 & (x = a) \\ -\int_{[\,x,a\,]} f\,d\mu & (x < a) \end{cases}$$

(Fig. 9.2.1) und sagen, die Funktion f sei von a aus **aufintegriert** worden.

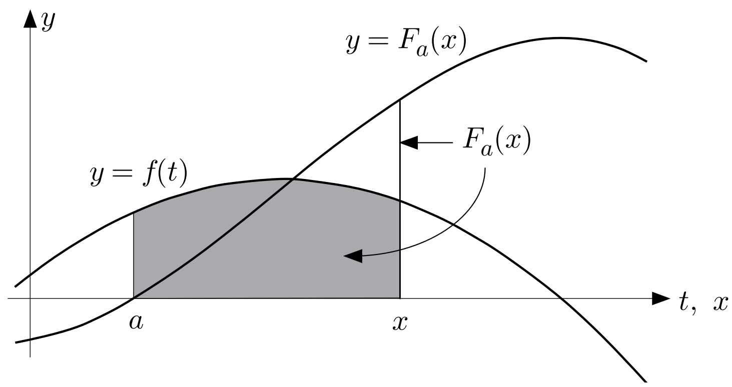

Fig. 9.2.1

Bsp: Wird die im Innern einer fliegenden Rakete messbare Beschleunigung vom Start weg zweimal aufintegriert, so erhält man die zur Zeit t zurückgelegte Distanz, was zur Ortsbestimmung verwendet werden kann.

Man überzeugt sich anhand der Fig. 9.2.1 bzw. mit Hilfe von **(9.12)** und einigen Fallunterscheidungen, dass diese Funktion $F := F_a : I \to \mathbb{X}$ die folgende charakteristische Eigenschaft besitzt:

$$\textbf{(9.16)} \qquad F(y) - F(x) = \int_{[\,x,y\,]} f\,d\mu \qquad (x,\, y \in I, \quad x < y)\ .$$

Damit kommen wir schon zu einer ersten Version des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung (**"Hauptsatz A"**):

(9.17) *Es sei I ein beliebiges Intervall, $f : I \to \mathbb{X}$ eine stetige Funktion und F die von $a \in I$ aus aufintegrierte Funktion f. Dann ist $F' = f$; insbesondere gilt*

$$\frac{d}{dx}\int_{[\,a,x\,]} f\,d\mu = f(x) \quad (x \ge a)\,, \qquad \frac{d}{dx}\int_{[\,x,a\,]} f\,d\mu = -f(x) \quad (x \le a)\ .$$

In Worten: Die Ableitung des Integrals nach der oberen Grenze ist gleich dem Wert des Integranden an der betreffenden Stelle.

In Wirklichkeit braucht f nicht durchwegs stetig zu sein. Es ist einfach so, dass in den Stetigkeitspunkten von f die Formel $F'(x) = f(x)$ gilt. Wir beweisen nämlich (und damit ist dann auch **(9.17)** bewiesen):

(9.18) *Ist $f : I \to \mathbb{X}$ lokal integrierbar und bezeichnet F die von $a \in I$ aus aufintegrierte Funktion f, so gilt:*

(a) *$F : I \to \mathbb{X}$ ist stetig.*

(b) *Existiert an einer Stelle $x_0 \in I$ der rechtsseitige Grenzwert $f(x_0+)$, so ist F dort rechtsseitig differenzierbar, und es gilt $F'(x_0+) = f(x_0+)$.*

⌜ (a) Ist x_0 nicht der rechte Endpunkt von I, so gibt es ein $y_0 > x_0$ mit $I_0 := [\,x_0, y_0\,] \subset I$, und f ist über I_0 integrierbar. Es gibt daher ein M mit $|f(t)| \le M$ für alle $t \in I_0$, und wir erhalten mit **(9.10)**:

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{[\,x_0,x\,]} f\,d\mu\right| \le M\,(x - x_0) \qquad (x_0 < x \le y_0)\ .$$

Dies beweist die rechtsseitige Stetigkeit von F an der Stelle x_0.
(b) Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung ein $\delta > 0$ mit

$$|f(t) - f(x_0+)| < \varepsilon \qquad (x_0 < t < x_0 + \delta)\ .$$

Nach **(9.16)** und allgemeinen Rechenregeln gilt für $x_0 < y < x_0 + \delta$:

$$F(y) - F(x_0) - f(x_0+)(y - x_0) = \int_{[\,x_0,y\,]} \bigl(f(t) - f(x_0+)\bigr)\,d\mu(t)\ ;$$

somit haben wir

$$\bigl|F(y) - F(x_0) - f(x_0+)(y - x_0)\bigr| \le \varepsilon\,(y - x_0) \qquad (x_0 < y < x_0 + \delta)\ .$$

Division mit $y - x_0 > 0$ liefert

$$\left|\frac{F(y) - F(x_0)}{y - x_0} - f(x_0+)\right| \le \varepsilon \qquad (x_0 < y < x_0 + \delta)\,,$$

was zu beweisen war. ⌟

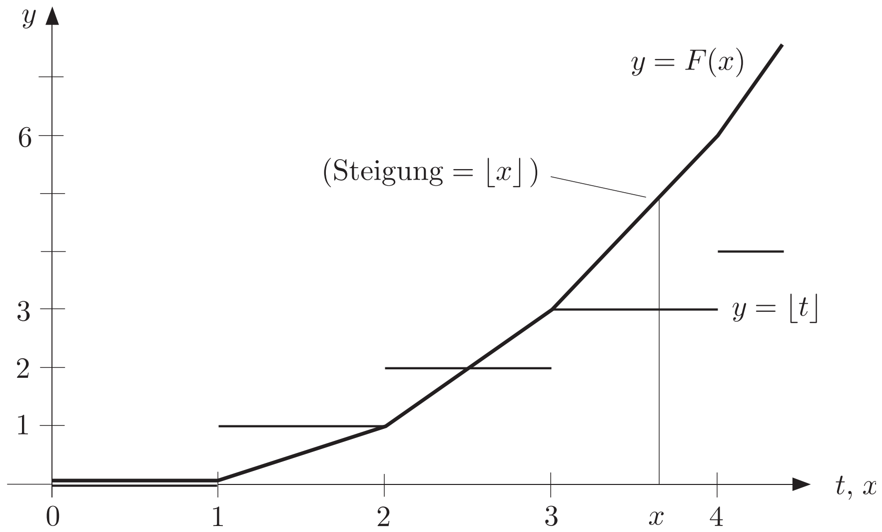

Fig. 9.2.2

① Fig. 9.2.2 zeigt den Graphen der Funktion

$$f(t) := \lfloor t \rfloor := \max\bigl\{k \in \mathbb{Z} \bigm| k \le t\bigr\}$$

und ihrer von 0 aus Aufintegrierten, F. Letztere ist stetig und in allen Punkten $x \notin \mathbb{Z}$ differenzierbar. In den ganzzahligen Punkten besitzt der Graph von F einen Knick, entsprechend den verschiedenen einseitigen Grenzwerten von f. — Rechnerisch bestimmt sich $F(x)$ wie folgt, wobei wir der Einfachheit halber $x > 0$ voraussetzen:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{[\,0,x\,]} \lfloor t \rfloor \, d\mu(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \int_{[k-1,k]} \lfloor t \rfloor \, d\mu(t) + \int_{\bigl[\lfloor x \rfloor,x\bigr]} \lfloor t \rfloor \, d\mu(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} (k-1) + \lfloor x \rfloor (x - \lfloor x \rfloor) = \frac{(\lfloor x \rfloor - 1)\lfloor x \rfloor}{2} + \lfloor x \rfloor (x - \lfloor x \rfloor) \\ &= \lfloor x \rfloor \left(x - \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{2} \right) . \end{aligned}$$

○

Stammfunktionen

Stehen zwei Funktionen F, $f : I \to \mathbb{X}$ in der Relation $F' = f$, so ist f die Ableitung von F, und F heisst eine **Stammfunktion** von f auf I. Satz **(9.17)** besitzt das folgende Korollar:

(9.19) *Zu jeder stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{X}$ gibt es eine Stammfunktion $F : I \to \mathbb{X}$.*

Die Menge *aller* Stammfunktionen von $f : I \to \mathbb{X}$ heisst **unbestimmtes Integral** von f und wird mit

$$\int f(t)\,dt$$

bezeichnet. Wie wir gleich zeigen werden, stimmen die einzelnen Mitglieder dieser Funktionenschar bis auf eine additive Konstante überein. In diesem Zusammenhang erweist sich folgende Schreibweise als zweckmässig: Für eine beliebige Funktion $F_0 : I \to \mathbb{X}$ bzw. einen Funktionsausdruck $F_0(t)$ in der Variablen t bezeichnet

$$\langle\, F_0 \,\rangle \qquad \text{bzw.} \qquad \langle\, F_0(t) \,\rangle$$

die Menge aller Funktionen bzw. Ausdrücke, die sich von F_0 um eine konstante Funktion unterscheiden. — Das folgende einfache Prinzip verwandelt jede Differentiationsregel in eine “Integrationsregel”:

(9.20) *Ist $f = F_0'$, so ist die Menge aller Stammfunktionen von f die “Parallelschar” $\langle\, F_0 \,\rangle$; in Formeln:*

$$f = F_0' \qquad \Longrightarrow \qquad \int f(t)\,dt = \langle\, F_0 \,\rangle\ .$$

⌜ Wir müssen die Gleichheit von zwei Funktionenmengen beweisen. — Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt $(F-F_0)' = F'-F_0' = f-f = 0$, und hieraus folgt mit Satz **(7.16)**, dass $F - F_0$ konstant ist, d.h. $F \in \langle F_0 \rangle$. Umgekehrt: Ist $f = F_0'$, so ist auch jede Funktion $F(t) := F_0(t) + c$, c fest, eine Stammfunktion von f. ⌟

② $$\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{1+t^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \langle\, \arctan t \,\rangle\ ;$$

$$\sinh' \;=\; \cosh \qquad \Longrightarrow \qquad \int \cosh t\,dt \;=\; \langle\, \sinh t \,\rangle\ .$$ ○

Wir kehren nunmehr zurück zum Problem der Berechnung von Riemannschen Integralen

$$\int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu$$

und bringen den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung auf folgende anwendungsorientierte Form (**“Hauptsatz B”**):

(9.21) *Es seien $f : [\,a,b\,] \to \mathbb{X}$ eine stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt:*

$$\int_{[\,a,b\,]} f(t)\,d\mu(t) \;=\; F(b) - F(a)\ .$$

⌈ Da sich verschiedene Stammfunktionen von f nur um eine additive Konstante unterscheiden, hat hier die Differenz rechter Hand für alle Stammfunktionen denselben Wert, und wir dürfen annehmen, F sei die in **(9.17)** als Stammfunktion erwiesene Funktion

$$F_a(x) \;:=\; \int_{[\,a,x\,]} f\,d\mu \qquad (x > a)\ .$$

Für diese gilt aber wegen $F_a(a) = 0$ tatsächlich

$$\int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu = F_a(b) = F_a(b) - F_a(a)\ .$$ ⌋

Satz **(9.21)** stellt ein Riemannsches Integral, das heisst: einen Grenzwert von Riemannschen Summen, als Differenz von Funktionswerten einer Stammfunktion dar und macht damit die Berechnung derartiger Integrale einem allgemeinen und letzten Endes algebraischen Kalkül zugänglich. Das Problem ist damit auf eine andere Ebene geschoben worden: Wir müssen nicht mehr mit irgendwelchen Tricks einen Grenzwert ausrechnen; dafür entsteht neu die Aufgabe, zu einem gegebenen Funktionsterm $f(t)$ eine Stammfunktion $F(t)$ zu finden.

