

3

Differentialrechnung

3.1 Grundbegriffe, Rechenregeln

Die Ableitung, auf neue Art betrachtet

Anmerkung: Es ist zu vermuten, daß der Leser schon von der Ableitung gehört hat. Zur Abwechslung und im Hinblick auf die mehrdimensionale Differentialrechnung beginnen wir daher die Sache etwas anders.

Es sei

$$f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}, \quad t \mapsto f(t)$$

eine \mathbb{X} -wertige (zum Beispiel reellwertige) Funktion einer reellen Variablen t , die man als “Zeit” interpretieren kann. Wir halten einen “Arbeitspunkt” $t_0 \in \text{dom}(f)$ bis auf weiteres fest und machen den von t_0 aus gemessenen Zeitzuwachs h zur neuen unabhängigen Variablen. Der zugehörige von $f(t_0) =: y_0$ aus gemessene **Wertzuwachs** Δf wird damit zu einer Funktion von h :

$$\Delta f(h) := f(t_0 + h) - f(t_0) .$$

In anderen Worten: Der Punkt (t_0, y_0) wird zum Ursprung eines $(\Delta t, \Delta y)$ -Koordinatensystems gemacht, und der Wertzuwachs Δf wird an der Stelle $\Delta t := h$ nach oben abgetragen (Fig. 3.1.1). Dieses h hat man sich betragsmäßig klein vorzustellen. Ist t_0 ein Randpunkt von $\text{dom}(f)$, so muß man sich auf $h \geq 0$ bzw. $h \leq 0$ beschränken.

Es ist ein fundamentales Faktum der Analysis, daß bei “guten” Funktionen der Wertzuwachs Δf im Limes $h \rightarrow 0$ *linear* von h abhängt: Es gibt eine Konstante A , die **momentane Zuwachsrate** von f an der Stelle t_0 , mit

$$\Delta f(h) \doteq Ah \quad (h \rightarrow 0) . \tag{1}$$

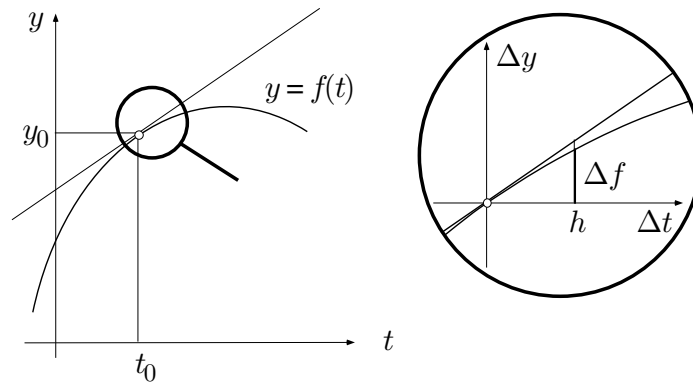


Fig. 3.1.1

Ist f vektorwertig, also Parameterdarstellung einer Kurve im \mathbb{R}^m , so ist auch Δf vektorwertig, und A ist ein Vektor, der als Momentangeschwindigkeit zur Zeit t_0 interpretiert werden kann (s.u.).

Wir müssen der Formel (1) einen präzisen Sinn erteilen. Die Aussage (1) besitzt nur dann einen tatsächlichen Gehalt, wenn der durch das Zeichen ‘ \doteq ’ implizierte Fehler

$$r(h) := \Delta f(h) - A h$$

für $h \rightarrow 0$ wesentlich (“um Größenordnungen”) kleiner ist als der rechts in (1) hingeschriebene Term $A h$. Es müßte also

$$\frac{r(h)}{|A h|} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

gelten, und das ist im Normalfall $A \neq 0$ äquivalent mit $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$).

Aufgrund dieser Überlegungen definieren wir definitiv: Die betrachtete Funktion $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ heißt an der Stelle $t_0 \in \text{dom}(f)$ **differenzierbar**, wenn es eine Konstante $A \in \mathbb{X}$ (und eine Funktion $r(\cdot)$) gibt, so daß folgendes gilt:

$$f(t_0 + h) - f(t_0) = A h + r(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad (2)$$

Die Gleichung links in (2) definiert die Funktion $r(\cdot)$, und diese Funktion unterliegt der entscheidenden Bedingung rechts. Diese Bedingung impliziert weiter

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - A = \frac{r(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

so daß wir für die momentane Zuwachsrate A die folgende Formel erhalten:

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} =: f'(t_0).$$

Der angeschriebene und mit $f'(t_0)$ bezeichnete Grenzwert des Differenzenquotienten heißt bekanntlich **Ableitung** von f an der Stelle t_0 . Die **einseitigen Ableitungen** $f'(t_0+)$ und $f'(t_0-)$ werden sinngemäß erklärt.

Im Fall einer "Funktion $y = f(x)$ " ist der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Sekante durch die Graphenpunkte $P_0 := (x_0, f(x_0))$ und $P := (x, f(x))$ (Fig. 3.1.2). Strebt x gegen x_0 , so wandert P auf dem Graphen gegen den Punkt P_0 , und die Sekante durch P_0 und P geht über in die Graphentangente im Punkt P_0 . Die Steigung dieser Tangente ist gleich dem Grenzwert der Sekantensteigungen, also gleich $f'(x_0)$.

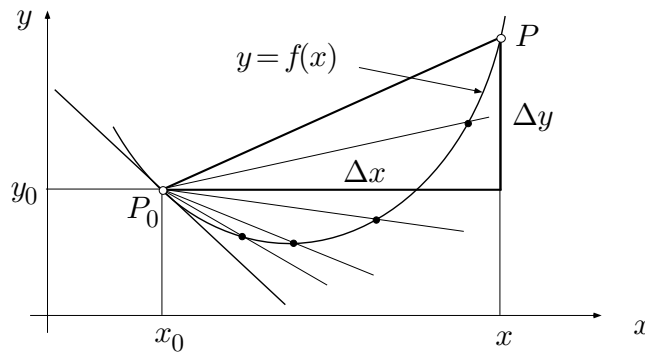


Fig. 3.1.2

① Betrachte die Funktion

$$\text{abs } t := |t| \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ist zunächst $t_0 \neq 0$, so besitzen alle hinreichend nahe bei t_0 gelegenen t dasselbe Vorzeichen wie t_0 (Fig. 3.1.3). Für diese t gilt daher

$$\text{abs } t = \text{sgn } t \cdot t = \text{sgn } t_0 \cdot t.$$

Damit erhalten wir für den Differenzenquotienten $m(\cdot)$ die Formel

$$m(t) := \frac{\text{abs } t - \text{abs } t_0}{t - t_0} = \frac{\text{sgn } t_0 \cdot t - \text{sgn } t_0 \cdot t_0}{t - t_0} = \text{sgn } t_0,$$

und es folgt

$$\text{abs}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} m(t) = \text{sgn } t_0 \quad (t_0 \neq 0).$$

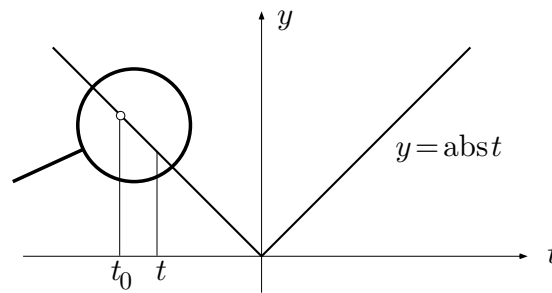


Fig. 3.1.3

Ist jedoch $t_0 = 0$, so hat man

$$m(t) = \frac{|t| - |0|}{t - 0} = \operatorname{sgn} t \quad (t \neq 0).$$

Der $\lim_{t \rightarrow 0} m(t)$ existiert nicht; folglich ist abs an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Hingegen existieren dort die einseitigen Ableitungen

$$\operatorname{abs}'(0+) = \operatorname{sgn}(0+) = 1, \quad \operatorname{abs}'(0-) = \operatorname{sgn}(0-) = -1. \quad \bigcirc$$

Die Punkte $t_0 \in \operatorname{dom}(f)$, in denen f differenzierbar ist, bilden den Definitionsbereich der Funktion

$$f' : t \mapsto f'(t),$$

genannt **Ableitung** von f . Die Ableitung f' gibt für jeden "Zeit"punkt $t \in \operatorname{dom}(f')$ die momentane Zuwachsrate der Ausgangsfunktion f an. Anstelle von f' sind auch Bezeichnungen wie \dot{f} , $\frac{df(x)}{dx}$, Df und andere in Gebrauch.

Bsp: $\operatorname{abs}' = \operatorname{sgn} \upharpoonright_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$.

② Für die Exponentialfunktion hat man

$$m(t) := \frac{e^t - e^{t_0}}{t - t_0} = e^{t_0} \frac{e^{t-t_0} - 1}{t - t_0}$$

und somit nach (2.20)(a):

$$\exp'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} m(t) = e^{t_0}.$$

Da dies für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ zutrifft, gilt

$$\exp' = \exp \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} e^t = e^t, \quad (3)$$

das heißt: Die Exponentialfunktion wird durch Differentiation reproduziert.

○

Exkurs über die o -Notation

Bevor wir hier weitermachen, wenden wir uns nocheinmal den Formeln (2) zu. Es geht dort um die Größenordnung einer gewissen Fehlerfunktion $r(h)$ beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$. Mit Hilfe des **Landauschen o -Symbols** lassen sich derartige Sachverhalte in besonders kompakter Weise ausdrücken; man muß sich allerdings ein wenig an diese o -Schreibweise gewöhnen.

Also: Da der Quotient $\frac{r(h)}{h}$ mit $h \rightarrow 0$ gegen 0 geht, sagt man, $r(h)$ sei "klein oh von h ", und schreibt

$$r(h) = o(h) \quad (h \rightarrow 0) .$$

Der Term $o(h)$ bezeichnet hier *nicht* einen Funktionswert an der Stelle h , sondern erklärt $r(\cdot)$ zu einer Funktion, von der man folgendes weiß: Dividiert man diese Funktion durch h , so geht der Quotient mit $h \rightarrow 0$ gegen 0.

Allgemein: Es ist die Rede von einem bestimmten Grenzübergang $x \rightarrow \xi$. Ein Term $o(p(x))$ in einer Gleichung bezeichnet eine letzten Endes durch diese Gleichung definierte Funktion $R(x)$, von der man aber weiß, daß sie für $x \rightarrow \xi$ von wesentlich kleinerer Größenordnung ist als $p(x)$, oder genau: daß der Quotient $R(x)/p(x)$ gegen 0 geht. In anderen Worten: Die nennerfreie Formel

$$f(x) = g(x) + o(q(x)) \quad (x \rightarrow \xi)$$

ist äquivalent mit dem Sachverhalt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - g(x)}{q(x)} = 0 .$$

Bsp:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= o(1) \quad (t \rightarrow \infty) , \\ t^{1000} &= o(e^t) \quad (t \rightarrow \infty) , \\ t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 &= t^n (1 + o(1)) \quad (t \rightarrow \infty) , \\ \frac{3t^2 - 5t - 7}{t + 1} &= 3t - 8 + o(1) \quad (t \rightarrow \infty) , \\ \sqrt{1 + t} &= 1 + \frac{t}{2} + o(t) \quad (t \rightarrow 0) . \end{aligned}$$

(Die zweitletzte Beziehung ergibt sich durch Ausführung der Polynomdivision; die letzte mag der Leser selber verifizieren, wenn er diesen Abschnitt zu Ende gelesen hat.)

Wegen $A = f'(t_0)$ sind wir damit in der Lage, den Inhalt von (2) in der folgenden prägnanten Formel auszudrücken:

$$\boxed{f(t_0 + h) - f(t_0) = f'(t_0) h + o(h) \quad (h \rightarrow 0)} \quad (4)$$

Geschwindigkeit und Tangentenvektor

Wird die unabhängige Variable t einer Parameterdarstellung $\gamma: t \mapsto \mathbf{x}(t)$ als “Zeit” interpretiert, so stellt der Ableitungsvektor eine Geschwindigkeit dar: Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} := \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)}{t - t_0} \quad (t > t_0)$$

ist die “totale Ortsveränderung im Verhältnis zur insgesamt dafür benötigten Zeit” oder eben die **mittlere Geschwindigkeit** im Zeitintervall $[t_0, t]$, und der für $t \rightarrow t_0+$ resultierende Grenzwert $\mathbf{x}'(t_0)$ ist die **Momentangeschwindigkeit** oder einfach die **Geschwindigkeit** des laufenden Punktes zum Zeitpunkt t_0 .

Ist $\mathbf{x}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, so zeigt $\mathbf{x}'(t_0)$ in die Richtung der Kurventangente an der Stelle t_0 . Um das einzusehen, betrachten wir die normierten Sekantenvektoren $\frac{\Delta \mathbf{x}}{|\Delta \mathbf{x}|}$ für $t \rightarrow t_0+$ (Fig. 3.1.4). Mit $t - t_0 =: h$ ergibt sich aufgrund von (4):

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{|\Delta \mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{x}'(t_0)h + o(h)}{|\mathbf{x}'(t_0)h + o(h)|} = \frac{\mathbf{x}'(t_0) + o(1)}{|\mathbf{x}'(t_0) + o(1)|}.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\Delta \mathbf{x}}{|\Delta \mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{x}'(t_0)}{|\mathbf{x}'(t_0)|},$$

womit der normierte Geschwindigkeitsvektor als Grenzlage der Sekanteneinheitsvektoren, mithin als Tangenteneinheitsvektor identifiziert ist.

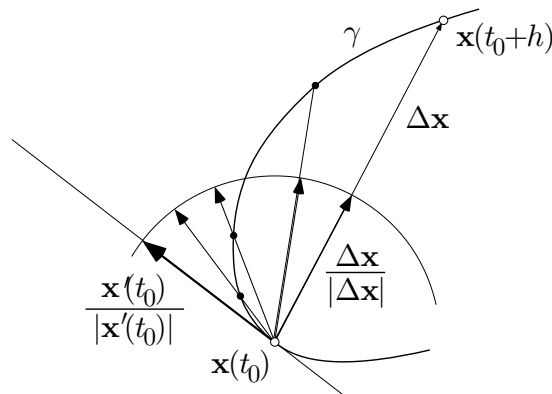


Fig. 3.1.4

② Betrachte zum Beispiel die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) := t\mathbf{a} + t^2\mathbf{b} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Es ergibt sich

$$\frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)}{t - t_0} = \frac{(t - t_0)\mathbf{a} + (t^2 - t_0^2)\mathbf{b}}{t - t_0} = \mathbf{a} + (t + t_0)\mathbf{b}$$

und somit

$$\mathbf{x}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{a} + (t + t_0)\mathbf{b}) = \mathbf{a} + 2t_0\mathbf{b} .$$

Sind die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} linear unabhängig, so ist $\mathbf{x}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$, und die Bahnkurve (eine Parabel) besitzt in allen Punkten eine Tangente. Ist aber zum Beispiel $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, so besitzt die Bahnkurve (eine zweimal durchlaufene Halbgerade) im Ursprung einen Rückkehrpunkt. \bigcirc

Ableitungsregeln

(3.1)

$$(a) \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \implies \mathbf{f}' = (f'_1, f'_2, f'_3),$$

insbesondere: $(u + iv)' = u' + i v'$;

$$(b) \quad \begin{aligned} (f + g)' &= f' + g' , \\ (\lambda f)' &= \lambda f' \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \in \mathbb{C}) ; \end{aligned}$$

$$(c) \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

(analog für alle in den Grundstrukturen vorhandenen Produkte);

$$(d) \quad (f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} ;$$

$$(e) \quad \frac{d}{dt} g(f(t)) = g'(f(t)) \cdot f'(t) \quad \textbf{(Kettenregel)};$$

(f) Ist $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ injektiv und $g := f^{-1}$ die Umkehrfunktion, so gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

in allen Punkten y , für die die rechte Seite definiert ist.

□ Wir behandeln nur (c), (e) und (f). Dabei genügt es, jeweils eine feste Stelle t_0 zu betrachten, für die die rechte Seite der zu beweisenden Formel

erklärt ist. Wir machen wiederholt von dem folgenden Prinzip Gebrauch: Ist f an der Stelle t_0 differenzierbar, so ist die sogenannte **Trendfunktion**

$$m(t) := m_{f,t_0}(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} & (t \neq t_0), \\ f'(t_0) & (t = t_0) \end{cases}$$

an der Stelle t_0 stetig, und es gilt dann für alle $t \in \text{dom}(f)$:

$$f(t) - f(t_0) = m(t)(t - t_0). \quad (5)$$

Umgekehrt: Besteht eine (nennerfreie!) Beziehung der Form (5) mit einer bei t_0 stetigen Funktion $m(\cdot)$, so ist f an der Stelle t_0 differenzierbar, und es gilt $f'(t_0) = m(t_0)$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(t)g(t) - f(t_0)g(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} g(t) + f(t_0) \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \\ &\rightarrow f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0) \quad (t \rightarrow t_0), \end{aligned}$$

wobei wir stillschweigend benutzt haben, daß eine an der Stelle t_0 differenzierbare Funktion dort auch stetig ist (dies folgt aus (5)).

(e) Setzen wir zur Abkürzung $f(t) =: y$, $f(t_0) =: y_0$, so gilt

$$\begin{aligned} g(f(t)) - g(f(t_0)) &= g(y) - g(y_0) = m_{g,y_0}(y) \cdot (y - y_0) \\ &= m_{g,y_0}(y) \cdot (f(t) - f(t_0)) \\ &= m_{g,y_0}(f(t)) \cdot m_{f,t_0}(t) \cdot (t - t_0) =: m(t) \cdot (t - t_0). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich, daß die Funktion $m(\cdot)$ an der Stelle t_0 stetig ist. Somit besitzt $g \circ f$ nach dem oben angeführten Prinzip an der Stelle t_0 die Ableitung

$$m(t_0) = m_{g,y_0}(f(t_0)) \cdot m_{f,t_0}(t_0) = g'(f(t_0))f'(t_0).$$

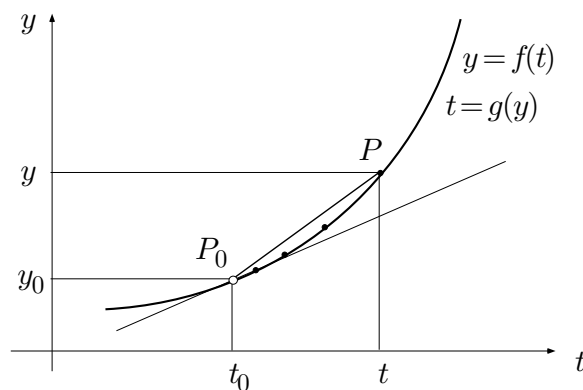


Fig. 3.1.5

(f) Wir verzichten auf einen richtiggehenden Beweis und verweisen auf die Figur 3.1.5. Es gilt

$$g'(y_0) \doteq \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{t - t_0}{f(t) - f(t_0)} \doteq \frac{1}{f'(t_0)}. \quad \lrcorner$$

② (Forts.) Es sei f eine reell- oder komplexwertige Funktion und

$$F(t) := e^{f(t)}.$$

Dann ist

$$F'(t) = \exp'(f(t)) \cdot f'(t) = \exp(f(t)) \cdot f'(t).$$

Es gilt daher

$$\frac{d}{dt} e^{f(t)} = f'(t) \cdot e^{f(t)}. \quad (6)$$

(Das Vertrauen in die Kraft des Kalküls wird hier etwas strapaziert. Die Überlegungen, die zu $\exp' = \exp$ geführt haben, lassen sich aber “im Komplexen” nachvollziehen.) \circ

In diesem Beispiel ist die Kettenregel als Regel für das Ableiten von zusammengesetzten Funktionstermen benutzt worden; sie besitzt aber auch einen geometrischen Gehalt, der in der Fig. 3.1.6 dargestellt ist.

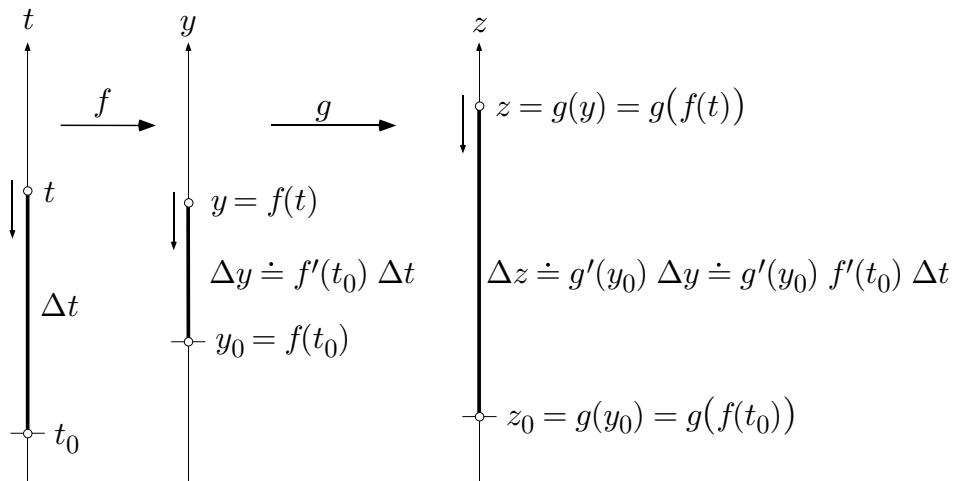


Fig. 3.1.6

Die Ableitungen der elementaren Grundfunktionen

Wir geben nun (zum Teil ohne Beweis) die Ableitungen der elementaren Grundfunktionen an. Die Rechenregeln setzen uns dann instand, die Ableitung irgendeiner elementaren Funktion zu berechnen.