Für die bei der Integralberechnung auftretenden Differenzen $F(b) - F(a)$ hat sich die bequeme Schreibweise

$$F(b) - F(a) \;=:\; F(t)\Big|_a^b \qquad \text{(o.ä.)}$$

eingebürgert. Soll eine solche Differenz für eine (unter Umständen noch nicht bekannte) Stammfunktion F von f berechnet werden, so bezeichnet man sie mit

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

und nennt diesen Ausdruck das **bestimmte Integral der Funktion f von a bis b.**

Wir wiederholen: Das *unbestimmte* Integral

$$\int f(t)\,dt$$

ist die Menge aller Stammfunktionen von f; das *bestimmte* Integral

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

ist die für irgendeine Stammfunktion F von f berechnete Differenz $F(b) - F(a)$, und zwar ist das auch für $b < a$ definiert.

Aufgrund dieser Vereinbarungen erhält Satz **(9.21)** die (nur scheinbar tautologische) Form

$$\textbf{(9.21}'\textbf{)} \qquad \int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu \;=\; \int_a^b f(t)\,dt \qquad (a < b)\ .$$

Angesichts dieser Formel benutzen wir für Riemannsche Integrale über ein Intervall $[\,a,b\,]$ die Schreibweise

$$\int_{[\,a,b\,]} f\,d\mu$$

(bis auf weiteres) nicht mehr, sondern wir schreiben dafür ebenfalls (wie allgemein üblich)

$$\int_a^b f(t)\,dt\ . \tag{1}$$

Durch (1) wird übrigens das Wesen der bezeichneten Grösse typographisch suggestiv zum Ausdruck gebracht, denn es gilt ja

$$\int_a^b f(t)\,dt \doteq \sum_{k=1}^N f(\tau_k)\,(t_k - t_{k-1})\ .$$

Das Mitführen des “Differentials” dt im Ausdruck für das bestimmte Integral wird sich weiter bewähren im Zusammenhang mit den Substitutionsregeln (Abschnitt 9.3). In diesem Sinn soll man das dt nicht als ein mathematisches Objekt, sondern nur als eine “Rechenmarke” betrachten, die angibt, nach welcher Variablen integriert wird.

Über die Technik des Integrierens

Damit stehen wir vor der Aufgabe, eine als Ausdruck gegebene Funktion, zum Beispiel

$$f(t) := \sqrt{t^2+1}\,,$$

unbestimmt zu integrieren, das heisst: einen Funktionsterm $F(t)$ anzugeben, dessen Ableitung $F'(t)$, gerechnet nach den Regeln von Abschnitt 7.1, mit $f(t)$ übereinstimmt. Diese Aufgabe ist nicht immer lösbar; so besitzt zum Beispiel die Funktion $t \mapsto \exp(-t^2/2)$ keine elementare Stammfunktion. (Hierfür gibt es leider keinen einfachen Beweis.) Unser jetziges Problem hat jedoch mit der *Existenz* von Stammfunktionen nichts zu tun: Nach Satz **(9.17)** besitzt jede auf einem Intervall I stetige Funktion dort Stammfunktionen, ob man sie nun “formelmässig” angeben kann oder nicht.

Wir stellen im folgenden einige Regeln zusammen, mit denen man in den meisten Fällen, wo es geht, durchkommt. Es gibt aber auch umfangreiche Integraltafeln, zum Beispiel

I.S. Gradshteyn + I.M. Ryzhik: Table of Integrals, Series und Products. 4[th] ed., 1965 (Academic Press).

Noch bequemer sind natürlich Computerprogramme, die einen Funktionsausdruck $f(t)$ als Input akzeptieren und die zugehörigen Stammfunktionen $F(t)$ als Ausdruck ausgeben, zum Beispiel die Systeme "Mathematica" oder "Maple".

③ Hier ein Beispiel (von Davenport) für die Leistungsfähigkeit derartiger Systeme: Als Lösung der Aufgabe

$$\int \frac{2t^6 + 4t^5 + 7t^4 - 3t^3 - t^2 - 8t - 8}{(2t^2-1)^2\sqrt{t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 1}}\, dt$$

produziert der Computer den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&- 2\log(t^2 + 4t + 2) - \log(\sqrt{2} + 2t) \\
&+ \log\left(\sqrt{2}t + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 1}\right) \\
&- 5\log(2t^2 - 1) - 5\log\left(2\sqrt{2}t + 4\sqrt{2} - t^2 - 4t - 6\right) \\
&+ 5\log\Big(\left(4\sqrt{2} + 19\right)\sqrt{t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 1} \\
&\qquad -16\sqrt{2}t^2 - 8\sqrt{2}t + 6\sqrt{2} - 29t^2 - 38t + 5\Big) \\
&+ 2\log\Big(\left(10\sqrt{2} + 17\right)\sqrt{t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 1} \\
&\qquad +4\sqrt{2}t^2 + 16\sqrt{2}t - 2\sqrt{2} - 11t^2 - 44t - 39\Big) \\
&+ \frac{1}{2}\log\Big(\left(731\sqrt{2}t + 71492\sqrt{2} - 70030t - 141522\right)\sqrt{t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 1} \\
&\qquad - 40597\sqrt{2}t^3 - 174520\sqrt{2}t^2 - 122871\sqrt{2}t + 50648\sqrt{2} \\
&\qquad +90874t^3 + 403722t^2 + 272622t - 61070\Big) \\
&+ \frac{(2t+1)\sqrt{t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 1}}{4t^2 - 2}\,.
\end{aligned}$$

○

Der Geltungsbereich der nachstehenden Formeln und Integrationsregeln wird nicht jedesmal ausdrücklich angegeben. Wo nichts anderes gesagt ist, gilt die betreffende Regel für jedes Intervall, auf dem alle daran beteiligten Integranden stetig sind.

Die Integrale der elementaren Grundfunktionen

Die nachstehenden Formeln lassen sich ohne weiteres mit Hilfe von Satz **(9.20)**, das heisst: durch Ableiten der rechten Seite, verifizieren.

► $$\int t^\alpha\,dt = \langle\,\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\,\rangle \qquad (\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq -1)\,;$$

► $$\int e^{\lambda t}\,dt = \langle\,\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\,\rangle \qquad (\lambda\in\mathbb{C}^*)\,;$$

► $$\int \cosh t\,dt = \langle\,\sinh t\,\rangle\,, \qquad \int \sinh t\,dt = \langle\,\cosh t\,\rangle\,;$$

► $$\int \cos t\,dt = \langle\,\sin t\,\rangle\,, \qquad \int \sin t\,dt = \langle\,-\cos t\,\rangle\,;$$

► $$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \langle\,\arctan t\,\rangle\,,$$

► $$\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \langle\,\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}\,\rangle \qquad (-1<t<1)\,;$$

► $$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \langle\,\arcsin t\,\rangle\,,$$

► $$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \langle\,\operatorname{arsinh} t\,\rangle = \langle\,\log\bigl(t+\sqrt{t^2+1}\bigr)\,\rangle\,,$$

► $$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \langle\,\operatorname{arcosh} t\,\rangle = \langle\,\log\bigl(t+\sqrt{t^2-1}\bigr)\,\rangle \qquad (t>1)\,.$$

Wir kommen nun zu allgemeinen Regeln, die gestatten, kompliziertere Ausdrücke auf einfachere zurückzuführen.

Linearität

Wir beginnen mit der folgenden Bemerkung: Eine bestimmte Parallelschar über dem Intervall I lässt sich durch jedes ihrer Mitglieder repräsentieren. Die Parallelscharen sind nämlich nichts anderes als die Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation

$$F_1 \sim F_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad F_1 - F_2 = \text{const.}\ .$$

Ist jetzt $\langle F_1 \rangle = \langle F_2 \rangle$ und $\langle G_1 \rangle = \langle G_2 \rangle$, so folgt ohne weiteres

$$\langle F_1 + G_1 \rangle = \langle F_2 + G_2 \rangle\ ,$$

ferner $\langle \lambda F_1 \rangle = \langle \lambda F_2 \rangle$ für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\in \mathbb{C}$). Da hiernach die Schar $\langle F + G \rangle$ nur von den Scharen $\langle F \rangle$ und $\langle G \rangle$ abhängt — und analog die Schar $\langle \lambda F \rangle$ nur von λ und $\langle F \rangle$ —, wird durch die Festsetzung

$$\langle F \rangle + \langle G \rangle := \langle F + G \rangle\ , \qquad \lambda \langle F \rangle := \langle \lambda F \rangle$$

in der Menge der Parallelscharen über einem Intervall I auf natürliche Weise eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren definiert. In anderen Worten: Die Menge dieser Scharen bildet einen Vektorraum $X = X(I)$ im Sinne der linearen Algebra.

Damit wird die folgende Proposition sinnvoll:

(9.22) *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $C(I)$ der Raum der stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ (bzw. $\to \mathbb{C}$) und $X(I)$ der Raum der Parallelscharen auf I. Die folgenden Operationen sind linear:*

(a) *die unbestimmte Integration*

$$\int : \quad C(I) \to X(I)\ , \qquad f \mapsto \int f(t)\, dt\ ,$$

(b) *für beliebige zwei Punkte a, $b \in I$ die Evaluation*

$$\cdot\Big|_a^b : \quad X(I) \to \mathbb{R} \quad (\text{bzw. } \to \mathbb{C})\ , \qquad \langle F \rangle \mapsto F(b) - F(a)\ .$$

⌜ (a) Ist $f = F'$ und $g = G'$, so gilt $f + g = (F + G)'$ und $\lambda f = (\lambda F)'$. Mit zweimaliger Verwendung von **(9.20)** folgt daher

$$\int \big(f(t) + g(t)\big)\, dt = \langle F + G \rangle = \langle F \rangle + \langle G \rangle = \int f(t)\, dt + \int g(t)\, dt$$

und analog

$$\int \lambda f(t)\, dt = \lambda \int f(t)\, dt\ .$$

(b) Dass $\cdot\,\big|_a^b$ auf $X(I)$ wohldefiniert ist, wurde schon früher bemerkt. Die Linearität ist eigentlich evident. $\lrcorner$

Nimmt man hier (a) und (b) zusammen, so erhält man als Korollar noch die weiteren Rechenregeln

$$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt\,, \qquad \int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

④ Für ein Polynom ergibt sich

$$\int \big(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0\big)\,dt = \Big\langle\, \frac{a_n}{n+1}t^{n+1} + \ldots + \frac{a_1}{2}t^2 + a_0 t \,\Big\rangle\,.$$

Insbesondere merke man sich den Wert

$$\int_0^1 t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

$\bigcirc$

Integral von "logarithmischen Ableitungen"

(9.23) *Ist die reellwertige Funktion ϕ stetig differenzierbar und $\neq 0$ auf dem Intervall I, so gilt dort:*

$$\int \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\,dt = \langle\, \log|\phi(t)|\,\rangle\,.$$

$\ulcorner$ Nach Voraussetzung über ϕ gibt es ein festes $\sigma \in \{-1,1\}$ mit $|\phi(t)| \equiv \sigma\phi(t)$. Die Funktion

$$F(t) := \log|\phi(t)| = \log\big(\sigma\phi(t)\big)$$

besitzt nach der Kettenregel die Ableitung

$$F'(t) = \log'\big(\sigma\phi(t)\big)\cdot\sigma\phi'(t) = \frac{1}{\sigma\phi(t)}\sigma\,\phi'(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\,,$$

was zu beweisen war. $\lrcorner$

③ Es gilt

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \begin{cases} \langle\, \log t\,\rangle & (t>0) \\ \langle\, \log(-t)\,\rangle & (t<0)\,. \end{cases}$$

Die Sinusfunktion ist auf dem Intervall $]\,0,\pi\,[$ positiv; folglich gilt dort

$$\int \cot t\,dt = \int \frac{\cos t}{\sin t}\,dt = \langle\, \log(\sin t)\,\rangle\,.$$

Analog: Die Cosinusfunktion ist auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ positiv; folglich gilt dort

$$\int \tan t\, dt = -\int \frac{-\sin t}{\cos t}\, dt = \langle -\log(\cos t) \rangle \ .$$