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} t^k = k t^{k-1} \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$

□ Für $f(t) := 1$ und $g(t) := t$ ist

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \equiv 0, \quad \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \equiv 1 ;$$

es folgt $\frac{d}{dt} 1 \equiv 0$, $\frac{d}{dt} t \equiv 1$. Weiter ergibt sich (vollständige Induktion nach $k \geq 0$):

$$\frac{d}{dt} t^{k+1} = \frac{d}{dt} (t \cdot t^k) = 1 \cdot t^k + t \cdot (k t^{k-1}) = (k+1) t^k .$$

Negative Exponenten werden mit der Quotientenregel auf den schon behandelten Fall zurückgeführt. ┘

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dy} \log y = \frac{1}{y} .$$

□ Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Folglich gilt nach **(3.1)**(f) und (3):

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log y)} = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y} . \quad \text{┘}$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} t^\alpha = \alpha t^{\alpha-1} \quad (t > 0, \alpha \in \mathbb{R}) .$$

□ Nach Definition der allgemeinen Potenz und (6) ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} t^\alpha &= \frac{d}{dt} e^{\alpha \log t} = \alpha \log'(t) e^{\alpha \log t} \\ &= \alpha \cdot \frac{1}{t} \cdot t^\alpha = \alpha t^{\alpha-1} . \end{aligned} \quad \text{┘}$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} \cosh t = \sinh t, \quad \frac{d}{dt} \sinh t = \cosh t .$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dy} \operatorname{arcosh} y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}, \quad \frac{d}{dy} \operatorname{arsinh} y = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} .$$

┌ Ist $\operatorname{arsinh} y = t$, so ist $\sinh t = y$ und folglich nach dem hyperbolischen Pythagoras $\cosh t = \sqrt{y^2 + 1}$. Hiermit ergibt sich

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arsinh} y = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh} y)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} y)} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} . \quad \lrcorner$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t, \quad \frac{d}{dt} \sin t = \cos t .$$

┌ Wird die Identität

$$\cos t + i \sin t = e^{it}$$

abgeleitet, so ergibt sich nach (6):

$$\begin{aligned} \cos' t + i \sin' t &= i e^{it} = i (\cos t + i \sin t) \\ &= -\sin t + i \cos t . \end{aligned} \quad \lrcorner$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dy} \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} .$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} \tan t = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \frac{d}{dt} \tanh t = 1 - \tanh^2 t .$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1 + y^2}, \quad \frac{d}{dy} \operatorname{artanh} y = \frac{1}{1 - y^2} .$$

Dies sollte genügen. Beachte, daß transzendente Funktionen, zum Beispiel \arcsin oder \log , durchaus algebraische oder sogar rationale Funktionen als Ableitungen haben können.

Aufgaben

1. (M) Berechne die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \log \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}, & \text{(b)} \quad \sqrt{\frac{\alpha + \beta t}{\alpha - \beta t}} \quad (\alpha, \beta > 0), \\ \text{(c)} \quad t^{1/3}(1 - t)^{2/3}(1 + t)^{1/2}, & \text{(d)} \quad t^t, \\ \text{(e)} \quad (\log \tan t)^{-1/3}, & \text{(f)} \quad \operatorname{artanh} \sqrt{1 - t^2}. \end{array}$$

Bestimme in jedem Fall den Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ sowie den Definitionsbereich D' der Ableitung.

2. Berechne die hundertste Ableitung der Funktion $f(t) := t^2 \sin(2t)$.

3.2 Extrema

Maximum vs. Supremum

Es sei $B \subset \mathbb{X}$ ein vorgegebener Bereich (zum Beispiel ein Intervall, eine Halbebene, ein Würfel, eine Sphäre) und

$$f : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

eine reellwertige Funktion. Wir suchen nach dem “Maximum von f auf B ”. Nun ist die Wertmenge

$$W := \{f(x) \mid x \in B\}$$

in aller Regel eine unendliche Menge, und da ist es gar nicht sicher, ob es überhaupt einen größten Wert gibt.

Betrachte für einen Moment eine ganz beliebige nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$. Gibt es ein $s \in M$ mit $s \geq y$ für alle $y \in M$, so ist s das **maximale Element** von M und wird mit $\max M$ bezeichnet. Analog ist $\min M$ erklärt.

Bsp: Jede endliche Menge besitzt sowohl ein minimales wie ein maximales Element. Die Menge $[0, 1[$ besitzt kein maximales, die Menge $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ kein minimales Element.

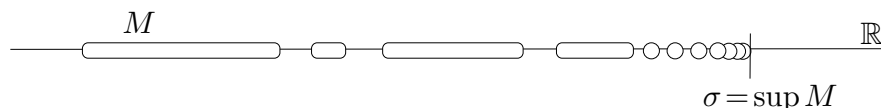


Fig. 3.2.1

Das **Supremum** $\sup M =: \sigma$ der Menge M ist folgendermaßen charakterisiert (Fig. 3.2.1): Es gibt in M keine Zahlen $> \sigma$; aber für jede Toleranz $\varepsilon > 0$ gibt es in M Zahlen $> \sigma - \varepsilon$. In anderen Worten: Das Supremum wird innerhalb M beliebig genau erreicht, vielleicht sogar angenommen (nämlich dann, wenn M ein maximales Element besitzt), aber sicher nicht überschossen. Ist M nach oben unbeschränkt, so wird $\sup M := \infty$ gesetzt. — Analog wird das **Infimum** $\inf M$ erklärt.

Es ist eine Grundtatsache der Analysis, daß $\sup M$ und $\inf M$ für jede nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$ vorhanden und eindeutig bestimmt sind. Das hat mit der sogenannten *Vollständigkeit* von \mathbb{R} zu tun und wäre mit Hilfe einer Axt zu beweisen (siehe den Schluß von Abschnitt 1.4).

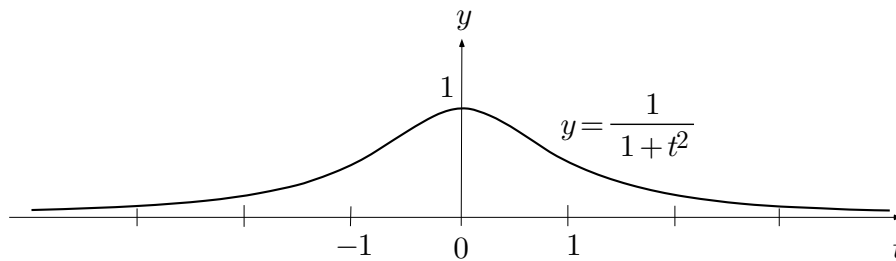


Fig. 3.2.2

Bezüglich unserer Funktion $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ können wir also davon ausgehen, daß jedenfalls die beiden Größen

$$\inf W = \inf_{x \in B} f(x) \quad (\geq -\infty), \quad \sup W = \sup_{x \in B} f(x) \quad (\leq \infty)$$

vorhanden und wohlbestimmt sind.

$$\begin{aligned} \text{Bsp:} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} &= 1, & \inf_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} &= 0 & (\text{Fig. 3.2.2}); \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} e^t &= \infty, & \inf_{0 < t < \pi/4} \cos t &= 1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Besitzt die Wertmenge W ein maximales Element, das heißt: Wird das Supremum tatsächlich angenommen, so spricht man vom **(globalen) Maximum** von f auf B und schreibt $\max_{x \in B} f(x)$ anstelle von $\sup_{x \in B} f(x)$. Es gibt dann mindestens einen Punkt $\xi \in B$ mit

$$f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in B.$$

Ein derartiger Punkt ξ ist eine **(globale) Maximalstelle** von f auf B . Die Menge dieser globalen Maximalstellen (eine Teilmenge des Definitionsbereichs B !) bezeichnen wir mit $S_{\max}(f \upharpoonright B)$ oder einfach mit S_{\max} . — Analog werden das **(globale) Minimum** $\min_{x \in B} f(x)$ und **(globale) Minimalstellen** erklärt.

$$\begin{aligned} \text{Bsp:} \quad \max_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} &= 1, & S_{\max} &= \{0\}, & S_{\min} &= \emptyset; \\ \min_{t \in \mathbb{R}} \cos t &= -1, & S_{\min} &= \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Der Satz vom Maximum

Maximal- und Minimalstellen werden im Sammelbegriff **Extremalstellen** zusammengefaßt. Ob in einer konkreten Situation Extremalstellen vorhanden sind, hängt von f und vom Bereich B ab. Wir benötigen den folgenden Begriff: Eine Menge $B \subset \mathbb{X}$ ist **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist, das heißt: wenn der Rand ∂B zu B gehört und B ganz "im Endlichen" liegt.

Der folgende Satz ist fundamental:

(3.2) *Ist $B \subset \mathbb{X}$ kompakt und $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion, so nimmt f auf B ein globales Maximum an.*

□ Beweisidee: Nach Definition des Supremums

$$\sup_{x \in B} f(x) =: \sigma \quad (\leq \infty)$$

gibt es eine Folge x in B mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \sigma . \quad (1)$$

Da B beschränkt ist, besitzt diese Folge einen Häufungspunkt ξ , und da B abgeschlossen ist, muß $\xi \in B$ sein (Fig. 3.2.3). Man kann nun eine Teilfolge

$$x' : n \mapsto x'_n := x_{k_n}$$

auswählen, die tatsächlich gegen ξ konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \xi . \quad (2)$$

Für diese Teilfolge gilt immer noch (1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \sigma . \quad (1')$$

Da f stetig ist, liefern (2) und (1') im Verein mit Satz **(2.10)**:

$$f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \sigma . \quad \square$$

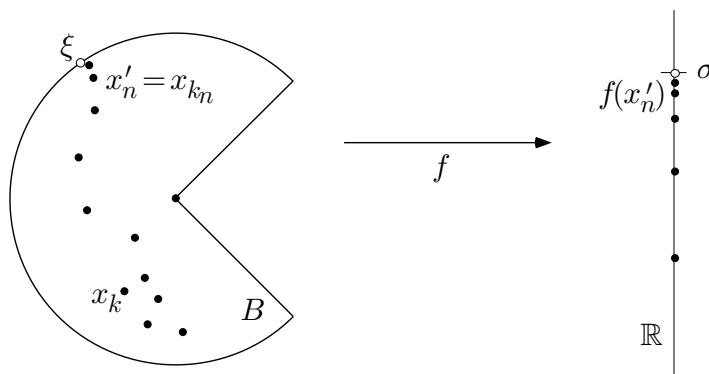


Fig. 3.2.3

Dieser Beweis ist (im Gegensatz zum Beweis des Zwischenwertsatzes (2.6)) nicht konstruktiv, das heißt: Er liefert keine Methode, im Anwendungsfall eine Maximalstelle ξ tatsächlich zu finden. Das hängt damit zusammen, daß der Maximalwert σ sehr genau bestimmt ist, der Ort, wo dieses Maximum angenommen wird, aber gar nicht. Es kommt aber noch schlimmer: Eine kleine Änderung der Funktion f oder des Bereichs B ändert den Maximalwert nur wenig, kann aber eine radikale Änderung der Maximalstelle(n) bewirken. Ähnliches ist zu sagen, wenn die "Problemdata" f und B mit Ungenauigkeiten behaftet sind.

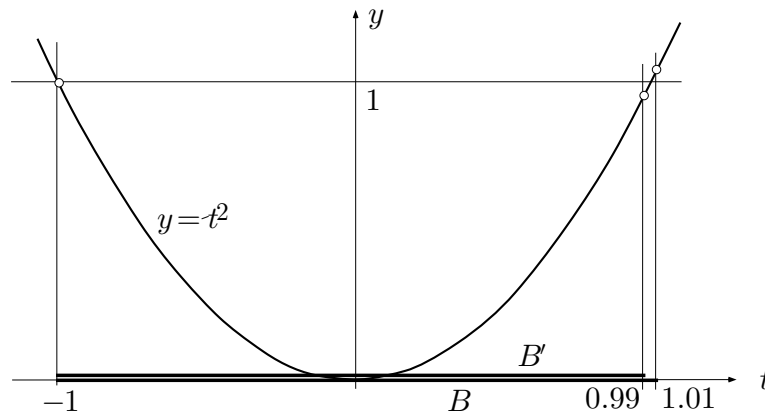


Fig. 3.2.4

① Betrachte die Funktion $f(t) := t^2$ auf dem Intervall $B := [-1, 1.01]$, siehe die Fig. 3.2.4. Es ist

$$\max_{t \in B} f(t) = 1.01^2, \quad S_{\max}(f \upharpoonright B) = \{1.01\}.$$

Wird B ganz wenig abgeändert zu $B' := [-1, 0.99]$, so ergibt sich

$$\max_{t \in B'} f(t) = 1, \quad S_{\max}(f \upharpoonright B') = \{-1\}.$$

○

Dieser Sachverhalt hat schwerwiegende praktische Konsequenzen im täglichen Leben: Wenn sich ein Individuum unter gegebenen Bedingungen optimal verhält, so kann schon eine minimale Veränderung dieser Bedingungen dieses Individuum dazu veranlassen, sein Verhalten radikal zu ändern. Das wird bei 10^6 Individuen, die den gleichen Verhältnissen unterworfen sind, bestimmt an einem andern Ort Probleme verursachen; dabei ist der "Gewinn" für den Einzelnen und auch im Gesamten nur bescheiden.

Lokale Extremalstellen

Neben den globalen, das heißt: auf ganz $\text{dom}(f) =: B$ bezüglichen Extremalstellen werden **lokale Extremalstellen** wie folgt erklärt: Die Funktion $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ ist im Punkt $\xi \in B$ **lokal maximal**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$x \in B \quad \wedge \quad |x - \xi| < \delta \quad \implies \quad f(\xi) \geq f(x) .$$

Gemeint ist: Weit weg von ξ darf f schon noch größere Werte annehmen. Ist f an der Stelle ξ global maximal, so ist f dort erst recht lokal maximal.

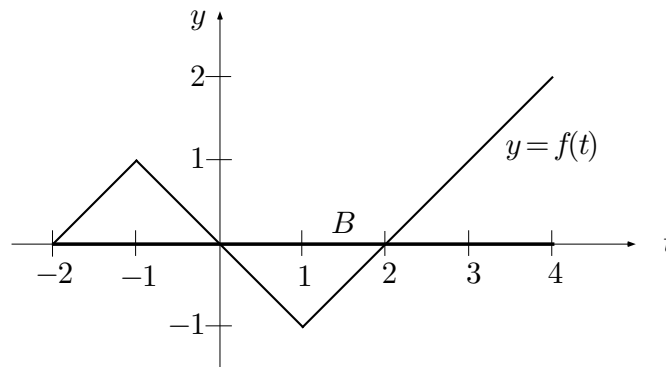


Fig. 3.2.5

② Es sei $B := [-2, 4]$ und f die in der Figur 3.2.5 dargestellte Funktion. Dann ist f an den Stellen -1 und 4 lokal maximal, bei 4 global maximal, an den Stellen -2 und 1 lokal minimal und bei 1 global minimal. \circ

Was hat das alles mit Differentialrechnung zu tun? Antwort: Die Differentialrechnung bringt alle lokalen Extremalstellen im Inneren von B zum Vorschein. Vorderhand müssen wir uns natürlich auf Funktionen *einer* unabhängigen Variablen t beschränken.

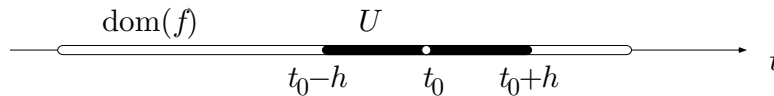


Fig. 3.2.6

Es sei also $f: \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und t_0 ein innerer Punkt von $\text{dom}(f)$ (Fig. 3.2.6). Es gibt dann ein $h > 0$ mit $]t_0 - h, t_0 + h[\subset \text{dom}(f)$.

Der Punkt t_0 heißt **kritischer** oder **stationärer Punkt** von f , wenn $f'(t_0) = 0$ ist. Aufgrund von 3.1.(4) gilt dann

$$f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0) = o(t - t_0) \quad (t \rightarrow t_0).$$

Der Zuwachs von f ist also für $t \rightarrow t_0$ von kleinerer Größenordnung als der Zuwachs $t - t_0$ der unabhängigen Variablen, daher der Name "stationär". Die Menge der kritischen Punkte von f auf B bezeichnen wir mit $S_{\text{krit}}(f \upharpoonright B)$ oder einfach mit S_{krit} .

③ Wir betrachten die Funktion

$$f(t) := \sin t + \frac{1}{2} \sin(2t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(Fig. 3.2.7) mit der Ableitung

$$\begin{aligned} f'(t) &= \cos t + \cos(2t) = \cos t + (2 \cos^2 t - 1) \\ &= (2 \cos t - 1)(\cos t + 1). \end{aligned}$$

Die kritischen Punkte t müssen daher der Gleichung $\cos t = \frac{1}{2}$ oder der Gleichung $\cos t = -1$ genügen. Es ergibt sich

$$S_{\text{krit}} = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi \right\}.$$

○

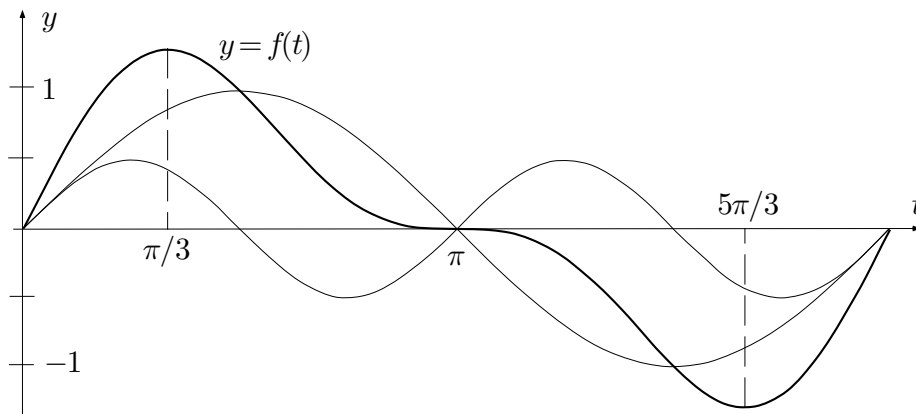


Fig. 3.2.7

Die Grundlage zur Lösung von allen praktischen Extremalaufgaben ist bekanntlich enthalten in dem folgenden Lemma:

(3.3) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und t_0 ein innerer Punkt von $\text{dom}(f)$. Ist f an der Stelle t_0 lokal extremal, so ist t_0 notwendigerweise ein kritischer Punkt von f , das heißt, es gilt $f'(t_0) = 0$.

□ Es gilt

$$f(t) - f(t_0) = m(t)(t - t_0),$$

dabei bezeichnet $m(\cdot)$ die Trendfunktion von f an der Stelle t_0 . Ist zum Beispiel $f'(t_0) = m(t_0) > 0$, so ist $m(t)$ in einer ganzen Umgebung $U :=]t_0 - h, t_0 + h[$ des Punktes t_0 (Fig. 3.2.6) positiv, und wir haben

$$\forall t \in U: \quad \text{sgn}(f(t) - f(t_0)) = \text{sgn}(t - t_0).$$

Hiernach nimmt $f(t) - f(t_0)$ in U beiderlei Vorzeichen an, und f kann an der Stelle t_0 weder lokal maximal noch lokal minimal sein. □

Bestimmung der globalen Extrema

Das Lemma (3.3) erhält nun folgende anwendungsorientierte Form:

(3.4) Die stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei jedenfalls im Inneren von $[a, b]$ differenzierbar und besitze dort endlich viele kritische Punkte t_1, \dots, t_r . Dann ist

$$S_{\max}(f \upharpoonright [a, b]) \subset \{a, b, t_1, \dots, t_r\} \quad (1)$$

und

$$\max_{a \leq t \leq b} f(t) = \max\{f(a), f(b), f(t_1), \dots, f(t_r)\}.$$

□ Nach Satz (3.2) wird das Maximum tatsächlich angenommen, und zwar in einem der Punkte a, b oder in einem inneren Punkt ξ des Intervalls $[a, b]$. Ein derartiger Punkt ξ muß nach dem Lemma (3.3) ein kritischer Punkt von f sein, denn sonst wäre die Funktion dort nichteinmal lokal maximal. Die "Kandidatenliste" rechter Hand in (1) enthält daher alle Punkte des Intervalls $[a, b]$, die als globale Maximalstelle überhaupt in Frage kommen, und der tatsächliche Maximalwert von f läßt sich durch Wertvergleich in diesen Punkten ermitteln. □

Beachte: Falls nur der Maximalwert $\max_{a \leq t \leq b} f(t)$ und die Menge S_{\max} der Maximalstellen gefragt sind, ist es nach diesem Satz nicht nötig, zweite Ableitungen auszurechnen. Etwas anderes ist es, wenn zum Beispiel für eine Graphendiskussion oder für Stabilitätsbetrachtungen der Charakter der einzelnen kritischen Punkte untersucht werden soll (s.u.).