○

⑤ Auf $]1, \infty[$ ist $\log t > 0$, auf $]0,1[$ ist $\log t < 0$ und somit $|\log t| = -\log t = \log(1/t)$. Wenden wir daher **(9.23)** mit $f := \log$ an, so ergibt sich

$$\int \frac{dt}{t \log t} = \int \frac{\log'(t)}{\log(t)}\, dt = \begin{cases} \langle \log\log t \rangle & (t > 1) \\ \langle \log\log(1/t) \rangle & (0 < t < 1). \end{cases}$$

○

Aufgaben

1. Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige 2π-periodische Funktion. Unter welcher Bedingung besitzt f eine ebenfalls 2π-periodische Stammfunktion F? Man zeige, dass die gefundene Bedingung notwendig und hinreichend ist.
2. Es sei X der Vektorraum der Parallelscharen $\langle F \rangle$ von differenzierbaren Funktionen $F: I \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Operationen definieren ein lineares Funktional $X \to \mathbb{R}$? (Die Werte a,b, $t_k \in I$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ sind fest.)
   (a) $\delta_a: \langle F \rangle \mapsto F(a)$, (b) $\phi: \langle F \rangle \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k F(t_k)$,
   (c) wie (b), aber $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$ vorausgesetzt,
   (d) $\psi: \langle F \rangle \mapsto F'(a)$, (e) $\chi: \langle F \rangle \mapsto \int_a^b F(t)\, dt$.
3. Zeige: Die Funktion
   $$f(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$
   nimmt auf $\mathbb{R}$ ein globales Maximum M und ein globales Minimum $-M$ an. Finde einen Ausdruck für M und beweise $M < 2$. *Hinweis:* Beweise und verwende die Ungleichung $\sin t < t\cos(t/2)$ $(0 < t < \pi)$.
4. (Nicht ganz ernst gemeint) Verifiziere das in Beispiel 9.2.③ wiedergegebene Resultat (a) mit Papier und Bleistift oder (b) mit Hilfe eines Computerprogramms, das Funktionsausdrücke differenzieren kann.

9.3 Partielle Integration und Substitution

Partielle Integration

Aus der Formel für die Ableitung eines Produkts ergibt sich der Satz über die **partielle Integration**:

(9.24)(a)
$$\int u(t)v'(t)\,dt = \langle\, u(t)v(t)\,\rangle - \int u'(t)v(t)\,dt\,,$$

(b)
$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = u(t)v(t)\Big|_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt\ .$$

⌜ Es ist $(uv)' = u'v + uv'$, somit folgt mit **(9.20)**:

$$\int \big(u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\big)\,dt = \langle\, u(t)v(t)\,\rangle\ .$$

Hier darf man nach **(9.22)** die linke Seite aufspalten und den einen Summanden nach rechts bringen. ⌟

Die folgenden Beispiele zeigen die praktische Anwendung der partiellen Integration. Das Ziel ist immer, rechter Hand ein Integral zu erhalten, das einfacher ist, als das Ausgangsintegral war. Dabei erweist es sich als zweckmässig, im Ausgangsintegral den Faktor, der im Lauf der Rechnung *differenziert* wird, mit einem nach unten weisenden Pfeil (‘$\downarrow$’) und den Faktor, der *integriert* wird, mit einem nach oben weisenden Pfeil (‘$\uparrow$’) zu bezeichnen.

① Bei Integralen vom Typus

$$\int t^n e^{\lambda t}\,dt \quad (\lambda \in \mathbb{C}^*)\,, \qquad \int t^n \cos t\,dt\,, \qquad \int t^n \sin t\,dt \qquad (n \in \mathbb{N})$$

lässt sich der auftretende Exponent durch partielle Integration um eins erniedrigen und somit rekursiv auf 0 bringen:

$$\begin{aligned}\int \underset{\downarrow}{t^n}\ \underset{\uparrow}{e^{\lambda t}}\ dt &= \langle\, t^n \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}\,\rangle - \int n t^{n-1} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}\,dt \\ &= \langle\, \frac{1}{\lambda} t^n e^{\lambda t}\,\rangle - \frac{n}{\lambda} \int t^{n-1} e^{\lambda t}\,dt\ .\end{aligned}$$

Ähnliches gilt für die beiden anderen Typen. ○

② Um das Integral $\int \log t\,dt$ zu berechnen, führen wir formal einen Faktor 1 ein und integrieren partiell:

$$\begin{aligned}\int \log t\,dt &= \int \underset{\uparrow}{1}\ \underset{\downarrow}{\log t}\ dt = \langle\, t\log t\,\rangle - \int t\,\frac{1}{t}\,dt = \langle\, t\log t\,\rangle - \langle\, t\,\rangle\\ &= \langle\, t\,(\log t - 1)\,\rangle\ .\end{aligned}$$

Dies ist ein Spezialfall der für beliebiges $\lambda \neq -1$ gültigen Berechnung

$$\begin{aligned}\int \underset{\uparrow}{t^\lambda}\ \underset{\downarrow}{\log t}\ dt &= \langle\, \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1}\log t\,\rangle - \int \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt\\ &= \langle\, \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1}\log t\,\rangle - \langle\, \frac{t^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^2}\,\rangle\\ &= \langle\, \frac{t^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^2}\big((\lambda+1)\log t - 1\big)\,\rangle\ .\end{aligned}$$

③ Um das unbestimmte Integral

$$J := \int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt$$

zu berechnen, werden wir zweimal hintereinander partiell integrieren; wir dürfen dabei $\alpha \neq 0$ voraussetzen:

$$\begin{aligned}J &= \int \underset{\uparrow}{e^{\alpha t}}\ \underset{\downarrow}{\sin(\beta t)}\ dt = \langle\, \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\rangle - \int \frac{1}{\alpha}\,\underset{\uparrow}{e^{\alpha t}}\,\beta\underset{\downarrow}{\cos(\beta t)}\ dt\\ &= \langle\, \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\rangle - \langle\, \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\rangle + \int \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha t}\beta\big(-\sin(\beta t)\big)\,dt\\ &= \frac{1}{\alpha^2}\langle\, e^{\alpha t}\big(\alpha\sin(\beta t) - \beta\cos(\beta t)\big)\,\rangle - \frac{\beta^2}{\alpha^2}J\ .\end{aligned}$$

Der Misserfolg ist nur scheinbar: Wir können nach J auflösen und erhalten

$$J \;=\; \langle\, \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\big(\alpha\sin(\beta t) - \beta\cos(\beta t)\big)\,\rangle\ . \tag{1}$$

Das Ganze nocheinmal von vorn, aber einfacher: Aus

$$\int e^{(\alpha+i\beta)t}\,dt = \frac{1}{\alpha+i\beta}e^{(\alpha+i\beta)t} = \frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}e^{(\alpha+i\beta)t}$$

folgt durch Trennung von Real- und Imaginärteil sofort (1) sowie zusätzlich

$$\int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt \;=\; \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\big(\alpha\sin(\beta t) - \beta\cos(\beta t)\big)\ .$$

Anwendung: Das Wallissche Produkt

④ Wir wollen die Zahlen

$$c_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt \qquad (n \in \mathbb{N})$$

berechnen. Zunächst ist

$$c_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}, \qquad c_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \sin t \Big|_0^{\pi/2} = 1 .$$

Um eine Rekursionsformel für die c_n zu erhalten, schreiben wir

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{\pi/2} \underset{\downarrow}{\cos^{n-1} t} \;\; \underset{\uparrow}{\cos t} \; dt \\ &= \cos^{n-1} t \, \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1) \cos^{n-2} t \, (-\sin t) \sin t \, dt \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t \, (1 - \cos^2 t) \, dt \\ &= (n-1)(c_{n-2} - c_n) . \end{aligned}$$

Hieraus folgt $nc_n = (n-1)c_{n-2}$, das heisst:

$$c_n = \frac{n-1}{n} \, c_{n-2} \qquad (n \geq 2) . \tag{2}$$

Ist n *gerade*: $n = 2m$, so endet der iterative Abstieg bei 0, und wir erhalten

$$c_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot c_0$$

oder andersherum:

$$c_{2m} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{2m-1}{2m} \qquad (m \geq 1) .$$

Ist jedoch n *ungerade*: $n = 2m+1$, so ergibt sich in analoger Weise

$$c_{2m+1} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{2m}{2m+1} \qquad (m \geq 1) .$$

Mit Hilfe der c_n können wir noch eine "klassische" Darstellung der Zahl π herleiten. Aus den Ungleichungen

$$\cos^{2m} t \geq \cos^{2m+1} t \geq \cos^{2m+2} t \qquad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

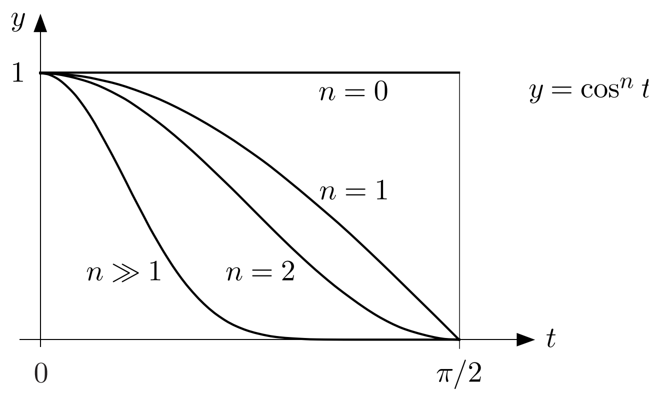

Fig. 9.4.1

(Fig. 9.4.1) und (2) folgt

$$c_{2m} \geq c_{2m+1} \geq c_{2m+2} = \frac{2m+1}{2m+2} c_{2m} \ .$$

Wir dividieren mit c_{2m} und erhalten

$$1 \geq \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} \geq \frac{2m+1}{2m+2} = 1 - \frac{1}{2m+2} \ ;$$

somit gilt

$$\lim_{m\to\infty} \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} \ = \ 1 \ . \tag{3}$$

Nun ist aber

$$\frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} \ ,$$

so dass (3) die folgende Produktdarstellung von $\pi/2$ nach sich zieht:

(9.25)
$$\frac{\pi}{2} \ = \ \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \ \ldots \ .$$

Dies ist das sogenannte **Wallissche Produkt**. ○

Substitution, erste Art

Die Kettenregel ermöglicht die Integration durch **Substitution**, und zwar auf zwei Arten. Beim Arbeiten mit den Substitutionsregeln bewährt sich die folgende Schreibweise für den Ausdruck einer zusammengesetzten Funktion $h \circ \phi$:

$$h(\phi(t)) =: h(u)\big|_{u:=\phi(t)} \ .$$

Die erste Substitutionsregel ist anwendbar auf Integranden, die schon von vorneherein als Opfer der Kettenregel erkennbar sind.

Bsp: Die Funktion

$$g(t) \ := \ \left(\sin^3 t + e^{\sin t}\right) \cos t$$

ist offensichtlich die Ableitung der Funktion

$$G(t) \ := \ \frac{1}{4} \sin^4 t + e^{\sin t} \ .$$

(9.26) *Die Funktion* ϕ: $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \phi(t)$ *sei stetig differenzierbar, und die Funktion* f *sei stetig. Dann gilt auf* I*:*

(a) $$\int f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt = \int f(u)\,du\bigg|_{u:=\phi(t)} ,$$

und für beliebige $a, b \in I$*:*

(b) $$\int_a^b f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du \ .$$

Hier liefert (a) die in der Variablen t ausgedrückten Stammfunktionen des Integranden, während (b) von bestimmten Integralen handelt. Bei bestimmten Integralen entfällt die Rücktransformation auf die Ausgangsvariable, dafür sind die Integrationsgrenzen mitzutransformieren. — Um Ausdrücke der Form $f\big(\phi(t)\big)\,\phi'(t)$ zu integrieren, hat man nach **(9.26)** folgendermassen vorzugehen:

(a) *Unbestimmtes Integral*

1. Substituiere formal $\phi(t) := u\,,\ \ \phi'(t)\,dt := du$.
2. Integriere unbestimmt nach u.
3. Ersetze u wieder durch $\phi(t)$.