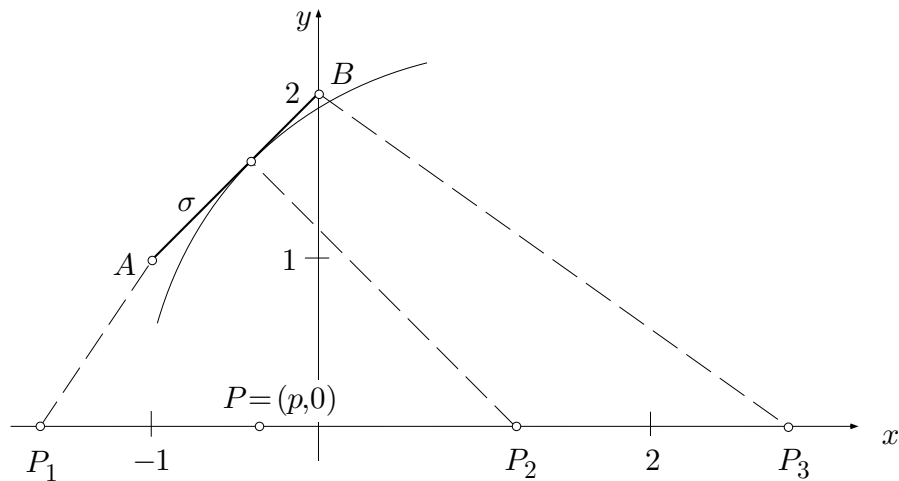


Fig. 3.2.8

- ④ Es sei σ die Verbindungsstrecke der beiden Punkte $A := (-1, 1)$, $B := (0, 2)$, und es sei $P := (p, 0)$ ein Punkt auf der x -Achse (Fig. 3.2.8). Welcher Punkt von σ liegt P am nächsten?

Der Figur entnimmt man ohne weiteres die folgende Lösung dieser Aufgabe: Ist $p \leq 0$, so liegt der Endpunkt A am nächsten, und ist $p \geq 2$, so liegt B am nächsten. Für $0 < p < 2$ ist der nächste Punkt ein innerer Punkt von σ , nämlich der Fußpunkt des Lotes von P auf σ .

Was können wir hieraus lernen? Unsere Aufgabe enthält einen Parameter p . Der kürzeste Abstand von P zu σ hängt natürlich "zahlenmäßig" von p ab, aber nicht nur das: Auch die *Gestalt* der Extreimalsituation hängt von p ab und verändert sich an bestimmten Stellen der p -Achse (bei $p = 0$ und $p = 2$) radikal. Damit sind wir auf ein ziemlich universelles "Katastrophenprinzip" gestoßen: Enthält ein mathematisches Modell Parameter p, λ, \dots , so muß man von vorneherein damit rechnen, daß für gewisse spezielle Werte der Parameter die Gesamtsituation umkippt zu einer vollständig neuen Gestalt.

Die rechnerische Behandlung der obigen Aufgabe überlassen wir dem Leser. ○

- ⑤ Wir betrachten die mit λ parametrisierte Funktionenschar

$$f_\lambda(t) := t^3 - 3\lambda^2 t + 4\lambda$$

auf dem t -Intervall $[-2, 2]$. Jedes f_λ nimmt auf diesem Intervall ein globales Maximum M_λ und ein globales Minimum m_λ an. Diese beiden Größen sollen nun (als Funktionen von λ) bestimmt werden. Hierzu müssen wir für jedes feste $\lambda \in \mathbb{R}$ eine "Kandidatenliste" herstellen.

Zunächst ist

$$f_\lambda(-2) = -8 + 6\lambda^2 + 4\lambda =: \phi_1(\lambda), \quad f_\lambda(2) = 8 - 6\lambda^2 + 4\lambda =: \phi_2(\lambda).$$

Ferner gilt $f'_\lambda(t) = 3t^2 - 3\lambda^2$, und dies verschwindet in den beiden Punkten $t = \pm\lambda$. Diese beiden Punkte fallen für $|\lambda| \geq 2$ außer Betracht, da sie dann nicht im t -Intervall $] -2, 2[$ liegen. Die zugehörigen Funktionswerte

$$f_\lambda(-\lambda) = 2\lambda^3 + 4\lambda =: \phi_3(\lambda), \quad f_\lambda(\lambda) = -2\lambda^3 + 4\lambda =: \phi_4(\lambda)$$

sind somit nur für $-2 < \lambda < 2$ zur Konkurrenz zugelassen. Die Funktionen $\phi_1(\lambda), \dots, \phi_4(\lambda)$ sind in der Fig. 3.2.9 simultan dargestellt, ϕ_3 und ϕ_4 nur in dem angegebenen Bereich. Die gesuchten Funktionen M_λ und m_λ lassen sich nun unmittelbar ablesen: Aufgrund von Satz (3.4) ist

$$M_\lambda = \max\{\phi_1(\lambda), \dots, \phi_4(\lambda)\}$$

und analog für m_λ . Damit erhalten wir die folgende Tabelle:

	$\lambda \leq -2$	$-2 < \lambda < -1$	$-1 \leq \lambda \leq 1$	$1 < \lambda < 2$	$\lambda \geq 2$
M_λ	$\phi_1(\lambda)$	$\phi_4(\lambda)$	$\phi_2(\lambda)$	$\phi_3(\lambda)$	$\phi_1(\lambda)$
m_λ	$\phi_2(\lambda)$	$\phi_3(\lambda)$	$\phi_1(\lambda)$	$\phi_4(\lambda)$	$\phi_2(\lambda)$

○

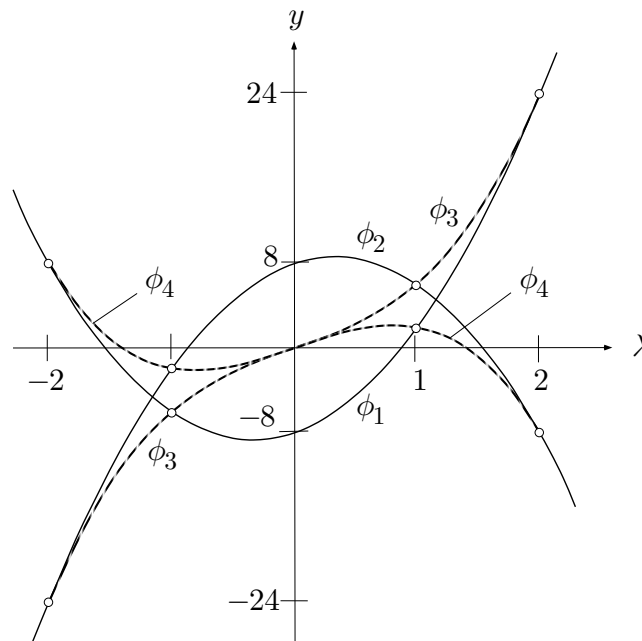


Fig. 3.2.9

Aufgaben

1. Bestimme Infimum und Supremum der folgenden Mengen. Welche dieser Mengen besitzen ein minimales oder ein maximales Element?

$$(a) \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad (b) \left\{ \frac{x}{1+x} \mid x > -1 \right\},$$

$$(c) \left\{ x + \frac{1}{x} \mid \frac{1}{2} < x < 2 \right\}, \quad (d) \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}: x^2 + 5y^2 < 4\}.$$

2. (M) Bestimme, soweit vorhanden, die globalen Extrema der Funktion

$$f(t) := (t^3 + 4t^2 + 9t + 9)e^{-t}.$$

Stelle ein Bild des Graphen von f her, das das gefundene Resultat bestätigt.

3. Ein Versuch besitze zwei mögliche Ergebnisse, die mit Wahrscheinlichkeiten p bzw. q ($= 1 - p$) eintreten. Ein Maß für die Ungewißheit über den Ausgang des Versuchs ist die sogenannte Entropie

$$H := -p \log p - q \log q.$$

Für welchen Wert von p und q ist die Ungewißheit am größten? (*Hinweis:* $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$.)

4. Ein periodischer Vorgang wird beschrieben durch die Funktion

$$f(t) := \alpha \cos t + \cos(2t).$$

Für welchen Wert des reellen Parameters α ist der Maximalausschlag (nach oben oder unten) minimal?

5. Eine Kugel soll in einen aufrechten Kreiskegel von minimalem Volumen gepackt werden. Bestimme den halben Öffnungswinkel des Kegels.
6. Auf der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ bestimme man diejenigen Punkte, die von dem Punkt $(c, 0)$, $0 < c < 2$, minimalen Abstand haben. Man zeichne die gesuchten Punkte für die Fälle $c := 3/4$ und $c := 9/5$.
7. Eine Zahl $a \geq 1$ soll in $n \geq 1$ gleiche Teile geteilt werden, so daß das Produkt der Teile möglichst groß wird. Bestimme n in Abhängigkeit von a . (*Hinweis:* Die Funktion $\phi(t) := (a/t)^t$ ist unimodal.)
8. Bestimme die größte Zahl, die als Produkt von positiven ganzen Zahlen der Summe 1996 dargestellt werden kann.
9. Betrachte die Funktion $f(t) := t^2$ ($t \in \mathbb{R}$) sowie das verschiebbare "Fenster" $[\lambda - 1, \lambda + 1]$ auf der t -Achse. Aufgabe: die beiden Funktionen

$$m(\lambda) := \min\{f(t) \mid \lambda - 1 \leq t \leq \lambda + 1\},$$

$$M(\lambda) := \max\{f(t) \mid \lambda - 1 \leq t \leq \lambda + 1\}$$

zu bestimmen. Verlangt ist eine formelmäßige Darstellung (allenfalls mit Fallunterscheidungen) oder eine Figur, an der $m(\cdot)$ und $M(\cdot)$ unmittelbar abgelesen werden können.

10. Angenommen, Sie müßten an dem folgenden Spiel teilnehmen: Sie geben eine reelle Zahl x bekannt; hierauf wählt Ihr Gegner eine reelle Zahl y und gewinnt von Ihnen den Betrag

$$f(x, y) := (x^2 - 4)y^2 + 2(x + 4)y .$$

Welches x würden Sie wählen, und welches y hierauf Ihr Gegner?

3.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Verschiedene Varianten des Mittelwertsatzes

Wir beginnen mit dem intuitiv einleuchtenden **Satz von Rolle**:

(3.5) Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, und es sei $f(a) = f(b)$. Ist f im Inneren von $[a, b]$ differenzierbar, so gibt es einen Punkt $\tau \in]a, b[$ mit $f'(\tau) = 0$.

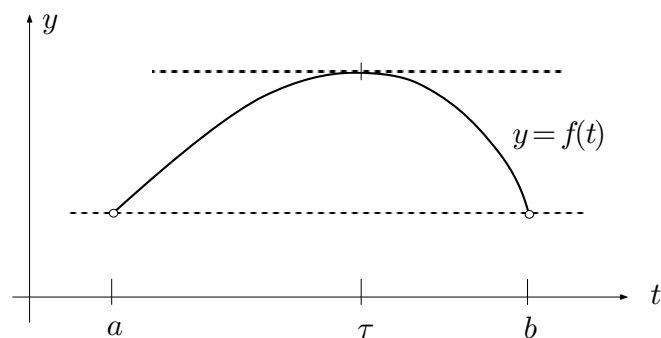


Fig. 3.3.1

┌ Ist f nicht konstant, so gibt es zum Beispiel Punkte $t \in]a, b[$ mit $f(t) > f(a)$, und das globale Maximum von f auf $[a, b]$ wird notwendigerweise in (mindestens) einem inneren Punkt τ angenommen (Fig. 3.3.1). An einer derartigen Stelle τ ist $f'(\tau) = 0$ nach Lemma (3.3). ┘

Für komplexwertige (und erst recht für vektorwertige) Funktionen gibt es keine derartige Aussage!

Bsp: Es ist $\text{cis}(2\pi) = \text{cis} 0$, aber $\text{cis}' t \neq 0$ für alle t .

Der angekündigte **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** erscheint in verschiedenen Varianten. Die erste davon ist (Fig. 3.3.2):

(3.6) Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von $[a, b]$ differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt $\tau \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\tau) \quad \text{bzw.} \quad f(b) - f(a) = f'(\tau)(b - a) .$$

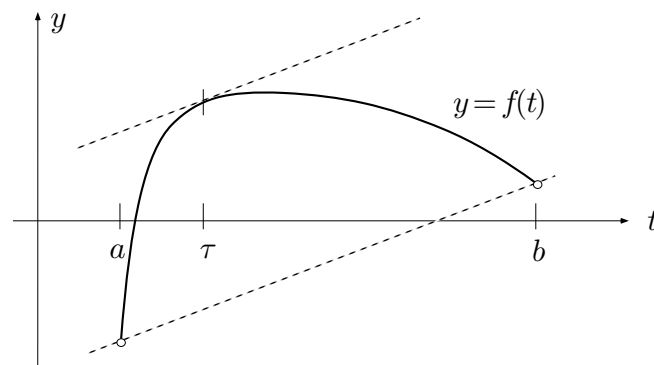


Fig. 3.3.2

Anstelle von **(3.6)** beweisen wir etwas allgemeiner:

(3.6') Genügen f und g den Voraussetzungen von **(3.6)** und ist $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in]a, b[$, so gibt es einen Punkt $\tau \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)}.$$

□ Wir setzen zur Abkürzung

$$f(b) - f(a) =: \Delta f, \quad g(b) - g(a) =: \Delta g \quad (\neq 0)$$

und betrachten die Hilfsfunktion

$$h(t) := \Delta g \cdot f(t) - \Delta f \cdot g(t).$$

Es ist

$$h(b) - h(a) = \Delta g \Delta f - \Delta f \Delta g = 0;$$

nach dem Satz von Rolle gibt es daher einen Punkt $\tau \in]a, b[$ mit

$$0 = h'(\tau) = \Delta g f'(\tau) - \Delta f g'(\tau),$$

und es folgt in der Tat

$$\frac{\Delta f}{\Delta g} = \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)}.$$

□

Aus Satz **(3.6)** ergeben sich sofort die folgenden Aussagen, die nun nicht mehr auf einen unfaßbaren Punkt τ Bezug nehmen:

(3.7) Ist f differenzierbar auf dem Intervall I und gilt

$$|f'(t)| \leq M \quad \forall t \in I,$$

so besteht für beliebige $t_1, t_2 \in I$ die Abschätzung

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq M |t_2 - t_1|.$$

(3.8) Ist $f'(t) \equiv 0$ auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so ist f konstant auf I .

Im Gegensatz zu **(3.5)** und **(3.6)** sind die Sätze **(3.7)** und **(3.8)** auch für komplexwertige und für vektorwertige Funktionen richtig (ohne Beweis).

Grenzwerte nach de l'Hôpital

Wir benutzen den Mittelwertsatz gerade zum Beweis der beliebten **Regel von Bernoulli-de l'Hôpital**. Es handelt sich dabei um eine einfache Methode zur Berechnung von gewissen Grenzwerten, die zunächst auf Ausdrücke der Form $0/0$ oder ∞/∞ führen.

(3.9) Es seien f und g differenzierbare reellwertige Funktionen auf dem Intervall $]a, b[$ ($b := \infty$ zugelassen), und es sei

$$\lim_{t \rightarrow b} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow b} g(t) = 0 \quad (\text{bzw. beide} = \infty),$$

aber $g'(t) \neq 0$ für alle t . Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow b} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow b} \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

falls der Grenzwert rechter Hand existiert ($\pm\infty$ zugelassen).

□ Wir behandeln nur den Fall “ $0/0$ ” und $b < \infty$, so daß wir ohne weiteres $f(b) = g(b) = 0$ annehmen dürfen (Fig. 3.3.3).

Die Funktionen f und g erfüllen in Intervallen $[t, b]$ die Voraussetzungen von Satz **(3.6')**. Es gibt daher für jedes $t < b$ einen Punkt $\tau_t \in]t, b[$ mit

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(b) - f(t)}{g(b) - g(t)} = \frac{f'(\tau_t)}{g'(\tau_t)}. \quad (1)$$

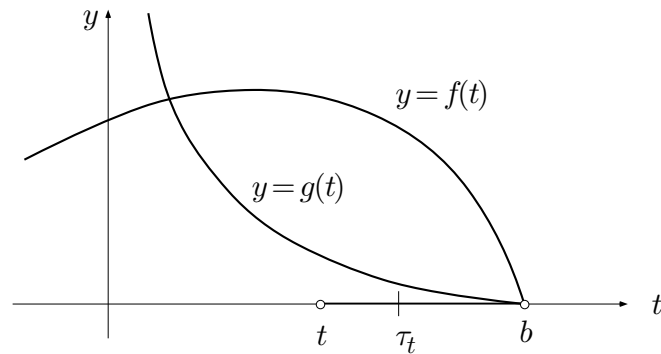


Fig. 3.3.3

Es sei jetzt $\lim_{t \rightarrow b} (f'(t)/g'(t)) =: \lambda$. Beim Grenzübergang $t \rightarrow b-$ strebt notwendigerweise auch der Punkt τ_t gegen b und folglich die rechte Seite von (1) gegen λ , also auch die linke Seite. \square

Wir behandeln nun einige Beispiele.

①

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{2t^2 + t - 3}{t^3 - 3t + 2} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{4t + 1}{3t^2 - 3} = \lim_{t \rightarrow 1+} \left[\frac{4t + 1}{3(t + 1)} \cdot \frac{1}{t - 1} \right].$$

Hier strebt der erste Faktor rechter Hand mit $t \rightarrow 1+$ gegen $5/6$, der zweite gegen ∞ , das Produkt also gegen ∞ .

Es seien $\alpha, \beta > 0$. Bei der Funktion

$$h(t) := \frac{\log \cosh(\alpha t)}{\log \cosh(\beta t)}$$

streben Zähler und Nenner mit $t \rightarrow 0$ beide gegen 0 und mit $t \rightarrow \infty$ beide gegen ∞ . Wegen

$$\frac{d}{dy} \log \cosh y = \log'(\cosh y) \cosh'(y) = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \tanh y$$

erhalten wir daher einerseits

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} h(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha \tanh(\alpha t)}{\beta \tanh(\beta t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 (1 - \tanh^2(\alpha t))}{\beta^2 (1 - \tanh^2(\beta t))} \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \end{aligned}$$

wobei wir Satz (3.9) gleich zweimal angewandt haben, und andererseits

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha \tanh(\alpha t)}{\beta \tanh(\beta t)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

○

Monotonie und Konvexität

Es sei I ein beliebiges Intervall. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **(streng) monoton wachsend** auf I , wenn gilt:

$$t_1, t_2 \in I \quad \wedge \quad t_1 < t_2 \quad \implies \quad f(t_1) < f(t_2).$$

Der Mittelwertsatz liefert das folgende für die “Graphendiskussion” nützliche Monotoniekriterium:

(3.10) *Eine differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann streng monoton wachsend auf dem Intervall I , wenn folgendes zutrifft:*

$$f'(t) \geq 0 \quad \forall t \in I, \tag{2}$$

und auf keinem Teilintervall ist $f'(t) \equiv 0$.

□ Wir verzichten auf die Diskussion des “streng”. — Ist f monoton wachsend, so sind alle Differenzenquotienten

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq 0,$$

also auch deren Grenzwerte. Umgekehrt: Ist $t_1 < t_2$, so gilt unter der Voraussetzung (2):

$$f(t_2) - f(t_1) = f'(\tau)(t_2 - t_1) \geq 0. \quad \lrcorner$$

② Betrachte die Funktion

$$f(t) := 5t^3 - 3t^5$$

mit der Ableitung

$$f'(t) = 15t^2 - 15t^4 = 15t^2(1 - t^2).$$

Wie man sofort sieht, ist

$$f'(t) \begin{cases} = 0 & (t \in \{-1, 0, 1\}), \\ > 0 & (0 < |t| < 1), \\ < 0 & (|t| > 1). \end{cases}$$

Hiernach ist f im Intervall $[-1, 1]$ streng monoton wachsend und in den beiden Intervallen $\mathbb{R}_{\leq -1}$ und $\mathbb{R}_{\geq 1}$ streng monoton fallend (Fig. 3.3.4). ○

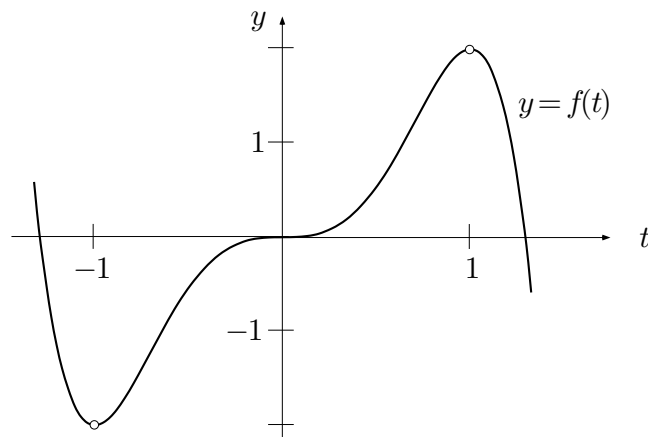


Fig. 3.3.4

Das Vorzeichen der ersten Ableitung f' gibt also Auskunft über die Monotonieeigenschaften von f längs $\text{dom}(f)$. Wenn wir schon dabei sind, betrachten wir auch noch das Vorzeichen der zweiten Ableitung f'' .

Gilt in einem Teilintervall $I \subset \text{dom}(f)$ durchwegs

$$f''(t) > 0,$$

so besagt **(3.10)**, angewandt auf f' anstelle von f : Die Funktion f' ist auf I streng monoton wachsend. Durchläuft also der Punkt $(t, f(t))$ den betreffenden Teil des Graphen $\mathcal{G}(f)$ von links nach rechts, so nimmt die Steigung der Tangente monoton zu (Fig. 3.3.5). Dann ist aber auch

$$\arg \mathbf{v}(\cdot) = \arg(1, f'(\cdot)) = \arctan f'(\cdot)$$

monoton wachsend, das heißt, die Tangente dreht sich in positivem Sinn. Man sagt, die Funktion sei in diesem Intervall **(nach unten) konvex**. Wie wir später zeigen werden, liegt der Graph einer konvexen Funktion immer oberhalb seiner Tangenten; diese werden im vorliegenden Zusammenhang auch **Stützgeraden** der betreffenden Funktion genannt.

Gilt jedoch in einem Intervall I durchwegs

$$f''(t) < 0,$$

so dreht sich die Tangente rechtsherum, wenn man $\mathcal{G}(f)$ von links nach rechts durchläuft (Fig. 3.3.6). Die Funktion f wird dann **konkav** (oder meinetwegen “nach oben konvex”) genannt, und der Graph von f hängt unterhalb aller seiner Tangenten, die ihn gewissermaßen von oben “stützen”.

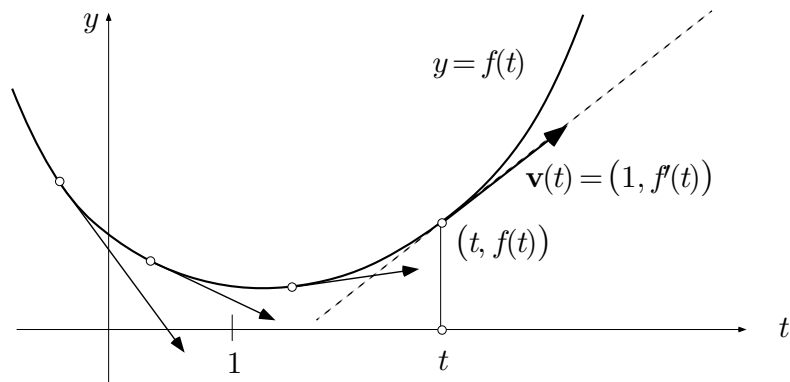


Fig. 3.3.5

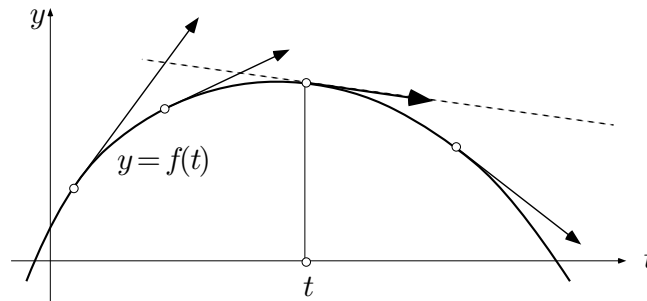


Fig. 3.3.6

③ Wir betrachten die Funktionen

$$b_\alpha(t) := (1+t)^\alpha \quad (t > -1)$$

(Binomialreihe!) für verschiedene Werte des reellen Parameters α . — Man erhält nacheinander

$$b'_\alpha(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1}, \quad b''_\alpha(t) = \alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2}.$$

Wegen $b'_\alpha(0) = \alpha$ besitzt die Tangente, die $\mathcal{G}(b_\alpha)$ im Punkt $P_0 := (0, 1)$ berührt, die Gleichung

$$y = 1 + \alpha t.$$

Was nun das Vorzeichen von b''_α betrifft, so ist

$$\operatorname{sgn} b''_\alpha = \operatorname{sgn} \alpha \cdot \operatorname{sgn} (\alpha - 1) = \begin{cases} 1 & (\alpha > 1 \text{ oder } \alpha < 0), \\ -1 & (0 < \alpha < 1). \end{cases}$$

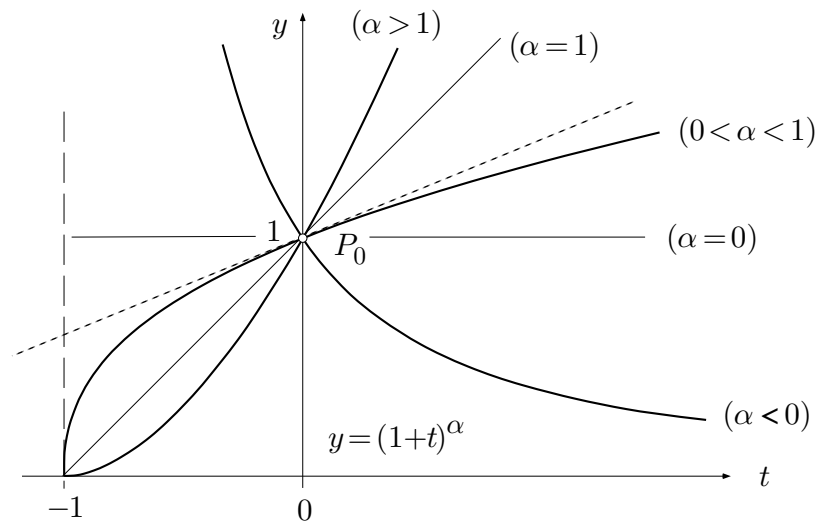


Fig. 3.3.7

Die Funktion b_α ist somit konvex, falls $\alpha > 1$ oder $\alpha < 0$, und konkav, falls $0 < \alpha < 1$; in den Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ schließlich ist $\mathcal{G}(b_\alpha)$ eine Gerade, siehe die Fig. 3.3.7.

Da die Tangente im Punkt P_0 in jedem Fall eine Stützgerade des Graphen ist, ergibt sich als Nebenprodukt die sogenannte **Bernoullische Ungleichung**:

— Ist $\alpha \leq 0$ oder $\alpha \geq 1$, so gilt

$$(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t \quad (t > -1);$$

— ist jedoch $0 \leq \alpha \leq 1$, so gilt

$$(1+t)^\alpha \leq 1 + \alpha t \quad (t > -1).$$

○

Wechselt f'' an der Stelle t_0 das Vorzeichen:

$$f''(t_0) = 0, \quad (\operatorname{sgn} f'')(t_0-) = -(\operatorname{sgn} f'')(t_0+),$$

so geht f beim Durchlaufen des Punktes $P_0 := (t_0, f(t_0))$ vom konkaven zum konvexen Charakter über, oder umgekehrt; der Graph besitzt an der Stelle P_0 einen **Wendepunkt** (Fig. 3.3.8).

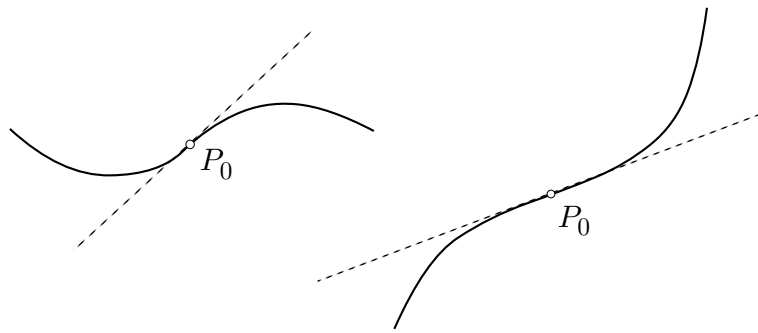


Fig. 3.3.8

④ Die **kubischen Parabeln**, das sind die Graphen der Polynome

$$p(t) := at^3 + bt^2 + ct + d, \quad a \neq 0,$$

besitzen alle einen Wendepunkt, denn

$$p''(t) = 6at + 2b$$

besitzt genau eine Nullstelle $t_0 := -\frac{b}{3a}$ und wechselt dort das Vorzeichen. In der Figur 3.3.9 sind zwei Varianten dargestellt. ○

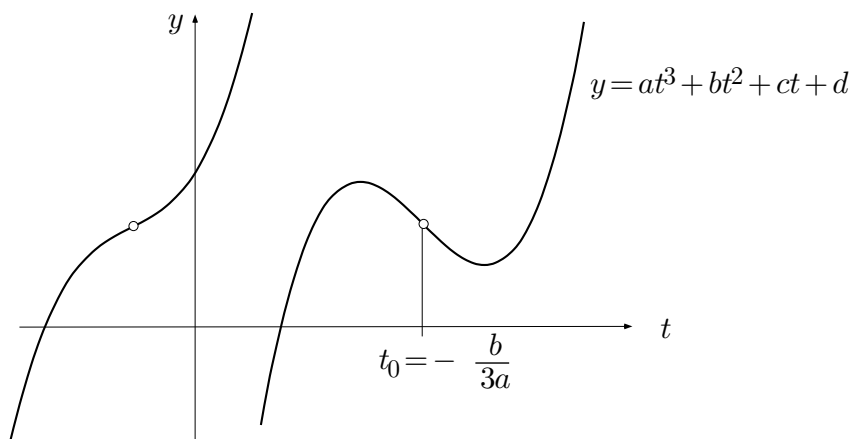


Fig. 3.3.9

In der nachstehenden Figur 3.3.10 werden die qualitativen Beziehungen zwischen den Graphen von f , f' und f'' noch einmal zusammengefaßt.

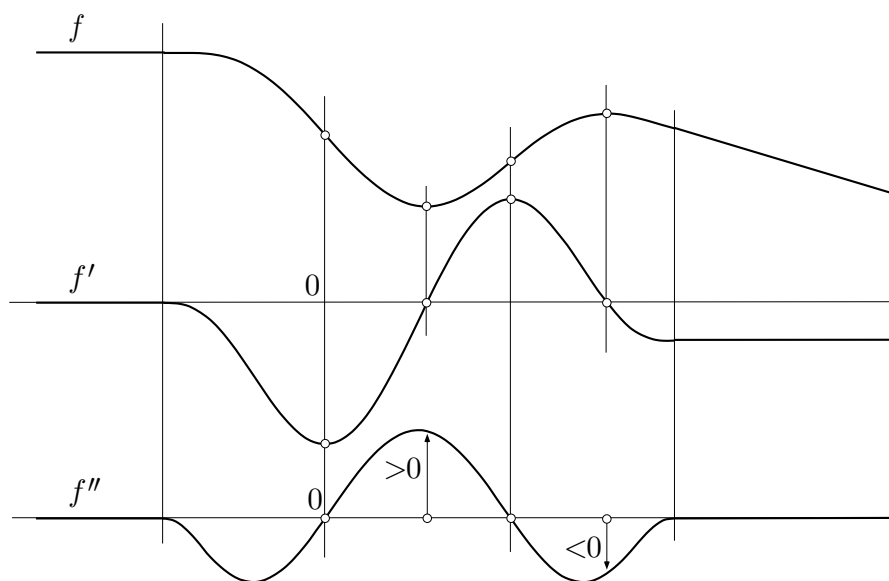


Fig. 3.3.10

Aufgaben

- Zeige: Die Gleichung $x^2 = 2^x$ hat genau drei reelle Lösungen. (*Hinweis:* Betrachte die Funktion $f(x) := 2^x - x^2$. Mindestens drei Lösungen mit Zwischenwertsatz, höchstens drei Lösungen mit Hilfe des Satzes von Rolle, angewandt auf $f / f' / f''$.)
- Ⓜ Berechne die folgenden Grenzwerte:
 - $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t - \sinh t}$,
 - $\lim_{t \rightarrow \pi/2} \frac{\sin t + \sin(3t)}{\cos(2t)}$,
 - $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{b^t - 1}$ ($a, b > 0$),
 - $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(\cos t)}{\cosh t - 1}$,
 - $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^\alpha - t^\beta}{t^{1/\beta} - t^{1/\alpha}}$ ($\alpha\beta(\alpha - \beta) \neq 0$),
 - $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 2 \sin t)^{\cot t}$ (*Hinweis:* Logarithmieren).

3.4 Taylor-Approximation

Zur Einführung

In der fundamentalen Beziehung 3.1.(4) ist enthalten, daß die Ableitung zur approximativen Berechnung von Funktionswerten herangezogen werden kann. Indem man nämlich den o -Term in 3.1.(4) vernachlässigt, erhält man die Möglichkeit, eine beliebige Funktion in der unmittelbaren Umgebung einer festen Stelle t_0 zu *linearisieren* und so mit bescheidenem Rechenaufwand approximativ zu berechnen:

$$f(t) \doteq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad (t \doteq t_0) . \quad (1)$$

Eine Fehlerabschätzung ist damit allerdings nicht verbunden. Im Graphenbild läuft (1) darauf hinaus, daß $\mathcal{G}(f)$ in der Umgebung von $P_0 := (t_0, f(t_0))$ durch die Tangente in P_0 ersetzt wird (Fig. 3.4.1).

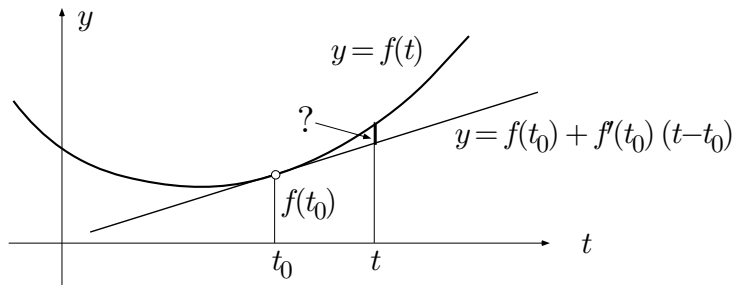


Fig. 3.4.1

① Gesucht ist ein Näherungswert für die Zahl $\sqrt[5]{1023}$. Hierzu betrachten wir die Funktion

$$f(t) := t^{1/5}$$

in der Umgebung der Stelle $t_0 := 1024$ und schreiben

$$f(1023) \doteq f(1024) + f'(1024)(1023 - 1024) .$$

Nun ist $f(1024) = (2^{10})^{1/5} = 4$, ferner hat man

$$f'(t) = \frac{1}{5} t^{\frac{1}{5}-1} = \frac{t^{1/5}}{5t}$$

und somit $f'(1024) = \frac{4}{5 \cdot 1024} = 0.00078125$. Damit erhalten wir

$$\sqrt[5]{1023} \doteq 4 + 0.00078125 \cdot (-1) = 3.99921875 .$$

Der Tabellenwert ist 3.999218445.

○

② Ist $|t|$ sehr klein gegenüber 1, in Zeichen: $|t| \ll 1$, so gilt

$$\frac{1}{1+t} \doteq 1-t. \quad (2)$$

Die Funktion $f(t) := 1/(1+t)$ hat nämlich an der Stelle $t_0 := 0$ den Wert 1 und die Ableitung $f'(t) = -1/(1+t)^2$ den Wert -1 .

Auf der Beziehung (2) beruht die Lebensweisheit, daß die Aussagen “A ist 2% teurer als B” und “B ist 2% billiger als A” kompatibel sind. Die analogen Aussagen mit 25% anstelle von 2% sind aber nicht mehr miteinander verträglich. \bigcirc

Um bessere Approximationen und auch Fehlerabschätzungen zu erhalten, müssen wir die höheren Ableitungen ins Spiel bringen, die für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ rekursiv wie folgt definiert sind:

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(k+1)} := (f^{(k)})' \quad (k \geq 0).$$

Anstelle von $f^{(k)}$ schreibt man auch $\frac{d^k}{dt^k} f(t)$, $D^k f$ und ähnlich.

③ Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ fest. Dann ist

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}.$$

Mit vollständiger Induktion beweist man die **Leibnizsche Formel** für die n -te Ableitung eines Produkts:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Ferner:

$$\frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{1-t} = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}}. \quad \bigcirc$$

Zurück zu unseren Approximationen. Um eine Indexstufe einzusparen, bezeichnen wir im folgenden den festgehaltenen “Arbeitspunkt” auf der t -Achse mit a statt mit t_0 und nehmen zunächst $a := 0$ an (die anvisierte Theorie ist natürlich translationsinvariant). Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ sei in der Umgebung der Stelle 0 so oft wie nötig differenzierbar. Dann ist die “nullte Taylor-Approximation von f an der Stelle 0” gegeben durch

$$f(t) \doteq f(0) \quad (t \doteq 0) \quad (3_0)$$

und die “erste Taylor-Approximation” durch

$$f(t) \doteq f(0) + f'(0)t \quad (t \doteq 0) . \quad (3_1)$$

Hier wird f in der Umgebung von $a := 0$ zunächst durch ein Polynom vom Grad ≤ 0 approximiert, dessen Wert an der Stelle 0 mit $f(0)$ übereinstimmt, dann durch ein Polynom vom Grad ≤ 1 , dessen Wert und erster Ableitungswert an der Stelle 0 bzw. mit $f(0)$ und $f'(0)$ übereinstimmen. Es liegt nahe, diesen Gedanken weiterzuführen und im nächsten Schritt die Funktion f in der Umgebung von 0 “quadratisch” zu approximieren — gemeint ist: durch ein Polynom vom Grad ≤ 2 , das auch noch die zweite Ableitung $f''(0)$ richtig wiedergibt.

Konstruktion des Taylor-Polynoms

Es soll also eine Folge von Polynomen

$$j^0f, j^1f, j^2f, \dots$$

(‘ j^rf ’ ist ein Bezeichner!) mit folgenden Eigenschaften konstruiert werden:

- (a) Jedes j^rf besitzt einen Grad $\leq r$.
- (b) Für $0 \leq k \leq r$ gilt

$$(j^rf)^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) .$$

Die Forderung (b) scheint vernünftig, denn nach (a) sind $r + 1$ Koeffizienten zu bestimmen. Wir setzen noch $j^{-1}f(t) \equiv 0$ und haben nach (3₀) und (3₁):

$$j^0f(t) \equiv f(0) , \quad j^1f(t) := f(0) + f'(0)t .$$

Für den allgemeinen Rekursionsschritt nehmen wir an, $j^{r-1}f$ sei bestimmt und besitze die verlangten Eigenschaften. Setzen wir zur Abkürzung

$$j^rf - j^{r-1}f =: p ,$$

so muß das (vorderhand unbekante) Polynom p den folgenden Bedingungen genügen (und das ist dann auch hinreichend):

- Der Grad von p ist $\leq r$.
- $p(0) = p'(0) = \dots = p^{(r-1)}(0) = 0$.
(Für $0 \leq k \leq r - 1$ müssen ja die k -ten Ableitungen von $j^{r-1}f$ und von j^rf bei 0 mit denen von f übereinstimmen.)
- $p^{(r)}(0) = f^{(r)}(0)$.
(Die r -te Ableitung von $j^{r-1}f$ ist $\equiv 0$, und $(j^rf)^{(r)}(0)$ sollte ja gleich $f^{(r)}(0)$ sein.)

Es gibt genau ein Polynom p , das diese Bedingungen erfüllt, nämlich

$$p(t) := \frac{f^{(r)}(0)}{r!} t^r$$

(das war nicht schwer zu finden!). Folglich ist

$$j^r f = j^{r-1} f + \frac{f^{(r)}(0)}{r!} t^r,$$

und durch Aufsummieren erhalten wir definitiv

$$\begin{aligned} j^n f(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \end{aligned}$$

Damit ist die durch (a) und (b) beschriebene Aufgabe gelöst: Das Polynom vom Grad $\leq n$ mit den richtigen Ableitungswerten an der Stelle $a := 0$ ist gefunden. Man nennt $j^n f$ den **n -Jet** (oder auch das **n -te Taylorsche Approximationspolynom**) von f an der Stelle 0. Etwas allgemeiner ist

$$j_a^n f(t) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

der **n -Jet von f an der Stelle a** . — Die formale Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

heißt **Taylor-Reihe von f an der Stelle a** ; es handelt sich um eine Potenzreihe mit Mittelpunkt a . Die n -Jets $j_a^n f$ sind die Partialsummen dieser Reihe.

Die Figur 3.4.2 zeigt einige n -Jets der Sinusfunktion an der Stelle $a := 0$. Man erkennt deutlich, wie sich der t -Bereich, in dem j^n eine brauchbare Approximation liefert, mit wachsendem n vergrößert.