(b) *Bestimmtes Integral*

1. Substituiere formal $\phi(t) := u\,,\ \ \phi'(t)\,dt := du$.
2. Ersetze die t-Grenzen a, b durch die u-Grenzen $\phi(a)$, $\phi(b)$.
3. Integriere.

Es sei $F(u)$ eine Stammfunktion von $f(u)$. Dann ist $F\big(\phi(t)\big)$ eine Stammfunktion von $f\big(\phi(t)\big)\,\phi'(t)$. Somit sind beide Seiten von (a) gleich

$$\langle\, F\big(\phi(t)\big)\,\rangle$$

und beide Seiten von (b) gleich

$$F\big(\phi(b)\big) - F\big(\phi(a)\big)\ .$$

① Der in **(9.23)** betrachtete Sachverhalt lässt sich auch als Anwendungsfall der Substitutionsregel **(9.26)** (mit $f(u) := 1/u$) interpretieren:

$$\int \frac{1}{\phi(t)}\,\phi'(t)\,dt = \int \frac{1}{u}\,du\bigg|_{u:=\phi(t)} = \langle\, \log|u|\,\rangle_{u:=\phi(t)} = \langle\, \log|\phi(t)|\,\rangle\ .$$

In ähnlicher Weise hat man für beliebiges $\alpha \neq -1$ die Regel

$$\int \big(\phi(t)\big)^{\alpha}\phi'(t)\,dt = \langle\, \frac{1}{\alpha+1}\big(\phi(t)\big)^{\alpha+1}\,\rangle\ .$$

Betrachte hierzu das folgende Beispiel:

$$\int \frac{t-\rho}{(t^2-2\rho t+1)^{3/2}}\,dt = \langle\, \frac{-1}{\sqrt{t^2-2\rho t+1}}\,\rangle$$

② Das Integral

$$J \ := \int \big(\cos t + \cos^3 t\big)\,dt$$

hat auf den ersten Blick nicht die hier benötigte Form. Nun ist aber

$$J = \int (1+\cos^2 t)\cos t\,dt = \int (2-\sin^2 t)\cos t\,dt\ ,$$

und wir sehen, dass die Substitution

$$\sin t := u\ , \qquad \cos t\,dt := du$$

zum Ziel führt. Es ergibt sich

$$J = \int (2-u^2)\,du\bigg|_{u:=\sin t} = \langle\, 2u - \frac{u^3}{3}\,\rangle_{u:=\sin t} = \langle\, 2\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\,\rangle\ .$$

Wenden wir dieselbe Substitution auf das bestimmte Integral

$$J_0 \ := \int_{\pi/6}^{\pi} \big(\cos t + \cos^3 t\big)\,dt$$

an, so ergeben sich die neuen Grenzen $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und $\sin\pi = 0$, und wir erhalten

$$J_0 = \int_{1/2}^{0} (2-u^2)\,du = \big(2u - \frac{u^3}{3}\big)\bigg|_{1/2}^{0} = -(1-\frac{1}{24}) = -\frac{23}{24}\ .$$

③ Ist $f = F'$ und $\alpha \neq 0$, so gilt allgemein

$$\int f(\alpha t + \beta)\, dt = \frac{1}{\alpha} \int f(\alpha t + \beta)\, \alpha\, dt = \frac{1}{\alpha} \int f(u)\, du \Big|_{u:=\alpha t+\beta}$$
$$= \langle\, \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)\, \rangle\ .$$

Damit ergibt sich zum Beispiel

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t/a)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \langle\, a \arctan \frac{t}{a}\, \rangle = \langle\, \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a}\, \rangle\ .$$

○

Substitution, zweite Art

Die zweite Substitutionsregel ist wesentlich flexibler als die erste. Sie bezieht sich auf ganz beliebige Integrale

$$\int_{\cdot}^{\cdot} f(x)\, dx$$

und verwandelt sie mit Hilfe einer willkürlich gewählten Substitutionsfunktion $x := \phi(t)$ in

$$\int_{\cdot}^{\cdot} f\big(\phi(t)\big)\, \phi'(t)\, dt\ .$$

Dieser Ausdruck sieht nur komplizierter aus als der vorangehende, wenn man ihn mit allgemeinen Funktionen f und ϕ hinschreibt. In Wirklichkeit ist es gerade das Ziel der ganzen Operation, durch geschickte Wahl der Substitutionsfunktion ϕ dafür zu sorgen, dass das neue Integral einfacher wird. Dabei gibt es noch eine Nebenbedingung: Die Substitutionsfunktion muss in dem erforderlichen t-Intervall invertierbar sein, so dass man die Substitutionsgleichung $x := \phi(t)$ nach t auflösen, das heisst: t durch x ausdrücken kann. — Die Regel lautet:

(9.27) *Ist die Funktion $t \mapsto x := \phi(t)$ stetig differenzierbar und existiert*

$$\phi^{-1}: \quad I \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto \phi^{-1}(x)\,,$$

so gilt für jede auf I stetige Funktion f die Formel

(a) $$\int f(x)\, dx = \int f\big(\phi(t)\big)\, \phi'(t)\, dt \Big|_{t\,:=\,\phi^{-1}(x)}\ ,$$

und für beliebige a, $b \in I$:

(b) $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f\big(\phi(t)\big)\, \phi'(t)\, dt\ .$$

Hier bezieht sich wieder (a) auf unbestimmte und (b) auf bestimmte Integrale. Wie in **(9.26)** entfällt bei bestimmten Integralen die Rücktransformation auf die Ausgangsvariable, dafür sind die Integrationsgrenzen mitzutransformieren. Nach vollzogener Substitution kann man sowohl das Ausgangsintegral wie die Substitutionsfunktion vergessen und braucht nur noch das erhaltene Integral über das t-Intervall mit Endpunkten $\phi^{-1}(a)$, $\phi^{-1}(b)$ zu betrachten. — Um einen Ausdruck $f(x)$ nach **(9.27)** zu integrieren, hat man folgendermassen vorzugehen:

(a) *Unbestimmtes Integral*

1. Wähle eine geeignete invertierbare Substitutionsfunktion ϕ.
2. Substituiere formal $x := \phi(t)$, $dx := \phi'(t)dt$.
3. Integriere unbestimmt nach t.
4. Drücke t wieder durch x aus.

(b) *Bestimmtes Integral*

1. Wähle eine geeignete invertierbare Substitutionsfunktion ϕ.
2. Substituiere formal $x := \phi(t)$, $dx := \phi'(t)dt$.
3. Ersetze die x-Grenzen a, b durch die t-Grenzen $\phi^{-1}(a)$, $\phi^{-1}(b)$.
4. Integriere.

⌜ Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann ist $F\big(\phi(t)\big)$ eine Stammfunktion von $f\big(\phi(t)\big)\,\phi'(t)$. Die linke Seite von (a) ist folglich gleich $\langle\, F(x)\,\rangle$, die rechte gleich

$$\langle\, F\big(\phi(t)\big)\,\rangle_{t:=\phi^{-1}(x)} \;=\langle\, F\big(\phi(\phi^{-1}(x))\big)\,\rangle\ .$$

Somit stellen beide Seiten von (a) die gleichen Funktionenscharen über I dar. Weiter hat die linke Seite von (b) den Wert $F(b)-F(a)$, die rechte Seite den Wert $F\big(\phi(\phi^{-1}(b))\big) - F\big(\phi(\phi^{-1}(a))\big)$, was natürlich dasselbe ist. ⌟

④ Als erstes berechnen wir das unbestimmte Integral

$$J_x \;:=\; \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\ .$$

Es liegt nahe, zunächst die Exponentialfunktion wegzuschaffen mit Hilfe des Ansatzes:

$$e^x \;:=\; t\ , \tag{4}$$

der aber, wohlgemerkt, die Rücksubstitution $t = \phi^{-1}(x)$ ausdrückt. Wir benötigen natürlich auch explizit die eigentliche Substitutionsfunktion $x = \phi(t)$; es ergibt sich

$$x = \log t\ , \qquad dx = \frac{1}{t}dt\ ,$$

und wir erhalten

$$J_x \;=\; \int \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\frac{1}{t}\,dt\bigg|_{t:=e^x} \quad .$$

Damit stehen wir vor der Aufgabe, das "metamorphe" Integral

$$J_t \;:=\; \int \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\frac{1}{t}\,dt$$

weiter zu behandeln. Hierzu "substituieren wir die Wurzel", das heisst: Wir setzen

$$\sqrt{1+t} \;:=\; u \;, \tag{5}$$

wobei dies wiederum die Rücksubstitution $u = \psi^{-1}(t)$ ausdrückt. Die (nicht zu umgehende) Auflösung nach t liefert

$$t = u^2 - 1\,, \qquad dt = 2u\,du\;,$$

und es ergibt sich

$$J_t = \int \frac{1}{u}\,\frac{1}{u^2-1}\,2u\,du\bigg|_{u:=\sqrt{1+t}} \quad .$$

Wir verbleiben mit dem Integral

$$J_u = \int \frac{2}{u^2-1}\,du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = \langle\, \log|u-1| - \log|u+1|\,\rangle$$
$$= \langle\, \log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\,\rangle$$

und haben nun die Rücksubstitutionen vorzunehmen. Es ergibt sich nacheinander

$$J_t = (J_u)_{u:=\sqrt{1+t}} \;= \langle\, \log\left|\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1}\right|\,\rangle\;,$$
$$J_x = (J_t)_{t:=e^x} = \langle\, \log\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\,\rangle\;.$$

Wäre von Anfang an nur nach dem Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$

gefragt worden, so hätten dieselben Substitutionen zu dem folgenden Rechenablauf geführt:

$$\int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\frac{1}{t}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2}{u^2-1}\,du$$
$$= \log\frac{u-1}{u+1}\bigg|_{\sqrt{2}}^2 = \log\frac{2-1}{2+1} - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$
$$= \log\frac{1}{3} + \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$
$$= \log\bigl(1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\bigr) = 0.6641\;;$$

dabei haben wir die t-Grenzen mit (4) erhalten:

$$e^0 = 1\,, \qquad e^{\log 3} = 3\,,$$

und die u-Grenzen mit (5):

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,, \qquad \sqrt{1+3} = 2\,.$$

○

Aufgaben

1. Betrachte die Funktion

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad (x \geq 1)$$

und zeige, dass L der Funktionalgleichung $L(uv) = L(u) + L(v)$ genügt. Dabei dürfen nur allgemeine Eigenschaften des Integrals (Zerlegungsadditivität, Substitutionsregeln usw.), aber keine Vorkenntnisse über die Logarithmusfunktion verwendet werden.

2. Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{nt}\,dt\,.$$

Hinweis: Wähle ein $\varepsilon > 0$ und zerlege den Integrationsbereich in die Teilintervalle $[\,0, \varepsilon\,]$ und $\left[\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Leite ein gekoppeltes Paar von Rekursionsgleichungen her für die Grössen

$$c_n := \int_0^{\pi/2} t^n \cos t\,dt\,, \qquad s_n := \int_0^{\pi/2} t^n \sin t\;dt$$

und berechne c_n, s_n für $0 \leq n \leq 4$.

4. Es sei

$$C_n := \int_0^{\log 2} \cosh^n t\,dt \qquad (n \geq 0)\,.$$

Bestimme C_0, C_1 sowie eine Rekursionsformel für die C_n. *Hinweis:* ‘ cosh ’, nicht ‘ cos ’!

5. Leite eine Rekursionsformel her für die Integrale

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \qquad (p,\,q \in \mathbb{N}^*)$$

und beweise mit vollständiger Induktion:

$$B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \ .$$

6. Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \sin^2 t\, e^{-t}\, dt$, (b) $\displaystyle\int \frac{dt}{1+\cos t} \quad \big(\tan(t/2) := u\big)$,

(c) $\displaystyle\int \sinh t\, \cos t\, dt$, (d) $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\, dt \quad (t^2+1 := u)$,

(e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\, dt \quad (t := \sin^2 u)$, (f) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}$.