Qualität der Approximation

Wir kommen nun zu dem analytischen Problem, herauszufinden, wie gut $j_a^n f$ die Ausgangsfunktion f in der Umgebung von a approximiert. Wir schreiben

$$f(t) = j_a^n f(t) + R_n(t) \tag{4}$$

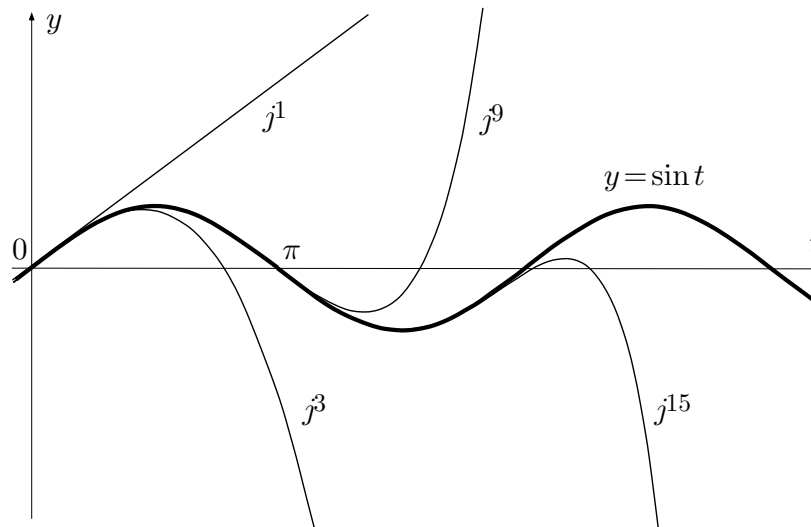


Fig. 3.4.2

und hoffen natürlich, daß das n -te Restglied $R_n(t)$, auch **Abbrechfehler** genannt, für $t \doteq a$ und größeres n sehr sehr klein wird. Es gibt verschiedene Darstellungen des Restglieds. Man benötigt sie für Konvergenzuntersuchungen und für die numerische Abschätzung des Abbrechfehlers, nicht aber, um den Funktionswert auf einem unerhörten Umweg doch noch exakt zu berechnen. Wir beweisen darüber:

(3.11) Für ein geeignetes τ zwischen a und t hat das Restglied in (4) den Wert

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1},$$

das heißt, es gilt

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}.$$

Das Restglied sieht hier fast so aus wie das erste vernachlässigte Glied der Taylor-Reihe. Wenn wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß $f^{(n+1)}$ an der Stelle a stetig ist, so folgt aus Satz **(3.11)** sofort:

$$\mathbf{(3.12)} \quad R_n(t) = o((t-a)^n) \quad (t \rightarrow a).$$

Das Restglied ist hiernach für $t \rightarrow a$ von kleinerer Größenordnung als der letzte in $j_a^n f$ berücksichtigte bzw. auftretende Term (ausgenommen natürlich im Fall $j_a^n f = 0$, wo $R_n(t) \equiv f(t)$ ist, s.u.).

Zum Beweis von **(3.11)** benötigen wir das folgende Lemma:

(3.13) *Es sei $t > a$. Ist g im Intervall $[a, t]$ hinreichend oft differenzierbar und ist*

$$g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0, \quad (5)$$

so gilt für ein geeignetes $\tau \in]a, t[$:

$$g(t) = \frac{g^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}.$$

□ Für $n = 0$ lautet die Behauptung: Es gibt ein $\tau \in]a, t[$ mit

$$g(t) = g'(\tau)(t-a).$$

Dies trifft wegen $g(a) = 0$ zu nach Satz **(3.6)** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Das Lemma sei daher richtig für n , und die Funktion g genüge neben (5) noch der zusätzlichen Bedingung

$$g^{(n+1)}(a) = 0. \quad (6)$$

Betrachte neben g die weitere Funktion

$$h(t) := (t-a)^{n+2}$$

mit der Ableitung

$$h'(t) = (n+2)(t-a)^{n+1}.$$

Nach Satz **(3.7)** gibt es ein $\tau_1 \in]a, t[$ mit

$$\frac{g(t)}{(t-a)^{n+2}} = \frac{g(t) - g(a)}{h(t) - h(a)} = \frac{g'(\tau_1)}{h'(\tau_1)} = \frac{g'(\tau_1)}{(n+2)(\tau_1 - a)^{n+1}}. \quad (7)$$

Nun genügt g' wegen (5) und (6) auf dem Intervall $[a, \tau_1]$ der Induktionsvoraussetzung. Es gibt daher ein $\tau \in]a, \tau_1[$ (Fig. 3.4.3) mit

$$g'(\tau_1) = \frac{g^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (\tau_1 - a)^{n+1}.$$

Setzen wir dies rechts in (7) ein, so ergibt sich gerade

$$\frac{g(t)}{(t-a)^{n+2}} = \frac{g^{(n+2)}(\tau)}{(n+2)!},$$

wie für die Induktion erforderlich. □

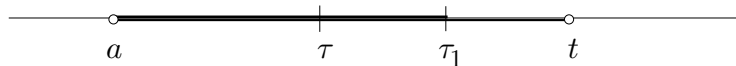


Fig. 3.4.3

Damit kommen wir zum Beweis von Satz **(3.11)**:

□ Die Funktion $R_n(\cdot)$ ist definiert durch (4). Nach Konstruktion besitzt R_n an der Stelle a verschwindende Ableitungen bis zur Ordnung n und genügt damit den Voraussetzungen über g unseres Lemmas. Da $j_a^n f$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist, stimmt $R_n^{(n+1)}(\cdot)$ mit $f^{(n+1)}$ überein, und wir erhalten durch Anwendung des Lemmas:

$$R_n(t) = \frac{R_n^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1} . \quad \square$$

Beispiele und Anwendungen

④ Es soll $\log 1.2$ mit Hilfe der Darstellung

$$\log t = j_1^n \log(t) + R_n(t)$$

auf 10^{-3} genau berechnet werden (Fig. 3.4.4). Der Tabelle

k	$f^{(k)}(t)$	$f^{(k)}(1)$
0	$\log t$	0
1	$1/t$	1
2	$-1/t^2$	-1
3	$2/t^3$	2
4	$-6/t^4$	

entnimmt man

$$|f^{(4)}(t)| \leq 6 \quad (t \geq 1);$$

Satz **(3.11)** mit $a := 1$, $t := 1.2$ liefert daher die Abschätzung

$$|R_3(1.2)| = \frac{|f^{(4)}(\tau)|}{4!} (0.2)^4 \leq \frac{6}{4!} (0.2)^4 = 4 \cdot 10^{-4} ,$$

so daß wir R_3 vernachlässigen dürfen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \log 1.2 &\doteq j_1^3 \log(1.2) \\ &= 0 + 1 \cdot 0.2 + \frac{-1}{2} (0.2)^2 + \frac{2}{3!} (0.2)^3 = 0.18267 \end{aligned}$$

mit einem Fehler $\leq 4 \cdot 10^{-4}$. Der Tabellenwert ist $\log 1.2 = 0.182321557$.

○

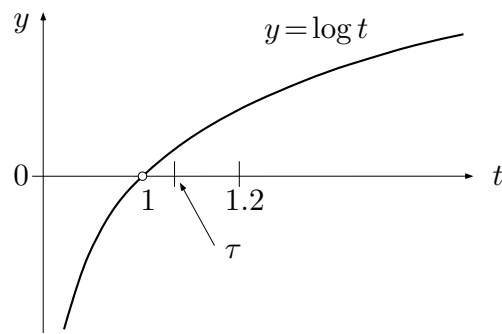


Fig. 3.4.4

⑤ Wir zeigen, daß der Graph einer konvexen Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ oberhalb seiner Tangenten liegt.

┌ Es gelte

$$\forall t \in I: \quad f''(t) > 0,$$

und es sei $a \in I$ ein fest gewählter Punkt. Die Tangente in dem zu a gehörigen Graphenpunkt P_0 (Fig. 3.4.5) hat die Gleichung

$$y = f(a) + f'(a)(t - a) = j_a^1 f(t).$$

Es sei $t \in I$, $t \neq a$, beliebig. Nach (3.11) gibt es ein τ zwischen t und a mit

$$f(t) = j_a^1 f(t) + \frac{f''(\tau)}{2} (t - a)^2.$$

Hier ist der zweite Summand rechter Hand > 0 .

┐
○

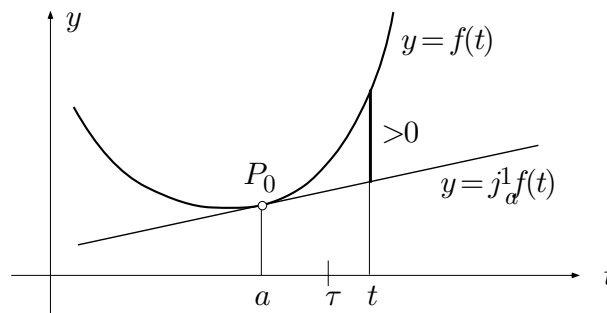


Fig. 3.4.5

Satz (3.12) setzt uns instand, das Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines kritischen Punktes näher zu untersuchen. Wir zeigen:

(3.14) Es sei t_0 ein kritischer Punkt der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, und zwar gelte für ein $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} f'(t_0) = f''(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0) &= 0, \\ f^{(n)}(t_0) &=: A \neq 0. \end{aligned}$$

Ist n gerade, so besitzt f an der Stelle t_0 ein lokales Minimum, falls $A > 0$, und ein lokales Maximum, falls $A < 0$. Ist n ungerade, so besitzt f an der Stelle t_0 kein lokales Extremum, hingegen einen Wendepunkt.

□ Der Einfachheit halber sei $t_0 = 0$. Der Punkt t_0 ist definitionsgemäß ein innerer Punkt von $\text{dom}(f)$ (Fig. 3.2.6), somit kann die Größe $t - t_0 = t$ im folgenden beiderlei Vorzeichen annehmen. Nach Satz (3.12) ist

$$\begin{aligned} f(t) &= j_0^n f(t) + o(t^n) \\ &= f(0) + \frac{A}{n!} t^n + o(t^n) \quad (t \rightarrow 0), \end{aligned}$$

denn alle übrigen Glieder des n -Jets entfallen. Wir schreiben das in der Form

$$f(t) - f(0) = t^n \left(\frac{A}{n!} + o(1) \right) \quad (t \rightarrow 0).$$

Wegen $A \neq 0$ gilt daher für alle hinreichend nahe bei 0 gelegenen t :

$$\text{sgn}(f(t) - f(0)) = \text{sgn}(t^n) \cdot \text{sgn} A.$$

Hieraus folgen alle Behauptungen bezüglich eines allfälligen lokalen Extremums. — Es sei weiter $n \geq 3$ ungerade. Wenden wir Satz (3.12) auf f'' an, so ergibt sich in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} f''(t) &= j_0^{n-2} f''(t) + o(t^{n-2}) \\ &= t^{n-2} \left(\frac{A}{(n-2)!} + o(1) \right) \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

und somit

$$\text{sgn} f''(t) = \text{sgn} t \cdot \text{sgn} A$$

für alle t in der Nähe von 0. Folglich wechselt f'' an der Stelle 0 das Vorzeichen, wie behauptet. □

⑥ Es sollen die kritischen Stellen der Funktion

$$f(t) := (t - 3)^3 (t + 2)^2$$

untersucht werden. — Wir unterlassen tunlichst, das Produkt rechter Hand auszumultiplizieren, und berechnen nacheinander

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t-3)^2(t+2)(3(t+2) + 2(t-3)) \\ &= 5(t-3)^2(t+2)t, \\ f''(t) &= 5(t-3)(2(t+2)t + (t-3)t + (t-3)(t+2)) \\ &= 5(t-3)(4t^2 - 6) = 20(t-3)(t - \sqrt{3/2})(t + \sqrt{3/2}), \\ f'''(t) &= 20 \left(\left(t^2 - \frac{3}{2} \right) + (t-3)2t \right). \end{aligned}$$

Es gibt daher die drei kritischen Stellen $-2, 0, 3$. Wir legen die folgende Tabelle an, in die wir auch noch die zwei weiteren Nullstellen $\pm\sqrt{3/2}$ von f'' aufnehmen:

t_k	$f(t_k)$	$f'(t_k)$	$f''(t_k)$	$f'''(t_k)$	Typ
-2	0	0	-250		lokales Maximum
0	-108	0	90		lokales Minimum
3	0	0	0	150	Wendepunkt
$\pm\sqrt{3/2}$		$\neq 0$	0	$\neq 0$	Wendepunkte

Diese Tabelle findet ihre graphische Bestätigung in der Figur 3.4.6. ○

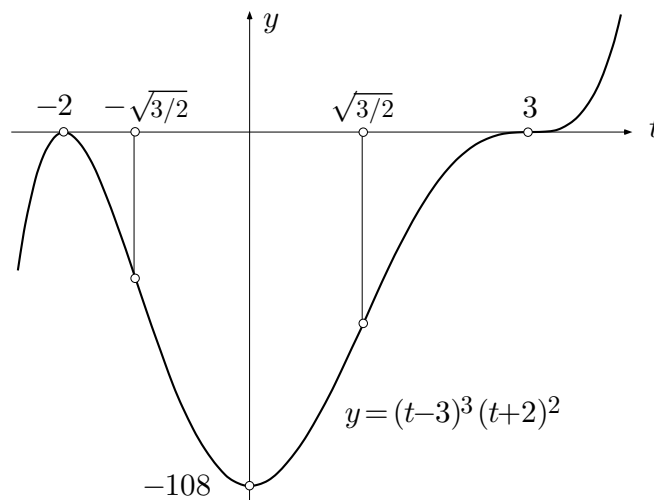


Fig. 3.4.6

Das Newtonsche Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Wir machen nun einen Exkurs in ganz andere Gefilde und behandeln das **Verfahren von Newton** zur approximativen Lösung von Gleichungen der Form

$$f(x) = 0,$$

f eine gegebene Funktion. Die unabhängige Variable bezeichnen wir hier mit x , um den Eindruck einer "Unbekannten" zu vermitteln. Außerdem läßt sich das Verfahren auf mehrdimensionale Situationen, das heißt: auf n Gleichungen in n Unbekannten, übertragen.

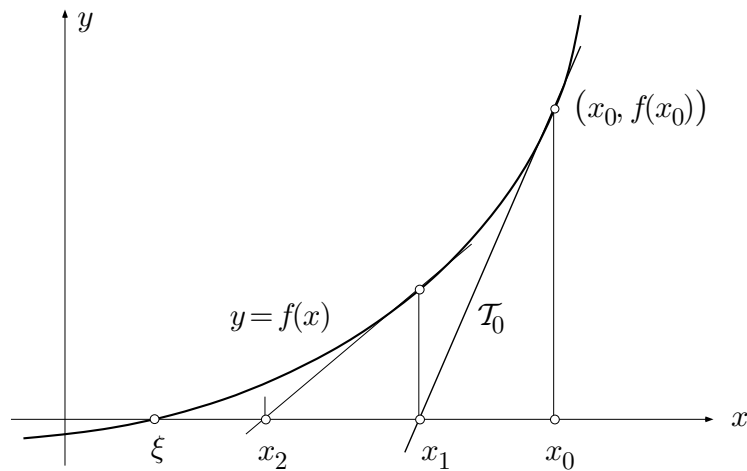


Fig. 3.4.7

Die Idee ist genial einfach (Fig. 3.4.7). Es sei x_0 ein irgendwie gefundener Näherungswert für eine (unbekannte) Lösung ξ der obigen Gleichung. Wir ersetzen dann $\mathcal{G}(f)$ durch die Tangente \mathcal{T}_0 im Punkt $(x_0, f(x_0))$ und schneiden diese Tangente statt $\mathcal{G}(f)$ mit der x -Achse. Es ist zu erwarten, daß der Schnittpunkt x_1 näher bei ξ liegt als x_0 . Das Verfahren läßt sich beliebig oft wiederholen und liefert eine Folge x_n , die unter günstigen Umständen gegen ξ konvergiert. (Es kann aber auch schiefgehen, wie Fig. 3.4.8 zeigt.)

Die geometrische Konstruktion läßt sich analytisch wie folgt nachvollziehen: Die Graphentangente \mathcal{T}_0 besitzt die Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

und schneidet daher die x -Achse an der Stelle

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

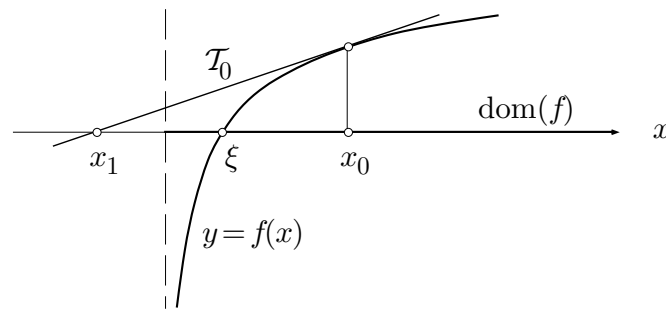


Fig. 3.4.8

Dieselbe Formel gilt auch für den allgemeinen Schritt $x_n \mapsto x_{n+1}$. Infolgedessen wird das Newtonsche Verfahren durch folgende Rekursionsvorschrift beschrieben:

x_0 : hinreichend nahe bei ξ

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wir wollen nun das Konvergenzverhalten der Folge x_n untersuchen, wobei wir geeignete Annahmen treffen, die sicherstellen, daß x_0 unter den gegebenen Umständen "hinreichend nahe bei ξ " liegt. (In der Praxis werden diese Bedingungen natürlich nicht immer verifiziert. Man beginnt einfach mit einem plausiblen Näherungswert x_0 zu rechnen und sieht dann sehr bald, ob es klappt.)

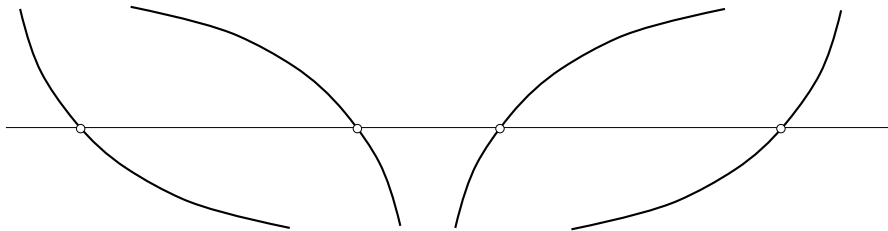


Fig. 3.4.9

Es sei ein Intervall $I := [a, b]$ so bestimmt, daß gilt:

(a')
$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

(b')
$$\forall x \in I : f'(x)f''(x) \neq 0.$$

Der Graph von $f \upharpoonright I$ hat dann eine der vier in Fig. 3.4.9 dargestellten Formen. Insbesondere ist f streng monoton auf I und besitzt somit genau eine Nullstelle $\xi \in I$. Wir nehmen etwa an, es sei $f' > 0$ und $f'' > 0$ auf I und setzen $x_0 := b$. (Je nachdem, ob f' und f'' gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, ist $x_0 := b$ oder $x_0 := a$ zu wählen.) Dann treffen die folgenden Bedingungen für $n = 0$ zu:

- (a) $\xi < x_n$,
- (b) $\forall x \in]\xi, x_n]: f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

Damit ergibt sich für x_1 jedenfalls

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

Wir entwickeln nun die Funktion f an der Stelle x_0 nach Taylor: Nach Satz (3.11) gibt es einen Punkt x^* zwischen x_0 und ξ (Fig. 3.4.10) mit

$$0 = f(\xi) = f(x_0) + f'(x_0)(\xi - x_0) + \frac{f''(x^*)}{2!}(\xi - x_0)^2.$$

Nach Division mit $f'(x_0)$ folgt hieraus

$$0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - x_0 + \xi + \frac{f''(x^*)}{2f'(x_0)}(x_0 - \xi)^2,$$

und das heißt

$$x_1 - \xi = \frac{f''(x^*)}{2f'(x_0)}(x_0 - \xi)^2. \quad (8)$$

Hier ist die rechte Seite > 0 wegen (b). Es gilt daher

$$\xi < x_1 < x_0,$$

und folglich treffen die Bedingungen (a) und (b) auch für $n = 1$ zu.

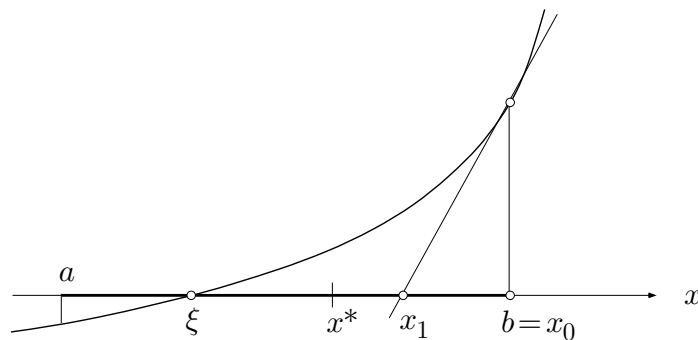


Fig. 3.4.10

Mit vollständiger Induktion ergibt sich: Die Folge x_n ist monoton fallend und nach unten beschränkt durch ξ . Sie besitzt daher einen Grenzwert $\xi' \in [\xi, x_0]$. Wir führen nun in der Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \geq 0)$$

den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch und erhalten

$$\xi' = \xi' - \frac{f(\xi')}{f'(\xi')}.$$

Es folgt $f(\xi') = 0$, das heißt: $\xi' = \xi$, wie erwartet.

Das Newtonsche Verfahren liefert also in der Tat die gesuchte Nullstelle ξ . Man kann aber noch mehr sagen: Ist n hinreichend groß, so ist x_n schon recht nahe bei ξ und ebenso der in (8) auftretende Punkt $x^* \in]\xi, x_n[$. Wir dürfen daher schreiben

$$x_{n+1} - \xi \doteq C(x_n - \xi)^2 \quad (n \text{ hinreichend groß})$$

mit

$$C := \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}.$$

Dies ist folgendermaßen zu interpretieren: Das Newtonsche Verfahren **konvergiert quadratisch**, da sich die Abweichung $x_n - \xi$ mit jedem Schritt im wesentlichen quadriert. Anders ausgedrückt: Ist C von der Größenordnung 1, so wird (nach einer gewissen Anfangsphase) die Anzahl der richtigen Dezimalstellen in der Näherung $x_n \doteq \xi$ mit jedem Schritt verdoppelt.

⑦ Wir haben in Beispiel 1.3.⑥ mit Hilfe der Rekursionsformel

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

eine Folge x_n konstruiert, die sehr rasch gegen \sqrt{c} konvergiert. Das Geheimnis kann nun gelüftet werden: Man kommt auf diese Formel, indem man auf die Gleichung

$$f(x) := x^2 - c = 0$$

das Newtonsche Verfahren anwendet. Es ist nämlich

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - c}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right).$$

○

⑧ Von einem kreisförmigen Kuchen (Fig. 3.4.11) soll durch einen geradlinigen Schnitt ein Drittel abgeteilt werden. In welchem Abstand vom Mittelpunkt ist der Schnitt zu führen?

Verwenden wir als Hilfsvariable den halben Zentriwinkel ϕ , so ist der Flächeninhalt A des abgeteilten Stückes gegeben durch

$$A = \frac{1}{2} 2\phi - \frac{1}{2} \sin(2\phi),$$

so daß wir die Gleichung

$$f(\phi) := \phi - \frac{1}{2} \sin(2\phi) - \frac{\pi}{3} = 0$$

aufösen müssen. Es ist $f(0) < 0$ und $f(\frac{\pi}{2}) > 0$. Wir leiten ab und erhalten

$$f'(\phi) = 1 - \cos(2\phi), \quad f''(\phi) = 2 \sin(2\phi).$$

Die Rekursionsformel lautet daher

$$\phi_{n+1} = \phi_n - \frac{\phi_n - \frac{1}{2} \sin(2\phi_n) - \frac{\pi}{3}}{1 - \cos(2\phi_n)}.$$

Da f' und f'' im Intervall $]0, \frac{\pi}{2}[$ gleiches Vorzeichen besitzen, wählen wir mit Vorteil $\phi_0 := \pi/2$ und erhalten

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{3}}{1 - (-1)} = \frac{5\pi}{12}.$$

Die weiteren Werte sind:

$$\phi_0 = 1.57079$$

$$\phi_1 = 1.30899$$

$$\phi_2 = 1.3026736661$$

$$\phi_3 = 1.3026628373 \dots$$

$$\phi_4 = 1.3026628373 \dots$$

Der gesuchte Abstand x beträgt daher

$$x = \cos \phi \doteq 0.2649.$$



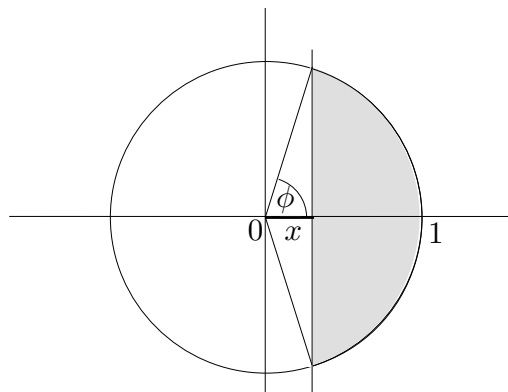


Fig. 3.4.11

Die Taylor-Reihe als Potenzreihe

Wir kehren zurück zur Taylor-Entwicklung.

Ist eine Funktion in der Umgebung von a beliebig oft differenzierbar, so kann man die unendliche Taylor-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k =: j_a^{\infty} f(t)$$

bilden, und es stellt sich natürlich die Frage, ob diese Reihe die Funktion f **darstellt**, das heißt: ob in einem geeigneten Intervall $I :=]a - \rho, a + \rho[$ die Identität

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \quad (t \in I) \quad (9)$$

zutrifft.

⑨ Ist f zufälligerweise ein Polynom vom Grad $\leq n$, also

$$f(t) := a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad (10)$$

so ist von vorneherein

$$j_0^{\infty} f = j_0^n f = f,$$

denn erstens verschwinden alle Ableitungen von f der Ordnung $> n$, und zweitens gibt es nur *ein* Polynom vom Grad $\leq n$, dessen Ableitungen bis zur Ordnung n bei 0 gegebene Werte annehmen. Es folgt: Eine Polynomfunktion (10) ist schon ihre eigene Taylorreihe an der Stelle 0. Man kann aber noch mehr sagen: Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ ist $j_a^{\infty} f (= j_a^n f)$ nichts anderes als “das nach Potenzen von $(t-a)$ entwickelte Polynom f ” und stimmt wertmäßig für alle t mit $f(t)$ überein. \bigcirc

Um die obige Frage zu entscheiden, müßte man untersuchen, ob das Restglied

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}$$

auf einem t -Intervall $I :=]a - \rho, a + \rho[$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Im allgemeinen ist das der Fall, das heißt, es läßt sich ein Intervall I finden, auf dem (9) gilt.

⑩ Die Funktion

$$f(t) := \frac{1}{1-t}$$

besitzt die Ableitungen

$$f^{(k)}(t) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} \quad (k \geq 0)$$

(siehe Beispiel ③). Somit ist

$$\begin{aligned} j_0^\infty f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k = 1 + t + t^2 + \dots, \end{aligned}$$

und hier stellt die rechte Seite in der Tat auf dem Intervall $] -1, 1[$ die Funktion f dar. ○

Es gibt aber auch Gegenbeispiele:

⑪ Für jedes feste $n \geq 0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-1/t^2}}{t^n} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-y}}{y^{-n/2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{n/2}}{e^y} = 0;$$

das heißt, es ist

$$e^{-1/t^2} = o(t^n) \quad (t \rightarrow 0)$$

für jedes n . Hieraus folgt (ohne Beweis): Sämtliche Ableitungen der Funktion

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & (t \neq 0), \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

(Fig. 3.4.12) an der Stelle 0 sind 0. Dann ist aber auch

$$j_0^\infty f = 0 \quad (\neq f).$$

○

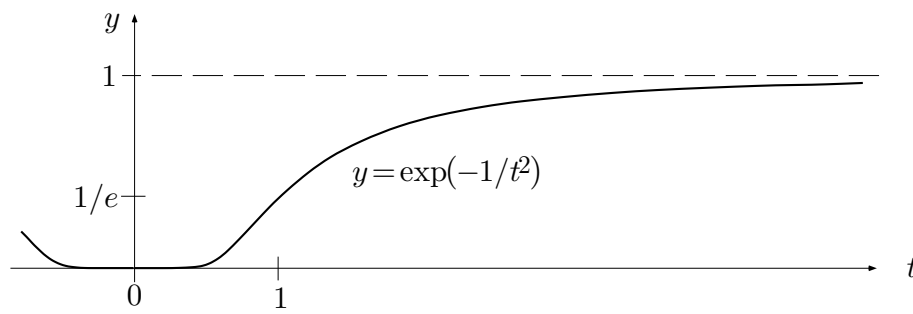


Fig. 3.4.12

Folgendes ist jedoch immer richtig:

(3.15) Ist $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ durch eine Potenzreihe definiert:

$$f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-a)^k \quad (t \in I),$$

so ist diese Reihe auch schon die Taylor-Reihe von f an der Stelle a , das heißt, es gilt

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

□ Gemäss **(2.15)**(b) dürfen wir die gegebene Potenzreihe gliedweise differenzieren, wobei dann der “vorderste” Term wegfällt:

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (t-a)^{k-1}.$$

Nach $r \geq 1$ derartigen Schritten ergibt sich

$$f^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k k(k-1) \cdots (k-r+1) (t-a)^{k-r}.$$

Wenn wir das an der Stelle $t := a$ evaluieren, so liefert rechter Hand nur der konstante Term, also derjenige mit $k = r$, einen Beitrag, und wir erhalten

$$f^{(r)}(a) = c_r r!.$$

□

Aufgaben

1. (M) Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) := \frac{1}{1-t^2}$$

an der Stelle 0. Interpretiere das Ergebnis. (*Hinweis:* f läßt sich als Summe von zwei "einfacheren" Funktionen schreiben.)

2. Bestimme das Taylor-Polynom $j_0^2 \tan(t)$ sowie eine im Intervall $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ gültige Fehlerabschätzung. (*Hinweis:* Verwende wiederholt $\tan' = 1 + \tan^2$.)
3. Aus dem Additionstheorem für den Tangens folgt relativ leicht die Formel

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.$$

Man benütze diese Formel und die Taylor-Entwicklung des Arcustangens, um $\pi/4$ mit einem Fehler von höchstens 10^{-4} zu berechnen.

4. Jemand möchte $\sinh 1$ auf hundert Dezimalstellen genau berechnen. Wieviele Glieder der Taylor-Entwicklung $j_0^\infty \sinh$ muß sie berücksichtigen?
5. (M) Die Gleichung $z^2 - 3z + 27 = 0$ besitzt eine Lösung in der Nähe von $z_0 := 1 + 5i$. Man führe zwei Newton-Schritte durch zur Bestimmung eines besseren Näherungswerts z_2 .

6. (M) Es sei

$$f(t) := \frac{t - t^3/3}{2 - t}.$$

Berechne das Taylor-Polynom $j_0^7 f(t)$ und zeichne in einer einzigen Figur (den Ausschnitt passend wählen) die Graphen von $f, j_0^1 f, j_0^2 f, \dots, j_0^5 f$.

7. (M) Entwickle die Funktion $f(t) := t^5$ an der Stelle $a := 2$ nach Taylor. Um genau zu sein: Verlangt ist das Polynom $j_2^3 f(t)$.
8. Bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(t) := \cos t \cosh t$ an der Stelle $a := 0$.
- (a) Berechne die ersten sechs nichtverschwindenden Terme mit Hilfe von (M).
- (b) Erwünscht wäre eine Formel für den n -ten Koeffizienten. (*Hinweis:* Stelle f als Summe von Exponentialfunktionen dar.)
9. Ein divisionsfreier Algorithmus zur Berechnung von Kehrwerten: Fasse den Kehrwert einer Zahl $c \in]0, 2[$ als Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{x} - c = 0$$

auf und wende das Newtonsche Verfahren an. Es resultiert eine einfache Rekursionsformel, die mit $x_0 := 1$ beginnend eine schnell gegen $1/c$ konvergente Folge x_n produziert. Für eine Fehlerabschätzung betrachte man die weitere Folge $y_n := cx_n - 1$.

10. Behandle die Aufgabe 2.2.8 nocheinmal mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens. Vergleiche die Konvergenzraten.
11. Ausgehend vom Näherungswert $x_0 := 1$ bestimme man mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens die Nullstelle der Funktion $f(x) := x^2$. Man berechne explizit den n -ten Näherungswert x_n . Wie gut ist die Konvergenz, und warum ist sie nicht besser?
12. Die Funktion f ist für $x \neq 0$ definiert durch

$$f(x) := \frac{\sinh x - \sin x}{\cosh x - \cos x}$$

und an der Stelle $x = 0$ sinngemäß, d.h. durch $f(0) := \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Berechne $f(0)$ und $f'(0)$. (*Hinweis:* Anfangsstücke der Taylor-Reihen von Zähler bzw. Nenner betrachten!)

13. Es sei

$$f(t) := \sin t + b \sin(2t) + c \sin(3t),$$

wobei die Parameter b und c so festzulegen sind, daß die Ableitungen

$$f^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

bis zu möglichst hoher Ordnung verschwinden.

- (a) Bestimme b und c .
- (b) Es gilt dann

$$f(t) = t^r (A + o(1)) \quad (t \rightarrow 0).$$

Bestimme r und A ($\neq 0$).

3.5 Differentialgleichungen I

Modellbildung, einführende Beispiele

Man erhält ein mathematisches Modell von einem realen, in der Natur oder der Technik angesiedelten "System", indem man einige als wesentlich und in ihrer Gesamtheit als ausreichend erachtete Zustandsgrößen (zum Beispiel: Druck, Lage und Geschwindigkeit einzelner Komponenten, Stromstärken an bestimmten Stellen eines Netzwerks usw.) herausgreift und sich überlegt, wie diese Größen in ihrer zeitlichen Entwicklung aneinander gekoppelt sind.

Das Ergebnis dieser Überlegungen sind die sogenannten **konstituierenden Gleichungen** des betreffenden Systems. Bei Systemen von endlich vielen Freiheitsgraden sind das in aller Regel Differentialgleichungen oder Systeme von Differentialgleichungen. Die Herleitung dieser Gleichungen gehört zur Theorie des betreffenden realen Systems, die Mathematik stellt nur die Begriffe, wie "Ableitung", "Vektorraum", "periodisch" usw., zur Verfügung. Es gibt über das Aufstellen eines mathematischen Modells keine "Metatheorie" mit eigenen Lehrsätzen, die in entsprechenden Vorlesungen doziert werden könnte. Es ist vielmehr so, daß man nur an Hunderten von Beispielen beobachten und nachvollziehen kann, wie das etwa vor sich geht.

① Eine radioaktive Substanz X wird durch Zerfall ihrer Atome abgebaut zur Substanz Y , diese zur Substanz Z . Über den Zerfallsmechanismus macht man sich folgende Vorstellungen: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein einzelnes zur Zeit t noch lebendes X -Atom in dem sehr kurzen Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ zerfällt, ist proportional zu Δt . Es gibt also eine Materialkonstante $\lambda > 0$ mit

$$\mathcal{P}[\text{Zerfall in } [t, t + \Delta t]] \doteq \lambda \Delta t .$$

Im weiteren zerfallen die Atome unabhängig voneinander und unabhängig von ihrer Vorgeschichte. Bezeichnet also $N(t)$ die Anzahl der zur Zeit t noch lebenden X -Atome, so kann man erwarten, daß im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ insgesamt

$$N(t) \cdot \mathcal{P}[\text{Zerfall in } [t, t + \Delta t]]$$

Stück davon zerfallen. Folglich gilt

$$N(t + \Delta t) - N(t) \doteq -N(t) \lambda \Delta t . \tag{1}$$

Ein X -Atom hat die sehr kleine Masse m_X . Wir dürfen daher die zur Zeit t vorhandene makroskopische Substanzmenge

$$x(t) := N(t) m_X$$

(= Totalmasse an Substanz X) als kontinuierliche Variable auffassen. Aus (1) folgt sofort

$$x(t + \Delta t) - x(t) \doteq -x(t) \lambda \Delta t$$

und somit nach Division mit Δt :

$$(\dot{x}(t) \doteq) \quad \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \doteq -\lambda x(t),$$

wobei dieser Näherung eine sehr kurze Zeitspanne $\Delta t > 0$ zugrundeliegt. Nun kommt ein weiterer Gedankensprung: Wir "gehen zum Limes über" und erklären: Für die reellwertige Funktion $x(\cdot)$, die die Totalmasse an Substanz X modelliert, gilt *exakt*

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t), \quad (2)$$

und zwar zu jedem Zeitpunkt t . In anderen Worten: Die unbekannt Funktion $x(\cdot)$ und ihre Ableitung $\dot{x}(\cdot)$ sind miteinander verknüpft durch die Gleichung

$$\dot{x} = -\lambda x.$$

Wir haben hier zum ersten Mal eine sogenannte **Differentialgleichung** vor uns. Die Unbekannte in dieser Gleichung ist nicht eine Zahl oder ein Vektor, sondern eine *Funktion*: Gesucht sind diejenigen Funktionen $t \mapsto x(t)$, die *identisch in t* die Gleichung (2) befriedigen.

Betrachten wir alle drei Substanzen gleichzeitig, so werden wir offenbar auf das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda x \\ \dot{y} &= \lambda x - \mu y \\ \dot{z} &= \mu y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

geführt; dabei bezeichnet μ die Zerfallskonstante der Substanz Y . Ist $\mu < \lambda$, was wir im weiteren annehmen wollen, so zerfällt Y langsamer als X . Die Gleichungen (3) bilden die konstituierenden Gleichungen des betrachteten Substanzgemisches; sie gelten für alle Abläufe, bei denen diese drei Substanzen gleichzeitig im Spiel sind.

Ein real durchgeführtes Experiment beginnt zur Zeit $t := 0$ mit drei vorgegebenen Anfangsmengen

$$x(0) := x_0, \quad y(0) := y_0, \quad z(0) := z_0. \quad (4)$$

Die physikalische Anschauung sagt uns, daß der weitere Ablauf durch diese **Anfangsbedingungen** eindeutig bestimmt ist. Demnach ist zu erwarten, daß das System (3) a priori unendlich viele Lösungen besitzt und daß erst die Angaben (4) einen ganz bestimmten Ablauf

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

aus dieser Lösungsgesamtheit \mathcal{L} festlegen. In anderen Worten: Das **Anfangswertproblem** (3)^(4) besitzt genau eine Lösung.

Wir wollen nun diese Lösung (auf unkomplizierte Weise) bestimmen. Als erstes erfüllt jedenfalls

$$x(t) := x_0 e^{-\lambda t}$$

die auf $x(\cdot)$ allein bezüglichen Bedingungen. Für $y(\cdot)$ machen wir den naheliegenden Ansatz

$$y(t) = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t},$$

wobei die Koeffizienten A und B noch bestimmt werden müssen. Es folgt

$$\dot{y}(t) = -A\lambda e^{-\lambda t} - B\mu e^{-\mu t}.$$

Aufgrund der zweiten Gleichung (3) ist nun dafür zu sorgen, daß *identisch in t* gilt:

$$-A\lambda e^{-\lambda t} - B\mu e^{-\mu t} = \lambda(x_0 e^{-\lambda t}) - \mu(Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t})$$

bzw.

$$((\mu - \lambda)A - \lambda x_0) e^{-\lambda t} \equiv 0. \quad (5)$$

Falls es keine Lösung $y(t)$ der vorgeschlagenen Form gibt, so muß sich das jetzt herausstellen: Es ist dann unmöglich, die Gleichung (5) identisch in t zu befriedigen. Es geht aber: Mit

$$A = -\frac{\lambda x_0}{\lambda - \mu}$$

ist (5) erfüllt. Aufgrund der Anfangsbedingung für $y(\cdot)$ muß weiter $A+B = y_0$ sein, so daß wir

$$B = y_0 + \frac{\lambda x_0}{\lambda - \mu}$$

erhalten. Damit ist $y(\cdot)$ bestimmt zu

$$y(t) = y_0 e^{-\mu t} + \frac{\lambda x_0}{\lambda - \mu} (e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}).$$

Für $z(\cdot)$ könnten wir ebenfalls einen geeigneten Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten hinschreiben. Stattdessen bemerken wir, daß nach (3) gilt:

$$(x + y + z)' = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0 .$$

Hieraus folgt mit Satz (3.8):

$$x(t) + y(t) + z(t) \equiv x_0 + y_0 + z_0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

(“Erhaltung der Substanz”), und es ergibt sich

$$\begin{aligned} z(t) &= x_0 + y_0 + z_0 - (x(t) + y(t)) \\ &= z_0 + y_0(1 - e^{-\mu t}) + x_0 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - \mu} e^{-\mu t} + \frac{\mu}{\lambda - \mu} e^{-\lambda t} \right) . \end{aligned}$$

Damit ist das Anfangswertproblem (3)^(4) vollständig gelöst. Wie erwartet, gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = x_0 + y_0 + z_0 .$$

Figur 3.5.1 zeigt einen typischen Ablauf dieses Experiments. ○

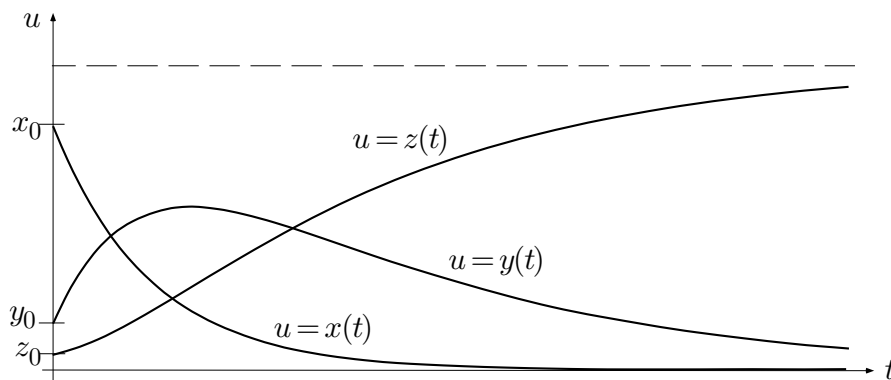


Fig. 3.5.1

② Wir betrachten das in Fig. 3.5.2 skizzierte mechanische System. Die Feder übt (in beiden Richtungen) eine zum Ausschlag y proportionale Rückstellkraft aus, und die Dämpfung erzeugt eine zur Momentangeschwindigkeit \dot{y} proportionale Reibungskraft; überdies ist eine (zum Beispiel durch Ein- und Ausschalten eines Magneten bewirkte) äußere Anregung (“Störkraft”) $K(t)$ vorgesehen, die als bekannt vorausgesetzt wird und auch $\equiv 0$ sein kann. Es handelt sich hier um ein System mit einem einzigen Freiheitsgrad: Die Aktion des Systems wird vollständig beschrieben durch das Verhalten der einen Lagevariablen y .