7. Die Funktionen $u \mapsto \dfrac{e^u}{u}$ und $x \mapsto \sqrt{1+x^4}$ besitzen keine elementaren Stammfunktionen. Berechne die folgenden Integrale, so weit sie elementar sind:

(a) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\, dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{x}{\log x}\, dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x \log x}\, dx$, (d) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^4}\, dx$,

(e) $\displaystyle\int \sqrt{1+e^{4t}}\, dt$.

9.4 Integration der rationalen Funktionen

Idee der Partialbruchzerlegung

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass jede rationale Funktion einer reellen Variablen t,

$$R(t) := \frac{p(t)}{q(t)} \, ,$$

p und q reelle (oder komplexe) Polynome, elementar integriert werden kann. Hierzu wird die gegebene Funktion $R(t)$ als Summe von besonders "einfachen" rationalen Funktionen dargestellt, die sich leicht einzeln integrieren lassen. Die Existenz dieser sogenannten *Partialbruchzerlegung* ist ein Satz der Algebra und stützt sich auf die beiden folgenden Grundtatsachen:

(a) *Polynomdivision*

Es seien p und q Polynome, q nicht das Nullpolynom. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$p = p_0 \, q + r$$

mit gewissen Polynomen p_0, r und $\deg r < \deg q$.

Hier ist p_0 das bei der Polynomdivision $p : q$ rechter Hand aufgebaute Polynom, im folgenden als **ungebrochener Teil von** p/q bezeichnet, und r ist der beim Abbruch der Rechnung verbleibende Rest.

(b) *Fundamentalsatz der Algebra*

Ein Polynom

$$q(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 \tag{1}$$

vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten besitzt wenigstens eine Nullstelle $\zeta_0 \in \mathbb{C}$.

Bekanntlich besitzt das Polynom (1) in Wirklichkeit genau n komplexe Nullstellen (mehrfache mehrfach gezählt). Hiermit ist folgendes gemeint: Es gibt (nicht notwendigerweise verschiedene) komplexe Zahlen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ mit

$$q(t) = (t - \zeta_1) \cdot \ldots \cdot (t - \zeta_n) \; . \tag{2}$$

Bezeichnen wir die *verschiedenen* ζ_k mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, so können wir (2) in der Form

$$q(t) = \prod_{j=1}^{r} (t - \alpha_j)^{m_j} \tag{3}$$

schreiben. Die α_j und ihre **Vielfachheiten** m_j sind durch q bzw. (1) bis auf die Nummerierung eindeutig bestimmt.

Ist q ein Polynom mit *reellen* Koeffizienten, so ist mit jeder Nullstelle $\alpha \in \mathbb{C}$ auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\alpha}$ eine Nullstelle von q der gleichen Vielfachheit.

⌜ Für ein beliebiges komplexes Polynom a bezeichne $\bar{a}$ das durch Konjugation der Koeffizienten von a erhaltene Polynom. Es sei also $q = \bar{q}$ und α eine m-fache Nullstelle von q. Dann ist

$$q(t) = (t - \alpha)^m \, q_1(t)$$

für ein gewisses Polynom q_1, und aus den Rechenregeln für komplexe Zahlen folgt hieraus

$$(t - \bar{\alpha})^m \bar{q}_1(t) = \bar{q}(t) = q(t) \ .$$

Hiernach ist $\bar{\alpha}$ eine Nullstelle von q der Vielfachheit $m' \geq m$, und aus Symmetriegründen folgt $m' = m$. ⌟

Das folgende Lemma bildet die Grundlage der Partialbruchzerlegung:

(9.28) *Es sei*

$$R(t) = \frac{p(t)}{(t - \alpha)^m \hat{q}(t)} \ , \qquad m \geq 1 \ , \quad \hat{q}(\alpha) \neq 0$$

für gewisse Polynome p und $\hat{q}$. Dann gibt es ein Polynom $\hat{p}$ mit

$$R(t) = \frac{A}{(t - \alpha)^m} + \frac{\hat{p}(t)}{(t - \alpha)^{m-1} \hat{q}(t)} \ , \qquad A := \frac{p(\alpha)}{\hat{q}(\alpha)} \ .$$

⌜ Für beliebiges $A \in \mathbb{C}$ gilt

$$R(t) = \frac{A}{(t - \alpha)^m} + \frac{p(t) - A\hat{q}(t)}{(t - \alpha)^m \hat{q}(t)} \ .$$

Hat A den angegebenen Wert, so ist $p(\alpha) - A\hat{q}(\alpha) = 0$. Folglich ist dann das Polynom $p_1(t) := p(t) - A\hat{q}(t)$ durch $t - \alpha$ teilbar, das heisst: Es gibt ein Polynom $\hat{p}$ mit

$$p(t) - A\hat{q}(t) = (t - \alpha) \, \hat{p}(t) \ .$$ ⌟

Damit kommen wir schon zum Hauptsatz über die **Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion**:

(9.29) *Es sei $R(t) := p(t)/q(t)$ eine rationale Funktion, und es sei (3) die Zerlegung des Nennerpolynoms in Potenzen von verschiedenen Linearfaktoren. Dann gibt es wohlbestimmte Koeffizienten*

$$A_{jk} \in \mathbb{C} \qquad (1 \leq j \leq r,\ 1 \leq k \leq m_j)$$

mit

$$R(t) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{jk}}{(t-\alpha_j)^k} \right) + p_0(t) \; ; \tag{4}$$

dabei ist p_0 der ungebrochene Teil von $R = p/q$.

⌜ Mit Hilfe von **(9.28)** lässt sich p/q rekursiv abbauen, wobei eine Darstellung der Form (4) mit einem gewissen Schlusspolynom p_0 resultiert.

Wird (4) mit dem Generalnenner $q(t)$ multipliziert, so lassen sich die Summanden $A_{jk}q(t)/(t-\alpha_j)^k$ zu einem Polynom $r^*(t)$ zusammenfassen, und es ergibt sich

$$p(t) = q(t)R(t) = p_0(t)q(t) + r^*(t) \; .$$

Nun ist aber $\deg r^* < \deg q$; aus der Eindeutigkeit der Polynomdivision folgt daher die Behauptung über p_0.

Um zu beweisen, dass die Zerlegung (4) eindeutig bestimmt ist, werden wir zeigen, dass die spezielle rationale Funktion $R_0(t) :\equiv 0$ keine nichttriviale Zerlegung besitzt. Betrachte ein festes j. Wir dürfen schon annehmen, dass für ein $k_0 \geq 1$ gilt:

$$A_{jk} = 0 \qquad (k > k_0) \; . \tag{5}$$

Multiplizieren wir die Zerlegung (4) von R_0 mit $(t-\alpha_j)^{k_0}$, so können wir schreiben:

$$0 \equiv (t-\alpha_j)^{k_0} R_0(t) = A_{jk_0} + g(t) \; ,$$

und zwar ist $\lim_{t\to\alpha_j} g(t) = 0$, da alle in $g(t)$ auftretenden Summanden mindestens einen Faktor $t - \alpha_j$ im Zähler haben. Hiernach ist $A_{jk_0} = 0$, und (5) gilt mit $k_0 - 1$ anstelle von k_0.

Alles in allem ergibt sich, dass sämtliche A_{jk} verschwinden. Damit verbleiben wir mit $R_0(t) = p_0(t)$, folglich ist p_0 das Nullpolynom. ⌟

Rechenablauf

Die von der Nullstelle $\alpha_j =: \alpha$ der Vielfachheit $m_j =: m$ herrührenden Glieder

$$\frac{A_m}{(t-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(t-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{t-\alpha}$$

der Partialbruchzerlegung bilden den zu α gehörenden **Hauptteil** von $R = p/q$. (Sinngemäss ist dann p_0 der zu ∞ gehörende Hauptteil.) Bei *einfachen* Nullstellen des Nenners liefert Lemma **(9.28)** auch gleich den Wert des einzigen vorhandenen Koeffizienten $A_1 =: A$:

(9.30) *Ist*

$$R(t) = \frac{p(t)}{(t-\alpha)\hat{q}(t)} , \qquad \hat{q}(\alpha) \neq 0 ,$$

so besitzt der zu α *gehörende Hauptteil* $\dfrac{A}{t-\alpha}$ *den Koeffizienten*

$$A := \frac{p(\alpha)}{\hat{q}(\alpha)} .$$

In Worten: Um den Koeffizienten über $t-\alpha$ zu erhalten, blende man den Faktor $t-\alpha$ aus dem Nenner von $R(t)$ aus und evaluiere das übrige an der Stelle α.

Es ist erlaubt, den Abbau des Nennerpolynoms mit dem Faktor $t-\alpha$ zu beginnen. Nach einmaliger Anwendung von **(9.28)** steht der hier angegebene Partialbruch da, und der Faktor $t-\alpha$ tritt im Nenner des unerledigten Rests nicht mehr auf.

Besitzt das Nennerpolynom mehrfache Nullstellen, so gibt es mehr zu rechnen. Allgemein hat sich das folgende Vorgehen bewährt:

1. Zuerst wird durch Polynomdivision $p : q$ der ungebrochene Teil p_0 von R bestimmt und abgespalten. Es bleibt eine **echt gebrochene** rationale Funktion übrig, das heisst: eine Funktion $r(t)/q(t)$ mit $\deg r < \deg q$. Was folgt, bezieht sich auf diesen echt gebrochenen Teil.
2. Hierauf wird die Zerlegung (3) des Nennerpolynoms q hergestellt. Treten nur einfache Nullstellen auf, so findet man die zugehörigen Hauptteile nach der Regel **(9.30)**.
3. Treten mehrfache Nullstellen auf, so schreibe man alle gemäss den auftretenden Vielfachheiten erforderlichen Hauptteile bzw. Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten an und bringe die Summe aller dieser Brüche auf den Generalnenner $q(t)$. Man erhält einen "grossen Bruch" $\tilde{r}(t)/q(t)$, und zwar erscheinen die eingeführten Koeffizienten A_{jk} in den Koeffizienten des Zählerpolynoms $\tilde{r}(t)$.
4. Nun sollte ja
$$\frac{\tilde{r}(t)}{q(t)} \equiv \frac{r(t)}{q(t)}$$
sein, und dies ist nur möglich, wenn die Zählerpolynome identisch in t übereinstimmen. Der hierfür angestrengte Koeffizientenvergleich liefert die zur Festlegung der A_{jk} notwendigen Gleichungen. Wenn man alles richtig gemacht hat, besitzt dieses (lineare) Gleichungssystem genau eine Lösung, denn die Partialbruchzerlegung ist eindeutig bestimmt.

In den meisten Anwendungsfällen besitzen die Ausgangspolynome p und q *reelle* Koeffizienten. Mit jeder echt komplexen Nullstelle $\alpha = \beta + i\gamma$, $\gamma \neq 0$, des Nennerpolynoms q ist dann $\bar{\alpha}$ eine Nullstelle derselben Vielfachheit, und in der Folge treten auch die zugehörigen Partialbrüche in Paaren auf:

$$\frac{A_k}{(t-\alpha)^k}\,, \qquad \frac{\bar{A}_k}{(t-\bar{\alpha})^k}\;.$$

⌜ Der erste hier angeschriebene Bruch gehöre zur Partialbruchzerlegung von $R = p/q$. Werden in dieser Partialbruchzerlegung alle auftretenden Konstanten konjugiert, so entsteht offenbar eine (also: *die*) Partialbruchzerlegung der Funktion $\bar{R} := \bar{p}/\bar{q}$, die nach Voraussetzung über p und q mit R übereinstimmt. Diese "neue" Partialbruchzerlegung von R enthält jedenfalls den zweiten der beiden angeschriebenen Brüche. ⌟

Die zu *einfachen* Nullstellen $\beta \pm i\gamma$ von q gehörigen Hauptteile kann man dabei wie folgt zusammenfassen:

$$\frac{A}{t-(\beta+i\gamma)} + \frac{\bar{A}}{t-(\beta-i\gamma)} = \frac{(A+\bar{A})(t-\beta)+(A-\bar{A})i\gamma}{(t-\beta)^2+\gamma^2}\;.$$

Die Zahlen $B := A+\bar{A}$ und $C := (A-\bar{A})i\gamma$ sind reell. Anstelle der komplexen Einzelbrüche darf man daher von vorneherein den reellen Ausdruck

$$\frac{B(t-\beta)+C}{(t-\beta)^2+\gamma^2}$$

in die Partialbruchzerlegung von R einstellen. B und C lassen sich allerdings nicht mit Hilfe von **(9.30)** ermitteln.