In jedem Moment wirken auf den Massenpunkt drei Kräfte, die zusammen eine Beschleunigung \ddot{y} erzielen. Diese Vorstellung führt nach Newton auf die **Bewegungsgleichung**

$$m\ddot{y} = -fy - b\dot{y} + K(t)$$

bzw.

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = K(t) \quad (6)$$

mit positiven Systemkonstanten m, b, f . Dies ist schon die konstituierende Gleichung des vorliegenden Systems: Für jeden möglichen Ablauf $t \mapsto y(t)$ stehen die drei Funktionen $y(\cdot)$, $\dot{y}(\cdot)$ und $\ddot{y}(\cdot)$ in der Relation (6), und das heißt: Es gilt *identisch in t* :

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + fy(t) \equiv K(t) . \quad (6')$$

Die Gleichung (6) ist eine **lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**; sie ist **homogen**, falls $K(t) \equiv 0$ ist. Eine **Lösung** dieser Gleichung ist eine Funktion $y(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Identität (6') realisiert.

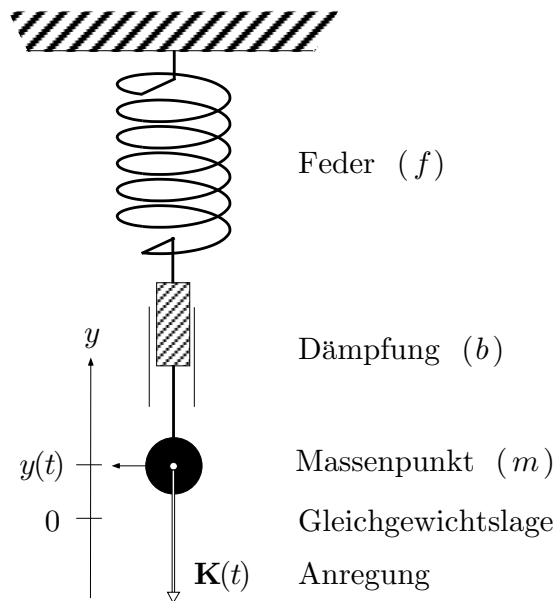


Fig. 3.5.2

Von den unendlich vielen möglichen Abläufen wird einer bestimmt, sobald Anfangsbedingungen formuliert sind. Offenbar genügt es nicht, den Ausschlag zur Zeit $t = 0$ anzugeben, da verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten zu ganz verschiedenen Abläufen führen. Die physikalische Anschauung sagt

uns, daß folgender Satz von Anfangsbedingungen notwendig und hinreichend ist:

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0; \quad (7)$$

dabei sind y_0 und v_0 vorgegebene Zahlen.

Lösungsansatz

Eine allgemeine Methode zur Behandlung von (6) steht uns (noch) nicht zur Verfügung. Zur Vereinfachung beschränken wir uns im weiteren auf den homogenen ("ungestörten") Fall

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = 0. \quad (8)$$

Die ähnliche, aber noch einfachere Gleichung

$$\dot{y} - ay = 0, \quad \text{bzw.} \quad \dot{y} = ay$$

hat die Lösungen $y(t) = Ce^{at}$, $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir versuchen daher für (8) den Lösungsansatz

$$y(t) := e^{\lambda t},$$

wobei wir uns die Wahl von λ noch vorbehalten. Wegen $\dot{y}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{y}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ ist dieser Ansatz dann erfolgreich, wenn wir durch geeignete Wahl des (komplexen!) Parameters λ die "Einsetzung" in (8), also

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + fe^{\lambda t} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (m\lambda^2 + b\lambda + f)e^{\lambda t} = 0$$

identisch in t befriedigen können. Es zeigt sich, daß λ der quadratischen Gleichung

$$m\lambda^2 + b\lambda + f = 0 \quad (9)$$

genügen muß. Man nennt $\text{chp}(\lambda) := m\lambda^2 + b\lambda + f$ das zu (8) gehörige **charakteristische Polynom**, (9) die **charakteristische Gleichung** und deren Lösungen die **Eigenwerte** von (8).

Eigenwerte sind die beiden (unter Umständen komplexen) Zahlen

$$\lambda_1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m}, \quad \lambda_2 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m},$$

wobei wir für das weitere $b^2 - 4fm > 0$ annehmen wollen (starke Dämpfung), so daß λ_1 und λ_2 reell ausfallen, und zwar ist

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0.$$

Wir haben damit vorerst die beiden Lösungen

$$Y_1(t) := e^{\lambda_1 t}, \quad Y_2(t) := e^{\lambda_2 t}.$$

Die Linearität und Homogenität der Gleichung (8) hat nun zur Folge, daß mit $Y_1(\cdot)$ und $Y_2(\cdot)$ von selbst auch jede **Linearkombination**

$$y(t) := c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

eine Lösung von (8) ist:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + b\dot{y} + fy &= m(c_1 Y_1 + c_2 Y_2)'' + b(c_1 Y_1 + c_2 Y_2)' + f(c_1 Y_1 + c_2 Y_2) \\ &= c_1 (m\ddot{Y}_1 + b\dot{Y}_1 + fY_1) + c_2 (m\ddot{Y}_2 + b\dot{Y}_2 + fY_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die zweiparametrische Funktionenschar (10) stellt schon die Gesamtheit \mathcal{L} der Lösungen von (8) dar. Alle Lösungen nehmen mit $t \rightarrow \infty$ exponentiell ab (Fig. 3.5.3). Schreiben wir sie in der Form

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\lambda_1 t} (c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) \\ &= e^{\lambda_1 t} (c_1 + o(1)) \quad (t \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

so sehen wir, daß die "Zeitkonstante" dieser Abnahme durch den grösseren Eigenwert λ_1 bestimmt ist, und weiter, daß es höchstens einen Nulldurchgang gibt, nämlich dann, wenn die monotone Funktion

$$t \mapsto c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

eine Nullstelle besitzt.

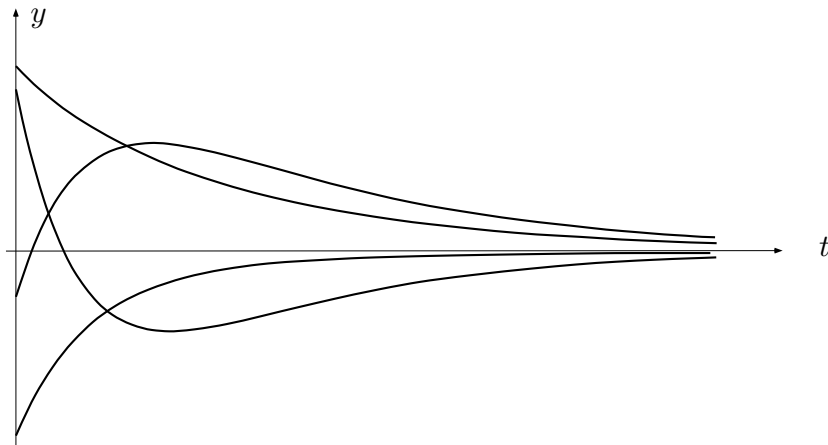


Fig. 3.5.3

Sind Anfangsbedingungen (7) vorgegeben, so werden dadurch die **Integrationskonstanten** c_1 und c_2 bestimmt. Wir müssen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \dot{y}(t) &= c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

an der Stelle $t := 0$ betrachten und erhalten wegen $e^0 = 1$ das folgende Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= y_0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 &= v_0 \end{aligned} \right\}.$$

Es folgt

$$c_1 = \frac{v_0 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

so daß wir definitiv als Lösung des Anfangswertproblems (8)^(7) erhalten:

$$y(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left((v_0 - \lambda_2 y_0) e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 y_0 - v_0) e^{\lambda_2 t} \right). \quad \circ$$

Differentialgleichungen erster Ordnung, allgemein

In den beiden einführenden Beispielen diente die Differentialgleichung zur Beschreibung eines gewissen zeitlichen Ablaufs; wir haben daher die unabhängige Variable mit t bezeichnet. Wir können aber auch geometrisch argumentieren; es geht dann um “Lösungskurven” in der (x, y) -Ebene.

Eine **Differentialgleichung erster Ordnung** hat allgemein folgende Form:

$$y' = f(x, y); \quad (11)$$

dabei ist die **rechte Seite** $f: \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$ eine *gegebene* Funktion mit einem gewissen Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Die Gleichung (11) definiert auf implizite Weise eine Kurvenschar in der (x, y) -Ebene, und zwar folgendermaßen: Für jedes $(x, y) \in \Omega$ stellt der Funktionswert $f(x, y)$ eine im Punkt (x, y) “angeschriebene” Steigung dar. Gesucht sind die Funktionen

$$y(\cdot): \quad x \mapsto y(x) \quad (x \in I),$$

mit folgender Eigenschaft: Die Tangentensteigung des Graphen \mathcal{G} von $y(\cdot)$ stimmt an jeder Stelle $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}$ mit dem dort angeschriebenen f -Wert $f(x_0, y_0) = f(x_0, y(x_0))$ überein (Fig. 3.5.4). Diese Funktionen $y(\cdot)$ genügen also *identisch in x* der Beziehung

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (x \in I).$$

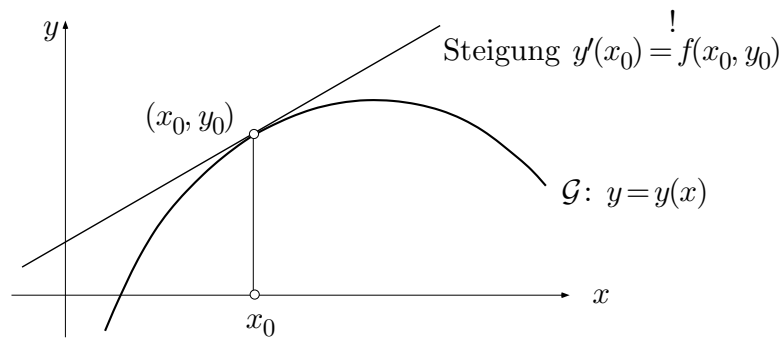


Fig. 3.5.4

In anderen Worten: Die Differentialgleichung (11) definiert ein **Richtungsfeld** in $\text{dom}(f) = \Omega$ (Fig. 3.5.5). Gesucht sind diejenigen Kurven in Ω , die sich in jedem einzelnen Kurvenpunkt der dort gegebenen Richtung anschmiegen.

Anmerkung: In der Theorie der Differentialgleichungen ist es üblich, denselben Buchstaben als Koordinatenvariable *und* als Variable für Funktionen mit Werten in der betreffenden Koordinate zu nehmen, den Buchstaben y also als Koordinate in der (x, y) -Ebene und als Variable für Funktionen, deren Graph in der (x, y) -Ebene liegt.

In der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen werden unter anderem die folgenden Grundtatsachen bewiesen:

(3.16) (a) Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine “vernünftige” Funktion, so bilden die Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ eine einparametrische Funktionenschar

$$y_c(\cdot) : \quad x \mapsto y = y_c(x) .$$

(b) Durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ geht genau eine Lösungskurve, in anderen Worten: Das **Anfangswertproblem**

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung

$$x \mapsto y(x) \quad (x \in I),$$

wobei das Definitionsintervall I noch von (x_0, y_0) abhängen kann.

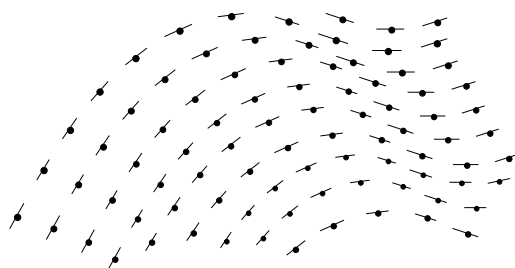


Fig. 3.5.5

Für die Beweisidee verweisen wir auf Satz (4.19) und das daran anschließende Beispiel 4.6.①. — Zu (a): Der Parameter c “nummeriert” sozusagen die einzelnen Lösungen.

③ Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = -x/y \quad (y > 0).$$

Die im Punkt (x, y) vorgeschriebene Steigung

$$f(x, y) := -x/y$$

liefert die auf dem Ortsvektor (x, y) senkrecht stehende Richtung, denn $-x/y$ ist negativ reziprok zu y/x (Fig. 3.5.6). Die Lösungskurven sind offenbar Halbkreisbögen um O , und zwar geht durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \text{dom}(f)$ genau ein derartiger Bogen. Analytisch wird die Lösungsschar durch

$$y_c(x) = \sqrt{c^2 - x^2} \quad (-c < x < c)$$

beschrieben.

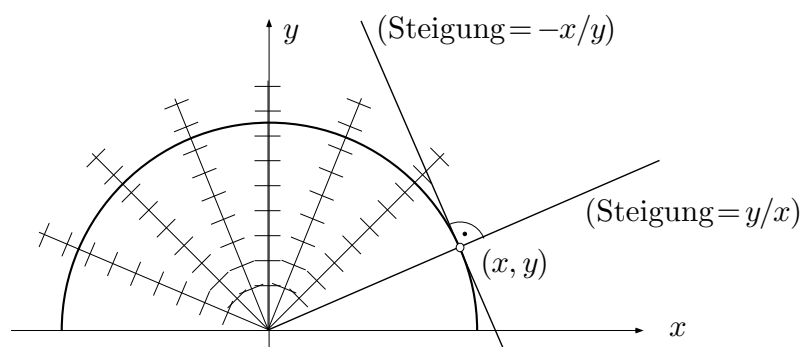


Fig. 3.5.6

④ Die Differentialgleichung

$$y' = 3|y|^{2/3}$$

besitzt die “ordentlichen” Lösungen

$$y_c(x) := (x - c)^3, \quad c \in \mathbb{R},$$

sowie die “außerordentliche” Lösung $y(x) \equiv 0$; und wenn man will, kann man aus diesem Material weitere Lösungen fabrizieren (Fig. 3.5.7). Die zu den Punkten $(x_0, 0)$ gehörigen Anfangswertprobleme besitzen also mehrere Lösungen, in scheinbarem Widerspruch zu Satz (3.16). Dieses Phänomen hat folgenden Grund: Die rechte Seite $f(x, y) := 3|y|^{2/3}$ ist in den Punkten $(x_0, 0)$ nicht genügend “vernünftig” (genau: nicht lipstetig bezüglich y), denn die Differenzenquotienten

$$\left| \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} \right| = 3|y|^{-1/3}$$

sind für $y \rightarrow 0$ unbeschränkt. ○

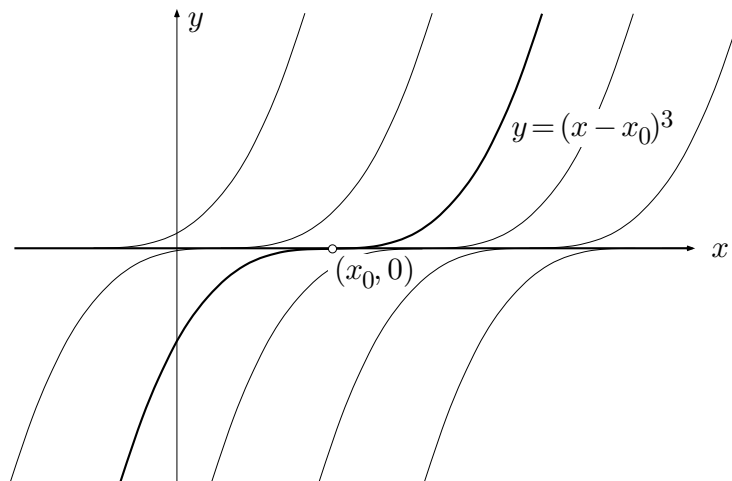


Fig. 3.5.7

Ein einfaches numerisches Verfahren

Von der geometrischen Interpretation her kommt man auf das folgende einfache Verfahren zur numerischen Behandlung eines Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Das Rezept lautet (siehe die Fig. 3.5.8):

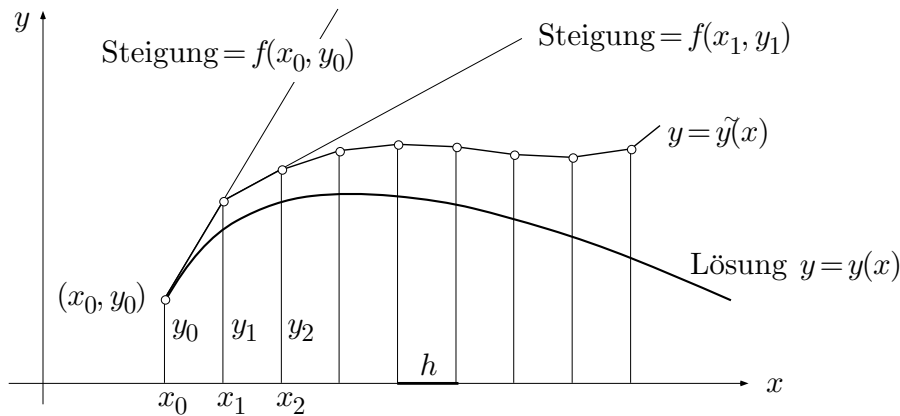


Fig. 3.5.8

- Wähle eine Schrittweite $h > 0$.
- Für $k \geq 0$ setze rekursiv

$$\begin{aligned} x_{k+1} &:= x_k + h & (\implies x_n = x_0 + nh), \\ y_{k+1} &:= y_k + f(x_k, y_k) h. \end{aligned}$$

Ist $y(\cdot)$ die tatsächliche Lösung des vorliegenden Anfangswertproblems, so liefert dieses sogenannte **Polygonverfahren** zunächst nur an diskreten Stellen x_k Näherungswerte y_k :

$$y(x_k) \doteq y_k.$$

Man kann aber die Punkte (x_k, y_k) durch einen Streckenzug oder auch durch eine glatte Kurve verbinden und erhält damit eine "angenäherte Lösung" $\tilde{y}(\cdot)$. Der Fehler $|\tilde{y}(x) - y(x)|$ ist natürlich um so kleiner, je kleiner die Schrittweite h gewählt wurde, und wächst im wesentlichen exponentiell mit der Distanz des Punktes x von x_0 .

③ (Forts.) Wir behandeln das Anfangswertproblem

$$y' = -x/y, \quad y(0) = 1$$

zunächst mit der Schrittweite $h := \frac{1}{16}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 1; \\ x_1 &= \frac{1}{16}, & y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)h = 1 - \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{16} = 1; \\ x_2 &= \frac{2}{16}, & y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)h = 1 - \frac{1/16}{1} \cdot \frac{1}{16} = 0.9961; \\ x_3 &= \frac{3}{16}, & y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)h = 0.9961 - \frac{2/16}{0.9961} \cdot \frac{1}{16} = 0.9883; \\ & \vdots & & \\ x_8 &= \frac{8}{16}, & y_8 &= 0.8852. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Näherungswert $y\left(\frac{1}{2}\right) \doteq 0.8852$. Wählen wir stattdessen $h := \frac{1}{256}$, so liefert die Rechnung

$$y\left(\frac{1}{2}\right) \doteq y_{128} = 0.86726 .$$

Nun ist ja die wahre Lösung der Kreisbogen $y = \sqrt{1-x^2}$. Der exakte Wert an der Stelle $x := \frac{1}{2}$ ist somit

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.8660 .$$

○

Differentialgleichungen höherer Ordnung, Systeme von Dglen

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y')$$

definiert eine zweiparametrische Kurvenschar in der (x, y) -Ebene. Gefragt wird nach denjenigen Funktionen

$$x \mapsto y(x) \quad (x \in I) ,$$

deren Graphen \mathcal{G} an jeder Stelle $(x, y) \in \mathcal{G}$ die dort je nach Steigung y' vorgeschriebene "Krümmung" $y'' = f(x, y, y')$ haben; siehe die Fig. 3.5.9. (Die dort durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden Lösungskurven sind je nach Steigung verschieden stark gekrümmt.)