Bevor wir zu Beispielen kommen, listen wir noch die Integrale der Partialbrüche auf:

- $$\int t^k\,dt = \langle\, \frac{1}{k+1}\,t^{k+1}\,\rangle\,,$$
- $$\int \frac{dt}{(t-\alpha)^k} = \langle\, \frac{-1}{k-1}\cdot\frac{1}{(t-\alpha)^{k-1}}\,\rangle \qquad (\alpha\in\mathbb{C},\ k\geq 2)\,,$$
- $$\int \frac{dt}{t-\alpha} = \langle\, \log|t-\alpha|\,\rangle \qquad (\alpha\in\mathbb{R})\,,$$
- $$\int \frac{t-\beta}{(t-\beta)^2+\gamma^2}\,dt = \langle\, \log\sqrt{(t-\beta)^2+\gamma^2}\,\rangle \qquad (\gamma\neq 0)\,,$$
- $$\int \frac{1}{(t-\beta)^2+\gamma^2}\,dt = \langle\, \frac{1}{\gamma}\arctan\frac{t-\beta}{\gamma}\,\rangle \qquad (\gamma\neq 0)\;.$$

Die beiden letzten Formeln lassen sich zusammenfassen zu

- $$\int \frac{dt}{t-(\beta+i\gamma)} = \langle\, \log\sqrt{(t-\beta)^2+\gamma^2}\;+\;i\,\arctan\frac{t-\beta}{\gamma}\,\rangle\;.$$

Beispiele

① Es soll das unbestimmte Integral

$$J := \int \frac{t^2+1}{t^3-1}\,dt$$

berechnet werden. Der Integrand ist schon echt gebrochen, und

$$t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1) = (t-1)\bigl((t+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}\bigr)$$

ist die reelle Zerlegung des Nenners. Wir haben daher anzusetzen:

$$\frac{t^2+1}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B(t+\frac{1}{2})+C}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\ .$$

Bringen wir hier die rechte Seite auf den Generalnenner t^3-1, so erhalten wir für die Zählerpolynome folgende Relation:

$$t^2+1 \overset{!}{\equiv} A(t^2+t+1) + \bigl(B(t+\tfrac{1}{2})+C\bigr)(t-1)\ ,$$

und durch Koeffizientenvergleich ergibt sich für die Konstanten A, B, C das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 1 & = & A & + & B & & \\ 0 & = & A & - & \frac{1}{2}B & + & C \\ 1 & = & A & - & \frac{1}{2}B & - & C \end{array}\right\}$$

mit der Lösung $A = 2/3$, $B = 1/3$, $C = -1/2$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung lautet daher:

$$\frac{t^2+1}{t^3-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{3}\frac{t+\frac{1}{2}}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\ .$$

Wir können nunmehr die Formeln ▶ anwenden und erhalten wegen $\gamma = \sqrt{3}/2$:

$$J = \Bigl\langle\, \frac{1}{3}\log\bigl((t-1)^2\sqrt{t^2+t+1}\bigr) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\,\Bigr\rangle\ .$$

○

② Wir betrachten weiter das unbestimmte Integral

$$J := \int \frac{4t^5}{t^4 - 2t^2 + 1}\, dt \ .$$

Da der Integrand $\big(=: R(t)\big)$ nicht echt gebrochen ist, führen wir erst die Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (4t^5 \qquad\qquad) \ : \ (t^4 - 2t^2 + 1) \ = \ 4t \\ \hline \qquad 8t^3 - 4t \end{array}$$

aus und erhalten

$$R(t) = 4t + \frac{8t^3 - 4t}{t^4 - 2t^2 + 1} \ .$$

Weiter gilt

$$t^4 - 2t^2 + 1 = (t^2 - 1)^2 = (t-1)^2(t+1)^2 \ ; \tag{6}$$

somit lautet der Ansatz zur Partialbruchzerlegung des echt gebrochenen Teils von $R(t)$:

$$\frac{8t^3 - 4t}{t^4 - 2t^2 + 1} = \frac{A}{(t-1)^2} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t+1)^2} + \frac{D}{t+1} \ .$$

Wir bringen wiederum die rechte Seite auf den Generalnenner (6) und setzen das resultierende Zählerpolynom gleich dem Zählerpolynom links:

$$8t^3 - 4t \overset{!}{\equiv} A(t+1)^2 + B(t-1)(t+1)^2 + C(t-1)^2 + D(t+1)(t-1)^2 \ .$$

Nach Aufbereitung der rechten Seite liefert der Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 8 & = & & & B & & & + & D \\ 0 & = & A & + & B & + & C & - & D \\ -4 & = & 2A & - & B & - & 2C & - & D \\ 0 & = & A & - & B & + & C & + & D \end{array}\right\}$$

mit der Lösung $A = 1$, $B = 4$, $C = -1$, $D = 4$. Damit wird

$$R(t) = 4t + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{4}{t-1} - \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{4}{t+1} \ ,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} J = \int R(t)\, dt &= \big\langle\, 2t^2 - \frac{1}{t-1} + 4\log|t-1| + \frac{1}{t+1} + 4\log|t+1| \,\big\rangle \\ &= \big\langle\, 2t^2 - \frac{2}{t^2-1} + 4\log|t^2-1| \,\big\rangle \ . \end{aligned}$$

○

③ Für die Funktion

$$R(t) \; := \; \frac{t^2 - 2}{(t+1)t(t-1)} = \frac{A_{-1}}{t+1} + \frac{A_0}{t} + \frac{A_1}{t-1}$$

erhalten wir auf Grund der Regel **(9.30)**:

$$\begin{aligned} A_{-1} &= \frac{t^2 - 2}{t(t-1)}\bigg|_{t:=-1} = -\frac{1}{2} \; , \\ A_0 &= \frac{t^2 - 2}{(t+1)(t-1)}\bigg|_{t:=0} = 2 \; , \\ A_1 &= \frac{t^2 - 2}{(t+1)t}\bigg|_{t:=1} = -\frac{1}{2} \; . \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int R(t)\, dt &= \frac{1}{2} \int \Bigl(\frac{4}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\Bigr)\, dt \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \left(4 \log|t| - \log|t+1| - \log|t-1|\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \log\bigl(t^2/\sqrt{|t^2 - 1|}\bigr) \right\rangle \; . \end{aligned}$$

○

Weitere Ausdrücke, die sich elementar integrieren lassen

Wir behandeln zum Schluss einige Klassen unbestimmter Integrale, die sich durch geeignete Substitutionen auf Integrale von rationalen Funktionen zurückführen lassen. Im folgenden bezeichnen $R(u)$, $R_1(u)$, … rationale Funktionen der Variablen u, $R(u, v)$ eine **rationale Funktion von zwei Variablen** u **und** v. Darunter verstehen wir hier einen formalen Quotienten

$$\frac{\sum_{j,k} a_{jk} u^j v^k}{\sum_{j,k} b_{jk} u^j v^k} \; , \qquad a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R} \;\; (\text{bzw. } \in \mathbb{C}) \; ,$$

wobei nur endlich viele der a_{jk}, b_{jk} von 0 verschieden sind, darunter wenigstens ein b_{jk}. Sind $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R(u, v)$ rationale Funktionen, so ist auch die Funktion

$$\tilde{R}(t) := R\bigl(R_1(t), R_2(t)\bigr)$$

rational; es sei denn, der sich ergebende Generalnennner verschwinde identisch.

(I) Zur Berechnung eines Integrals

$$\int R(e^t)\, dt$$

substituiert man

$$e^t := u \qquad \big(\Rightarrow \quad t = \log u\,, \quad dt = \frac{du}{u}\ \big)\ . \tag{7}$$

Damit ergibt sich

$$\int R(e^t)\,dt = \int R(u)\frac{du}{u}\Big|_{u:=e^t} = \int R_1(u)\,du\Big|_{u:=e^t}\ .$$

(II) Ein Integral der Form

$$\int R(\cosh t, \sinh t)\,dt$$

lässt sich ebenfalls mit der Substitution (7) behandeln. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int R(\cosh t, \sinh t)\,dt &= \int R\left(\frac{1}{2}\big(u+\frac{1}{u}\big),\ \frac{1}{2}\big(u-\frac{1}{u}\big)\right)\ \frac{du}{u}\Big|_{u:=e^t}\\ &= \int R_1(u)\,du\Big|_{u:=e^t}\ .\end{aligned}$$

(III) Bei Integralen vom Typ

$$\int R(\cos t, \sin t)$$

würde an sich die Substitution $e^{it} := z$ $\big($vgl. (7)$\big)$ naheliegen. Um Schwierigkeiten mit dem "Logarithmus im Komplexen" zu vermeiden, wählt man aber lieber die reelle Substitution

$$\tan\frac{t}{2} := \tau \qquad \big(\Rightarrow \quad t = 2\arctan\tau\ \big)\ .$$

Damit wird

$$\cos t = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\ , \quad \sin t = \frac{2\tau}{1+\tau^2}\ , \quad dt = \frac{2d\tau}{1+\tau^2}\ ,$$

und man erhält

$$\begin{aligned}\int R(\cos t, \sin t)\,dt &= \int R\left(\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \frac{2\tau}{1+\tau^2}\right)\ \frac{2d\tau}{1+\tau^2}\Big|_{\tau:=\tan(t/2)}\\ &= \int R_1(\tau)\,d\tau\Big|_{\tau:=\tan(t/2)}\ .\end{aligned}$$

In vielen Fällen kommt man allerdings auf einfachere Weise zum Ziel. Ein Beispiel: Ist $R(u,v)$ eine *ungerade* Funktion von u, so lässt sich aus dem Ausdruck $R(\cos t, \sin t)$ ein Faktor $\cos t$ herausziehen, und es bleibt eine rationale Funktion von $\cos^2 t$ und $\sin t$ übrig. Ersetzt man darin $\cos^2 t$ durch $1-\sin^2 t$, so ergibt sich zusammen

$$R(\cos t, \sin t) = \tilde{R}(\sin t)\cos t\ ,$$

und man erhält

$$\int R(\cos t, \sin t)\, dt = \int \tilde{R}(\sin t)\cos t\, dt = \int \tilde{R}(u)\, du\Big|_{u:=\sin t}\ .$$

Sehr oft geht es um bestimmte Integrale

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt\ .$$

Hierfür stellt die komplexe Analysis eine besonders elegante Methode zur Verfügung (Stichwort: *Residuensatz*), und zwar bildet gerade die oben verworfene Substitution $e^{it} := z$ dazu den Schlüssel.

(IV) Wir betrachten weiter Integrale der Form

$$\int R\bigl(x, \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\bigr)\, dx\ .$$

Hier hängt der Integrand rational von x und der Quadratwurzel aus einem Polynom

$$q(x) := \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

zweiten Grades ab. Dabei setzen wir $\alpha \neq 0$ und $D := \beta^2 - \alpha\gamma \neq 0$ voraus; ferner dürfen wir die Möglichkeit "$q(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$" ausschliessen. Die quadratische Ergänzung

$$q(x) = \alpha\left(\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2}\right)$$

legt die Substitution

$$x + \frac{\beta}{\alpha} := y \tag{8}$$

nahe. Damit geht $q(x)$ über in die neue quadratische Funktion

$$\tilde{q}(y) = |\alpha|\bigl(\pm y^2 \pm a^2\bigr)\ , \tag{9}$$

wobei wir noch zur Abkürzung $|D|/\alpha^2 =: a^2$ gesetzt haben und im weiteren $a > 0$ annehmen wollen. Welche Vorzeichen jeweils in (9) erscheinen, hängt von den Vorzeichen von α und von D ab (zwei Minuszeichen können jedenfalls nicht auftreten).

Aus diesen Überlegungen folgt, dass sich jedes Integral (IV) durch die Substitution (8) und Herausziehen des Faktors $\sqrt{|\alpha|}$ aus $\sqrt{\tilde{q}(y)}$ auf eine der drei folgenden Formen bringen lässt:

(a) $\int R\big(y, \sqrt{y^2 + a^2}\big)\, dy$, (b) $\int R\big(y, \sqrt{y^2 - a^2}\big)\, dy$,

(c) $\int R\big(y, \sqrt{a^2 - y^2}\big)\, dy$

$\big($mit einer anderen Funktion $R(u, v)\,\big)$.

(IV)(a) Die Substitution

$$y := a \sinh t\,, \qquad \sqrt{y^2 + a^2} := a \cosh t\,, \qquad dy := a \cosh t\, dt \tag{10}$$

liefert ein Integral vom Typ (II):

$$\int R\big(u, \sqrt{u^2 + a^2}\big)\, du = \int R_1(\cosh t, \sinh t)\, dt\Big|_{t:=\operatorname{arsinh}(y/a)} .$$

Der nächste Schritt (gemeint ist: $e^t := u$) lässt sich mit (10) zu einer einzigen Substitution zusammenfassen:

$$y := \frac{a}{2}\big(u - \frac{1}{u}\big)\,, \qquad \sqrt{y^2 + a^2} := \frac{a}{2}\big(u + \frac{1}{u}\big)\,, \qquad dy := \frac{a}{2}\big(1 + \frac{1}{u^2}\big)\, du\ .$$

Damit ergibt sich in einem Zug:

$$\int R\big(y, \sqrt{y^2 + a^2}\big)\, dy = \int R_2(u)\, du\Big|_{u:=\left(y+\sqrt{y^2+a^2}\right)/a} .$$

(IV)(b) Im Intervall $y \geq a$ verwandelt

$$y := a \cosh t\,, \qquad \sqrt{y^2 - a^2} := a \sinh t\,, \qquad dy := a \sinh t\, dt$$

das gegebene Integral in eines vom Typ (II):

$$\int R\big(y, \sqrt{y^2 - a^2}\big)\, dy = \int R_1(\cosh t, \sinh t)\, dt\Big|_{t:=\operatorname{arcosh}(y/a)} .$$

Wie bei (IV)(a) lässt sich die vollständige "Rationalisierung" in einem einzigen Schritt erzielen. Wir überlassen die Details (und auch den Fall $y \leq -a$) dem Leser.

(IV)(c) Mit Hilfe der Substitution

$$y := a \sin t\,, \qquad \sqrt{a^2 - y^2} := a \cos t\,, \qquad dy := a \cos t\, dt$$

erhält man

$$\int R\big(y, \sqrt{a^2 - y^2}\big)\, dt = \int R_1(\cos t, \sin t)\, dt\Big|_{t:=\arcsin(y/a)} ,$$

und das Integral rechter Hand lässt sich nach (III) weiterbehandeln.

(V) Integrale der Form

$$\int R\big(x,\sqrt[n]{ax+b}\big)\,dx\,,\qquad a\neq 0\,,$$

werden durch "Substitution der Wurzel" rationalisiert: Mit

$$\sqrt[n]{ax+b}:=t\qquad\left(\Rightarrow\quad x=\frac{1}{a}(t^n-b),\quad dx=\frac{n}{a}t^{n-1}\,dt\right)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\int R\big(x,\sqrt[n]{ax+b}\big)\,dx&=\int R\left(\frac{1}{a}(t^n-b),t\right)\,\frac{n}{a}\,t^{n-1}\,dt\Big|_{t:=\sqrt[n]{ax+b}}\\&=\int R_1(t)\,dt\Big|_{t:=\sqrt[n]{ax+b}}\,.\end{aligned}$$

Sapienti sat. — Wir weisen zum Schluss darauf hin, dass Ausdrücke mit Quadratwurzeln aus Polynomen dritten oder vierten Grades im allgemeinen nicht elementar integrierbar sind. Man spricht in diesem Zusammenhang von **elliptischen Integralen**; denn die Aufgabe, den Umfang U einer Ellipse mit Halbachsen a und b zu berechnen, führt auf ein Integral von diesem Typ.

Aufgaben

1. Zerlege die folgenden Ausdrücke in (reelle oder komplexe) Partialbrüche:
   (a) $\dfrac{t+2}{t^2(t^2+2)}$, (b) $\dfrac{t}{t^3+t^2-t-1}$,
   (c) $\dfrac{t^4+1}{\big(t^2+1\big)^2}$, (d) $\dfrac{1}{t^6-1}$.
2. Wie lautet der Ansatz zur Partialbruchzerlegung der folgenden weiteren Ausdrücke?
   (a) $\dfrac{t^{10}}{\big(t^5+3t^3-4t\big)^2}$, (b) $\dfrac{\big(t^2-16\big)^4}{\big(t^4-16\big)^2}$.
3. Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:
   (a) $\displaystyle\int\frac{dt}{t^3+1}$, (b) $\displaystyle\int t^3\arctan t\,dt$.
4. Berechne den Flächeninhalt der von der Kurve $y^2=x^4(4+x)$ gebildeten Blase.

9.5 Uneigentliche Integrale

Unendlich lange Zwickel

Das Riemannsche Integral gibt es nur für beschränkte Funktionen f auf einem endlichen Intervall Q: Sind f oder Q unbeschränkt, so machen schon die Riemannschen Summen

$$\sum_{k=1}^{N} f(\tau_k)\mu(Q_k)$$

Mühe, und ihr Grenzwert für $\|T\| \to 0$ ist erst recht nicht definiert. Wenn wir trotzdem zum Beispiel dem unendlich langen Zwickel, der durch die Kurve $y = e^{-t}$ und die beiden Achsen begrenzt wird (Fig. 9.7.1, links), einen Flächeninhalt zuweisen wollen, so ist das nur über einen zweiten Grenzübergang möglich. Für jedes endliche $x \geq 0$ gilt

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^x = 1 - e^{-x}\ ,$$

und hier strebt die rechte Seite mit $x \to \infty$ gegen 1. Es liegt daher nahe, den Flächeninhalt dieses unendlichen Zwickels mit 1 zu veranschlagen.

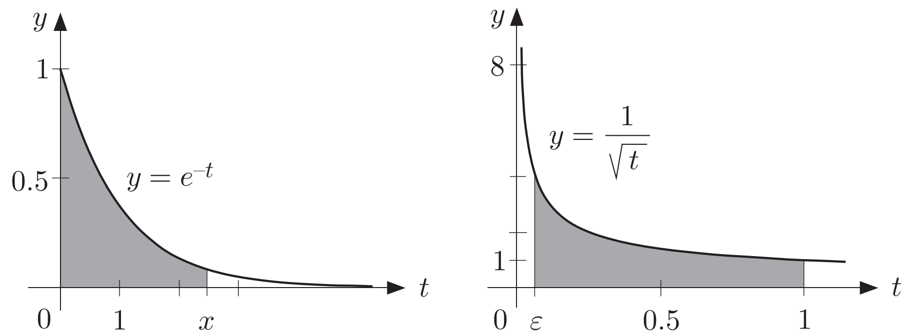

Fig. 9.7.1

In ähnlicher Weise wird durch die Kurve $y = 1/\sqrt{t}$, die t-Achse und die beiden Ordinaten $t = 0$ bzw. $t = 1$ ein unendlich langer vertikaler Zwickel begrenzt (Fig. 9.7.1, rechts). Für beliebiges $\varepsilon \in\,]\,0, 1\,]$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\,\Big|_\varepsilon^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon})\ .$$

Damit erhält auch dieser vertikale Zwickel einen sinnvollen endlichen Flächeninhalt, nämlich $\lim_{\varepsilon\to 0+} 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2$.

Allgemein: Es sei $a < b \leq \infty$, und die Funktion $f\colon [\,a,b\,[\to \mathbb{X}$ sei über jedes Intervall $[a,x]$, $\;x < b$, Riemann-integrierbar. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,dt$$

ist das **uneigentliche Integral der Funktion** f **von** a **bis** b und wird kurzer Hand mit

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

bezeichnet. Das uneigentliche Integral **konvergiert** oder **existiert**, wenn dieser Grenzwert existiert und endlich ist. Analog wird bezüglich der unteren Grenze definiert. Ein **beidseitig uneigentliches Integral** $\int_a^b f(t)dt$ $\big($zum Beispiel $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\big)$ **konvergiert**, wenn für ein $c \in \,]\,a,b\,[$ die beiden Integrale

$$\int_a^c f(t)\,dt\,, \qquad \int_c^b f(t)\,dt$$

je für sich konvergent sind.

Konvergenzkriterien

Für uneigentliche Integrale gibt es wie für unendliche Reihen Konvergenzkriterien. Zunächst zwei Standardbeispiele:

(9.31) *Das uneigentliche Integral*

(a) $$\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

ist für $\alpha \leq 1$ divergent und für $\alpha > 1$ konvergent; das uneigentliche Integral

(b) $$\int_0^1 \frac{1}{t^\beta}\,dt$$

hingegen ist für $\beta \geq 1$ divergent und für $\beta < 1$ konvergent.

⌜ Ist $\alpha \neq 1$, so gilt

$$\int_1^x t^{-\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\Big|_1^x = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1)\ .$$

Hier ist die rechte Seite mit $x \to \infty$ divergent, falls $\alpha < 1$ und konvergiert gegen $1/(\alpha - 1)$, falls $\alpha > 1$. Ferner hat man

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t\Big|_1^x = \log x \to \infty \qquad (x \to \infty)\ .$$

Soviel zu (a); in gleicher Weise wird bei (b) verfahren. ⌟

Diese Beispiele dienen als Vergleichsmaterial bei der Anwendung des folgenden allgemeinen Kriteriums:

(9.32) *Gilt* $|f(t)| \le g(t)$ *für alle* $t \in [\,a, b\,[$ *und ist das uneigentliche Integral* $\int_a^b g(t)\,dt$ *konvergent, so ist auch das uneigentliche Integral* $\int_a^b f(t)$ *konvergent.*

Umgekehrt: Gilt $f(t) \ge g(t) \ge 0$ *für alle* t *und ist* $\int_a^b g(t)\,dt$ *divergent, so ist auch* $\int_a^b f(t)\,dt$ *divergent.*

⌜ Es genügt, den ersten Teil zu beweisen. — Setzt man

$$\int_a^x f(t)\,dt =: F(x)\ , \qquad \int_a^x g(t)\,dt =: G(x)\ ,$$

so gilt für beliebige x, y mit $a \le x \le y < b$:

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le \int_x^y \bigl|f(t)\bigr|\,dt \le \int_x^y g(t)\,dt = G(y) - G(x)\ ,$$

und hieraus folgt allgemein

$$|F(y) - F(x)| \le |G(y) - G(x)| \qquad \bigl(x,\ y \in [\,a, b\,[\bigr)\ . \tag{1}$$

Gemäss Voraussetzung existiert der $\lim_{x\to b-} G(x)$. Somit genügt G nach **(4.5)** für $x \to b-$ der Cauchy-Bedingung, wegen (1) also auch F. Nach demselben Satz **(4.5)** existiert daher der $\lim_{x\to b-} F(x)$, das heisst, das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)$ ist konvergent. ⌟

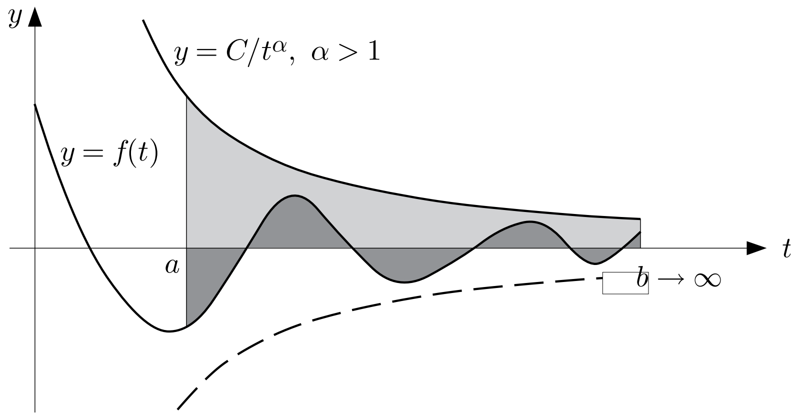

Fig. 9.7.2

Aufgrund dieser beiden Sätze lässt sich für eine Funktion $f\colon [\,a, \infty\,[\to \mathbb{X}$ zum Beispiel folgendes sagen (Fig. 9.7.2):

(9.33) *Gilt für ein $\alpha > 1$ und ein C die Abschätzung*

$$|f(t)| \le \frac{C}{t^\alpha} \qquad (t > t_0)\,,$$

so ist das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergent.

Die Gammafunktion

① Die Fakultätfunktion ist für natürliche Zahlen n definiert durch

$$0! := 1\,, \qquad n! := n \cdot (n-1)! \quad (n \ge 1)\ .$$

Es liegt nahe, nach einer "natürlichen" Fortsetzung dieser Funktion auf nichtganze Werte der unabhängigen Variablen zu fragen. Lineare Interpolation ist nicht sehr inspiriert. Jedenfalls wird man auf der Funktionalgleichung

$$x! = x \cdot (x-1)! \qquad (x > 0)$$

bestehen. Diese Bedingung reicht aber zur Festlegung der gesuchten Funktion nicht aus: Im Intervall $]-1, 0\,[$ können wir noch beliebige "Anfangswerte" wählen. Die "richtige" Fortsetzung der Fakultätfunktion ist vor allen noch möglichen durch eine gewisse Konvexitätseigenschaft ausgezeichnet (ihr Logarithmus ist konvex). In erster Linie besitzt sie aber eine einfache Integraldarstellung, der wir nun kurz nachgehen.

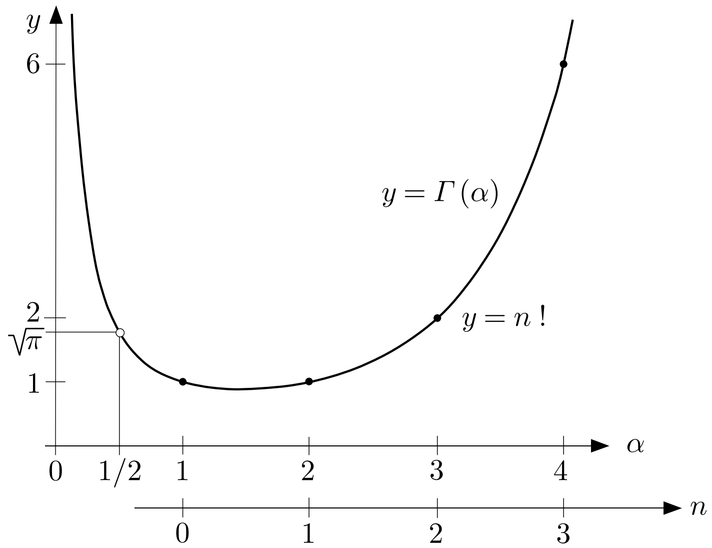

Fig. 9.7.3

Die **Gammafunktion** (Fig. 9.7.3) ist für reelle $\alpha > 0$ definiert durch

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \ .$$

Die Gammafunktion ist eine *nichtelementare* Funktion, denn das angeschriebene Integral (Integrationsvariable ist t!) lässt sich für unbestimmtes α nicht elementar auswerten. Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass dieses uneigentliche Integral existiert.

⌜ Wegen $\alpha - 1 > -1$ und **(9.31)** ist jedenfalls das Integral $\int_0^1 t^{\alpha-1}\, dt$ konvergent. Wegen

$$0 < t^{\alpha-1} e^{-t} < t^{\alpha-1} \qquad (0 < t \le 1)$$

konvergiert damit auch das Integral $\int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t}$.
Bezüglich der oberen Grenze schliessen wir folgendermassen: Zu vorgegebenem $\alpha > 0$ gibt es ein t_0 mit

$$e^t > t^{\alpha+1} \qquad (t > t_0) \ .$$

Hieraus folgt

$$t^{\alpha-1} e^{-t} < \frac{1}{t^2} \qquad (t > t_0) \,,$$

und dies beweist die Konvergenz des Integrals $\int_1^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$. ⌟

(9.34) (a) *Die Gammafunktion genügt der Funktionalgleichung*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha) \qquad (\alpha > 0) \ .$$

(b) *Für natürliche Zahlen n gilt*

$$\Gamma(n+1) = n! \ .$$

Bis auf den lästigen Shift $n \rightsquigarrow n+1$ ist demnach die Gammafunktion eine "natürliche" Lösung des angezogenen Fortsetzungsproblems.

⌜ (a) In der nachfolgenden Rechnung müssten strenggenommen Integrale von ε bis x betrachtet werden; anschliessend wäre der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$, $x \to \infty$ durchzuführen. — Es gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty \underset{\downarrow}{t^\alpha}\ \underset{\uparrow}{e^{-t}}\ dt = -t^\alpha e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha\, t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha)\,;\end{aligned}$$

denn der ausintegrierte Teil liefert wegen

$$\lim_{t\to 0+} t^\alpha e^{-t} = 0\,, \qquad \lim_{t\to\infty} t^\alpha e^{-t} = 0$$

keinen Beitrag.

(b) Es beginnt mit

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} = 1 = 0!\ .$$

Trifft (b) zu wie angeschrieben, so folgt mit (a):

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)\,n! = (n+1)!\ ,$$

und dies ist (b) mit $n+1$ anstelle von n. ⌟

Wie wir noch zeigen werden, ist $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. ○

Vergleich von Reihen mit uneigentlichen Integralen

Wir schliessen diesen Abschnitt mit dem folgenden **Integralkriterium für Reihen**. Es erlaubt, eine vorgelegte Reihe durch Vergleich mit einem uneigentlichen Integral auf Konvergenz zu prüfen.

(9.35) *Ist die Funktion $f : [\,0,\infty\,[\to \mathbb{R}$ positiv und monoton fallend, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^\infty f(k)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\,dt$ konvergiert.*

⌜ Die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n f(k)$ und die Funktion $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ sind beide monoton wachsend. Nach allgemeinen Prinzipien genügt es daher zu zeigen, dass die Folgen $(s_n)_{n\geq 0}$ und $(F(n))_{n\geq 0}$ beide beschränkt oder beide unbeschränkt sind. — Da f monoton fällt, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \qquad (k \leq t \leq k+1)$$

und somit

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)\ .$$

Wird dies über k von 0 bis $n-1$ summiert, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\,,$$

das heisst:

$$s_n - f(0) \leq F(n) \leq s_{n-1} \qquad (n \geq 1)\ .$$

Hieraus folgt, was zu zeigen war. ⌟

② Ist $\varepsilon > 0$, so ist die Funktion $f(t) := 1/t^{1+\varepsilon}$ auf $[\,1, \infty\,[$ monoton fallend, und das Integral $\int_1^\infty f(t)\,dt$ existiert. Somit sind die Reihen $\sum_{k=1}^\infty 1/k^{1+\varepsilon}$ konvergent. (Dies haben wir in Abschnitt 5.2 auf wesentlich umständlichere Art bewiesen.)

Die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k} \tag{2}$$

liegt zwischen der divergenten Reihe $\sum_{k=2}^\infty 1/k$ und den konvergenten Reihen $\sum_{k=2}^\infty 1/k^{1+\varepsilon}$. Nun ist die Funktion $f(t) := 1/(t \log t)$ auf $[\,2, \infty\,[$ monoton fallend, ferner gilt

$$\int_2^x \frac{1}{\log t}\,\frac{dt}{t} = \log\log t\Big|_2^x = \log\log x - \log\log 2 \to \infty \qquad (x \to \infty)\ .$$

Somit ist die Reihe (2) divergent. Betrachten wir jedoch anstelle von (2) die Reihen

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{1+\varepsilon}}\ , \qquad \varepsilon > 0\,, \tag{3}$$

so haben wir das folgende Vergleichsintegral:

$$\int_2^x \frac{1}{(\log t)^{1+\varepsilon}}\,\frac{dt}{t} = -\frac{1}{\varepsilon}(\log t)^{-\varepsilon}\Big|_2^x = \frac{1}{\varepsilon}\big((\log 2)^{-\varepsilon} - (\log x)^{-\varepsilon}\big)\ .$$

Da dies für $x \to \infty$ konvergiert, konvergieren auch die Reihen (3). Zwischen der divergenten Reihe (2) und den konvergenten Reihen (3) liegt die Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \log k\ \log\log k}\ .$$

Sie ist ebenfalls divergent (die Summe der ersten 10^{19} Glieder beträgt allerdings weniger als 6); die Reihen

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \log k (\log\log k)^{1+\varepsilon}}\ , \qquad \varepsilon > 0\,,$$

hingegen sind bereits wieder konvergent. So fortfahrend erhält man zwei Folgen von divergenten bzw. konvergenten Reihen, die den Satz **(5.12)** über die Nichtexistenz einer "letzten" konvergenten Reihe nocheinmal konkret illustrieren. ○

Aufgaben

1. Berechne die folgenden bestimmten (und zum Teil uneigentlichen) Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^{64} \frac{\sqrt{t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}-1}\,dt\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{2/3}+t^{3/4}}\,,$

(c) $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{\sqrt{t^2+4}+1}{\sqrt{t^2+4}-1}\,dt\,,$ (d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1+t}{\sqrt{t^2-3t+2}}\,dt\,,$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t+1}{\sqrt{t-1}+1}\,dt\,,$ (f) $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$ $(a<b)\,,$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2-t+1}\,,$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh t}\,,$

(i) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dt}{t^4-1}\,,$ (j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(3t-e^t)\,dt\,.$

2. Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\tan t}\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)dt\,,$

(c) $\displaystyle\int_0^{1/\pi} \sin\frac{1}{t}\,dt\,,$ (d) $\displaystyle\int_{1/\pi}^{\infty} \sin\frac{1}{t}\,dt\,,$

(e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}}{t}\,dt\,,$ (f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(t^2)\,dt\,.$

3. Es sei $f\colon [\,0,\infty\,[\, \to \mathbb{R}$ eine positive, monoton abnehmende Funktion. Beweise oder widerlege: Konvergiert das Integral $\int_0^\infty f(t)\,dt$, so konvergiert auch das Integral $\int_0^\infty \big(f(t)\big)^2\,dt$.

4. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}\,,$ (b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log\log k}}\,,$

(c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\log k)^2}{k^{\log\log k}}\,,$ (d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log\log k)^{\log\log k}}\,.$

5. Besitzt f in dem inneren Punkt ξ des Intervalls $[\,a,b\,]$ eine so schlimme Singularität, dass man nicht darüber hinweg integrieren kann (Beispiel: $1/t$ bei 0), so steht als Ersatz gelegentlich der **Hauptwert**

$$\mathrm{pv}\!\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{\xi-\varepsilon} f(t)\,dt + \int_{\xi+\varepsilon}^b f(t)\,dt\right)$$

zur Verfügung. — Berechne

$$\mathrm{pv}\!\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-t}{t(1+t)}\,dt\,.$$

Hinweis: Singularitätenfreie Anteile des Integranden müssen nicht der pv-Spezialbehandlung zugeführt werden!

6. (a) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ und ist $\alpha > \frac{1}{2}$, so konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} a_k \; .$$

(b) Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass (a) mit $\alpha = \frac{1}{2}$ anstelle von $\alpha > \frac{1}{2}$ nicht mehr richtig ist.