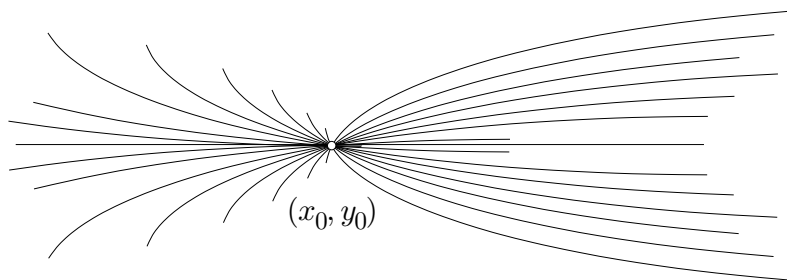


Fig. 3.5.9

Die Lösungsfunktionen $y(\cdot)$ genügen also *identisch in x* der Beziehung

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \quad (x \in I) .$$

Für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung sieht ein korrekt gestelltes Anfangswertproblem folgendermaßen aus:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0.$$

Hier ist $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion, und die Anfangswerte y_0, v_0 sind gegebene Zahlen (vgl. Beispiel ②).

In Wirklichkeit kommen Differentialgleichungen höherer als vierter Ordnung kaum vor, wohl aber **Systeme von n ($\gg 1$) Differentialgleichungen erster Ordnung** für n unbekannte Funktionen, siehe Beispiel ①. Ein derartiges System sieht allgemein folgendermaßen aus:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Tritt die Variable t rechter Hand nicht in Erscheinung, so spricht man von einem **autonomen** ("sich selbst überlassenen") System. Die i -te Gleichung,

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad \text{bzw.} \quad \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n),$$

drückt aus, in welcher Weise die zeitliche Änderungsrate der Größe x_i (zum Beispiel des Drucks im Reaktorgefäß Nr. i) vom augenblicklichen Wert aller einbezogenen Größen x_1, \dots, x_n und allenfalls von t -abhängigen äußeren Einflüssen abhängt.

Der Existenz- und Eindeigkeitssatz (3.16)(b) wird von Anfang an für Systeme bzw. in vektorieller Form angesetzt und bewiesen. Es geht dann um Anfangswertprobleme der folgenden Gestalt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Mit Hilfe eines einfachen Tricks lassen sich Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein System der Form (12) verwandeln. Damit werden die für derartige Systeme entwickelten numerischen Methoden auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung verfügbar. Es sei also eine Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (13)$$

vorgelegt. Die Idee besteht darin, die unbekannte Funktion $y(\cdot)$ durch Übergang zur sogenannten **Jet-Extension**

$$(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) =: (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

in ein n -komponentiges Objekt zu verwandeln, für das dann n Differentialgleichungen erster Ordnung hingeschrieben werden können. Diese n Differentialgleichungen lauten folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-2} &= x_{n-1} \\ \dot{x}_{n-1} &= f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \right\} . \quad (14)$$

Hier sorgen die ersten $n-1$ Gleichungen dafür, dass jedes x_k ($1 \leq k \leq n-1$) die Ableitung seines Vorgängers x_{k-1} und folglich die k -te Ableitung von x_0 ist, und die letzte Gleichung garantiert

$$x_0^{(n)} = \frac{d}{dt} x_0^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1} = f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(t, x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}) .$$

Ist also

$$t \mapsto (x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t))$$

eine Lösung des Systems (14) bzw. eines zugehörigen Anfangswertproblems, so ist $y(t) := x_0(t)$ eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (13).

Es gibt keinen Algorithmus, mit dem man jede formelmäßig vorliegende Differentialgleichung formelmäßig lösen (“integrieren”) kann, genau so wenig, wie es einen Algorithmus gibt, der beliebige Gleichungen für eine unbekannte Zahl x , zum Beispiel

$$x^3 + \sin x - e^{-x} = 0 ,$$

akzeptiert und nach endlich vielen Operationen die exakte Lösung liefert. Es gibt hingegen wichtige Typen und Klassen von Differentialgleichungen, die formelmässig gelöst werden können; wir werden im folgenden einige davon behandeln. Das vollständigste Verzeichnis derartiger “lösbarer” Differentialgleichungen findet sich in

E. Kamke: Differentialgleichungen — Lösungsmethoden und Lösungen.
10. Auflage, 1983 (Teubner).

Aufgaben

1. Es sei $s > 0$ gegeben. Man bestimme die Differentialgleichung der Kurven $\gamma: y = y(x)$ im ersten Quadranten, die die Eigenschaft (a) bzw. (b) bzw. (c) besitzen.
 - (a) Die Tangentenabschnitte zwischen Berührungspunkt und x -Achse besitzen alle dieselbe Länge s .
 - (b) Die Tangentenabschnitte zwischen den beiden Koordinatenachsen besitzen alle dieselbe Länge s .
 - (c) Die Dreiecke, begrenzt durch Tangente, Ordinate im Berührungspunkt und x -Achse, haben alle denselben Flächeninhalt s^2 .

2. Bestimme die Differentialgleichung des freien Falls

- (a) in der Nähe der Erdoberfläche, unter Vernachlässigung des Luftwiderstands;
- (b) über der Erdoberfläche, wobei nun die Abnahme der Schwerkraft zu berücksichtigen ist;
- (c) im Erdinnern.

An physikalischen Konstanten erscheinen nur die Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$ und der Erdradius R im Ergebnis. Für (c) muß man wissen, daß die den fallenden Körper umfassende Erdrinde keine Kraft auf ihn ausübt und die weiter innen liegende Erdmasse so wirkt, als ob sie im Erdmittelpunkt konzentriert wäre.

3. (a) Es sei

$$\Gamma: \quad x^2 + (y - c)^2 = c^2 \quad (c \in \mathbb{R})$$

die Schar der Kreise, die die x -Achse im Ursprung berühren. Leite mit Hilfe geometrischer Betrachtungen die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ dieser Schar her.

- (b) Eine **Orthogonaltrajektorie** der Schar Γ ist eine Kurve σ , die in jedem ihrer Punkte die Scharkurve γ durch den betreffenden Punkt senkrecht schneidet. Wie lautet die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien?
 - (c) Zeichne einige Kreise der Schar Γ sowie einige Orthogonaltrajektorien. Die Figur bringt einen auf eine plausible Vermutung betreffend die Orthogonalschar Γ^\perp . Beweise diese Vermutung elementargeometrisch.
 - (d) Verifiziere, daß die in (c) geometrisch ermittelten Orthogonaltrajektorien in der Tat Lösungen der in (b) gefundenen Differentialgleichung sind.
4. (a) Zeichne das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = \min\{y, 1\} .$$

- (b) Bestimme explizit die beiden Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$ mit den Anfangspunkten

$$P_1 := (0, -1), \quad P_2 := \left(0, \frac{1}{e}\right).$$

5. (M) Das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 - x^2, \quad y(0) = 1$$

besitzt eine Lösung der Form $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$, womit eine Potenzreihe gemeint ist. Bestimme c_0, \dots, c_4 .

3.6 Differentialgleichungen II

Homogene lineare Differentialgleichungen, allgemein

Nach den vorbereitenden Beispielen und allgemeinen Bemerkungen des vorangehenden Abschnitts sind wir reif für die formale Behandlung einer wichtigen Klasse von Differentialgleichungen. Die betreffenden Differentialgleichungen werden nicht mit Hilfe der Integralrechnung “integriert”, sondern mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes. Die in Beispiel 3.5.② behandelte Gleichung (8) gehört zu dieser Klasse und letzten Endes auch das System (3) von Beispiel 3.5.①. — Die nun folgende Theorie ist eine schöne Anwendung der linearen Algebra auf die Analysis.

Wir bezeichnen die unabhängige Variable wieder mit t und verwenden den Buchstaben y , auch mit Index, als Variable für beliebig oft differenzierbare reell- oder komplexwertige Funktionen von t :

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto y(t).$$

Die Gesamtheit dieser Funktionen bezeichnen wir mit C^∞ . — Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (1)$$

mit reellen oder komplexen a_i heißt **homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**. Sind die a_i reell, so werden reellwertige Lösungen gewünscht, sind die a_i komplex, so dürfen auch die Lösungen komplex sein.

Es ist in diesem Zusammenhang üblich, die Ableitungsoperation mit D zu bezeichnen:

$$D : \quad y \mapsto Dy := y'.$$

In dieser Auffassung ist D ein **linearer Operator**, nämlich eine lineare Abbildung von C^∞ nach C^∞ . Dieser Operator akzeptiert C^∞ -Funktionen als Input und produziert C^∞ -Funktionen als Output, und für beliebige $y_1, y_2 \in C^\infty$, $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$D(y_1 + y_2) = Dy_1 + Dy_2, \quad D(\alpha y) = \alpha Dy.$$

Sind A und B zwei derartige Operatoren (zum Beispiel Potenzen von D , es gibt aber auch andere), so ist ihre Summe $A + B$ (wie die Summe von zahlenwertigen Funktionen) in naheliegender Weise definiert durch

$$(A + B)y := Ay + By,$$

analog das α -fache von A durch

$$(\alpha A)y := \alpha(Ay) .$$

Diese Vereinbarungen setzen uns instand, die linke Seite von (1) in wesentlich kompakterer Form zu schreiben:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y \\ &= D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \dots + a_1Dy + a_0y \\ &= (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y \\ &= Ly . \end{aligned}$$

In dem **Differentialoperator**

$$L := D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0 \quad (2)$$

sind sämtliche vorzunehmenden Differentiationen eingespeichert, so daß nunmehr (1) die suggestive Form

$$Ly = 0 \quad (1')$$

erhält.

Das mit den Koeffizienten von (1) "rein formal" gebildete Polynom

$$\text{chp}(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

in der (komplexen) Hilfsvariablen λ heißt **charakteristisches Polynom** der Differentialgleichung (1); es wird in unserer Theorie eine zentrale Rolle spielen. Mit Hilfe dieses Polynoms können wir jedenfalls die Definition (2) von L in der folgenden Form schreiben:

$$L := \text{chp}(D) . \quad (2')$$

Wir benötigen noch einen Begriff aus der linearen Algebra: Eine endliche Kollektion $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ von Funktionen $y_k \in C^\infty$ heißt **linear unabhängig**, wenn keine dieser Funktionen eine Linearkombination der übrigen ist.

Bsp: Die Funktionen \exp , \cos , \sin sind linear unabhängig, die Funktionen \exp , \cosh , \sinh aber nicht, denn es ist

$$e^t \equiv \cosh t + \sinh t .$$

Die Gesamtheit der Lösungen von (1) bzw. (1') bezeichnen wir mit \mathcal{L} . Diese Lösungsmenge \mathcal{L} ist nicht einfach ein Sack voll Funktionen, sondern besitzt eine bestimmte algebraische Struktur:

(3.17) \mathcal{L} ist ein n -dimensionaler (reeller oder komplexer) Vektorraum; das heißt:

(a) Sind y_1, y_2 und y Lösungen, so sind auch die Funktionen $y_1 + y_2$ und αy ($\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\in \mathbb{C}$) Lösungen.

(b) Es gibt in \mathcal{L} (verschiedene) Basen von je n linear unabhängigen Lösungen y_0, y_1, \dots, y_{n-1} . Jede Lösung $y \in \mathcal{L}$ ist dann in der Form

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_{n-1} y_{n-1}$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$ bzw. $\in \mathbb{C}$ darstellbar.

Nach diesem Satz kennen wir alle Lösungen, wenn wir n linear unabhängige Lösungen kennen. Beachte, daß die Basis von \mathcal{L} (wie immer in der linearen Algebra) nicht eindeutig bestimmt ist.

□ Unser $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ist ein linearer Operator. Aus $y_1, y_2, y \in \mathcal{L}$ folgt daher

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = 0, \quad L(\alpha y) = \alpha(Ly) = 0,$$

das heißt: $y_1 + y_2 \in \mathcal{L}$, $\alpha y \in \mathcal{L}$. Dies beweist (a).

Zum Beweis von (b) lösen wir n verschiedene Anfangswertprobleme, nämlich für jedes einzelne $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ das Problem

$$\text{AWP}_r : \begin{cases} Ly = 0; \\ y^{(k)}(0) = 0 \quad (0 \leq k \leq n-1, k \neq r), \\ y^{(r)}(0) = 1. \end{cases}$$

Jedes dieser n Probleme besitzt nach Satz **(3.16)**(b) (bzw. dessen Analogon für Differentialgleichungen n -ter Ordnung) eine wohlbestimmte Lösung $y_r(\cdot)$.

Die n Funktionen $y_0(\cdot), y_1(\cdot), \dots, y_{n-1}(\cdot)$ sind linear unabhängig, denn jedes $y_r(\cdot)$ besitzt eine Eigenschaft, die von keiner Linearkombination der übrigen produziert werden kann: Es ist $y_r^{(r)}(0) = 1$, aber $y_k^{(r)}(0) = 0$ für alle $k \neq r$.

Es sei andererseits $\tilde{y} \in \mathcal{L}$ eine beliebige Lösung, und es seien $c_k := \tilde{y}^{(k)}(0)$ ($0 \leq k \leq n-1$) ihre Ableitungswerte bis zur Ordnung $n-1$ an der Stelle 0. Dann ist

$$\tilde{y} = c_0 y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_{n-1} y_{n-1};$$

denn beide Seiten dieser Gleichung sind Lösungen desselben Anfangswertproblems

$$Ly = 0, \quad y^{(k)}(0) = c_k \quad (0 \leq k \leq n-1),$$

nämlich \tilde{y} nach Definition der c_k und die rechte Seite wegen der besonderen Anfangswerte $y_r^{(k)}(0) = \delta_{rk}$.

Zusammengenommen ergibt sich, dass die n Funktionen $y_0(\cdot), \dots, y_{n-1}(\cdot)$ eine Basis von \mathcal{L} bilden. └

Die charakteristische Gleichung

Die Basis von \mathcal{L} , die wir im folgenden explizit angeben werden, ist allerdings nicht die Kollektion y_0, y_1, \dots, y_{n-1} von Satz (3.17), sondern besteht aus n anderen Funktionen Y_k ($1 \leq k \leq n$), die mit der Zerlegung des charakteristischen Polynoms in Linearfaktoren zusammenhängen. Die Bestimmung der bei einem vorgelegten Anfangswertproblem waltenden Konstanten c_k ist dann allerdings nicht mehr gratis wie bei den $y_r(\cdot)$ von Satz (3.17), sondern erfordert die Auflösung eines linearen Gleichungssystems; siehe den Schluß von Beispiel 3.5.②.

Angelpunkt der ganzen Theorie ist der folgende Sachverhalt: Für jedes $k \geq 0$ gilt

$$D^k(e^{\lambda t}) = \lambda^k e^{\lambda t},$$

und durch Linearkombination folgt für ein beliebiges Polynom $p(\cdot)$:

$$p(D)(e^{\lambda t}) = p(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Versuchen wir daher, die Gleichung (1) mit dem Ansatz

$$y(t) := e^{\lambda t}$$

zu befriedigen, so muß gelten:

$$Ly = \text{chp}(D)(e^{\lambda t}) = \text{chp}(\lambda) e^{\lambda t} \stackrel{!}{=} 0,$$

und dies ist wegen $e^{\lambda t} \neq 0$ genau dann erfüllt, wenn

$$(\text{chp}(\lambda) =) \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3)$$

ist; vergleiche dazu noch einmal Beispiel 3.5.②.

Die Gleichung (3) wird als **charakteristische Gleichung** von (1) bezeichnet; ihre n reellen oder komplexen Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sind die **Eigenwerte**, die Menge $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} =: \text{spec } L$ ist das **Spektrum** des Operators $L := \text{chp}(D)$.

Besitzt (3) n verschiedene Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ oder meinetwegen $\in \mathbb{C}$, so sind wir fertig. Es ist nämlich plausibel, daß dann die n Funktionen

$$Y_k(t) := e^{\lambda_k t} \quad (4)$$

linear unabhängig sind (sie wachsen mit $t \rightarrow \infty$ ganz verschieden rasch an) und somit eine Basis des Lösungsraums \mathcal{L} bilden. Die Sache hat zwei Haken:

- (a) Die charakteristische Gleichung kann komplexe Nullstellen λ_k haben, obwohl die Koeffizienten a_i reell sind. Die zugehörigen Funktionen (4) sind dann komplexwertig und werden vom Auftraggeber unter Umständen nicht akzeptiert.
- (b) Die charakteristische Gleichung kann mehrfache Nullstellen haben, so daß es weniger als n verschiedene Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen (4) gibt.

Zu (a): Sind die Koeffizienten a_i von chp *reell*, so bringt die Anwendung des Operators $L := \text{chp}(D)$ auf eine komplexe Funktion $z(\cdot)$ die Real- und Imaginärteile nicht durcheinander. Ist $z(\cdot)$ eine komplexe Lösung von (1), so müssen demnach der Realteil und der Imaginärteil von $z(\cdot)$ je für sich die Gleichung (1) befriedigen; das heißt: $\text{Re } z$ und $\text{Im } z$ sind dann automatisch *reelle* Lösungen der Differentialgleichung (1).

Es sei jetzt (bei reellen Koeffizienten a_i) die Zahl

$$\lambda_0 := \mu_0 + i\nu_0, \quad \nu_0 \neq 0,$$

ein echt komplexer Eigenwert. Nach Beispiel 1.7.② ist dann die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}_0 = \mu_0 - i\nu_0$ ebenfalls ein Eigenwert (der gleichen Vielfachheit), und wir haben die beiden (wesentlich verschiedenen!) komplexwertigen Eigenfunktionen (also Lösungen)

$$Z_0(t) := e^{\lambda_0 t}, \quad \bar{Z}_0(t) := e^{\bar{\lambda}_0 t}.$$

Nach dem oben Gesagten sind in diesem Fall die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} X_1(t) &:= \text{Re } Z_0(t) = e^{\mu_0 t} \cos(\nu_0 t), \\ X_2(t) &:= \text{Im } Z_0(t) = e^{\mu_0 t} \sin(\nu_0 t), \end{aligned}$$

(zwar keine Eigenfunktionen, aber) linear unabhängige reelle Lösungen von (1), die sozusagen im Verein die beiden Eigenwerte λ_0 und $\bar{\lambda}_0$ gepachtet haben (die analoge Zerlegung von $\bar{Z}_0(\cdot)$ bringt nichts Neues).

- ① Betrachte für ein festes $\omega > 0$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

Es handelt sich um die **Differentialgleichung der** (ungedämpften) **harmonischen Schwingung**. Ihre charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

besitzt die beiden Lösungen $\lambda_1 := i\omega$, $\lambda_2 := -i\omega$. Die allgemeinste komplexwertige Lösung $z(\cdot)$ der Schwingungsgleichung ist daher

$$z(t) := c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

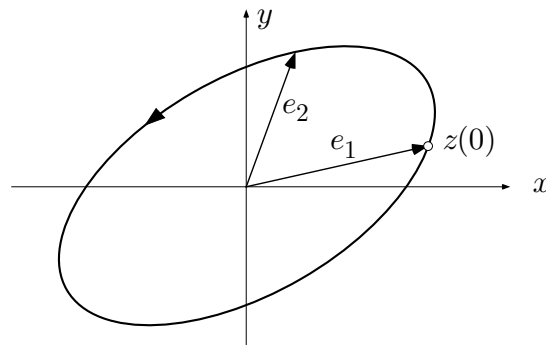


Fig. 3.6.1

und läßt sich als elliptische Bewegung in der komplexen Ebene auffassen. Man kann nämlich $z(\cdot)$ in der Form

$$z(t) = (c_1 + c_2) \cos(\omega t) + i(c_1 - c_2) \sin(\omega t)$$

schreiben und erkennt die Vektoren $e_1 := c_1 + c_2$ und $e_2 := i(c_1 - c_2)$ als konjugierte Halbmesser (Fig. 3.6.1).

Der Raum der *reellen* Lösungen $x(\cdot)$ der Schwingungsgleichung wird aufgespannt von den beiden Funktionen

$$\begin{aligned} X_1(t) &:= \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) = \cos(\omega t), \\ X_2(t) &:= \operatorname{Im}(e^{i\omega t}) = \sin(\omega t); \end{aligned}$$

die allgemeinste reelle Lösung ist daher die harmonische Schwingung

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Hieran schließen wir noch die folgenden Bemerkungen:

Eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten bringt keine Oszillationen zustande, sondern immer nur exponentielle Zu- bzw. Abnahme. Etwas anderes ist es bei einem System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, zum Beispiel

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x \end{aligned} \right\}.$$

Dieses besonders einfache System besitzt die Lösungen

$$\left. \begin{aligned} x(t) &:= A \cos(t + \alpha) \\ y(t) &:= A \sin(t + \alpha) \end{aligned} \right\}.$$

Die Behandlung allgemeiner derartiger Systeme führt auf Eigenwertaufgaben im Sinn der linearen Algebra. So können wir das System (3) von Beispiel 3.5.① auf folgende Weise in Matrizenform schreiben:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

Dieses System besitzt die drei Eigenwerte $-\lambda$, $-\mu$ und 0 . ○

Mehrfache Eigenwerte

Zu (b): Hier müssen wir weiter bohren. Die einfachste Differentialgleichung (1) mit mehrfachen Eigenwerten lautet offenbar

$$D^m y = 0 . \quad (5)$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^m = 0$$

besitzt die m -fache Nullstelle 0 . Die Lösungen von (5) sind leicht zu erraten: Es sind die Polynome vom Grad $< m$; das heißt, die allgemeine Lösung ist

$$y(t) := c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1}, \quad c_k \in \mathbb{R} \text{ (bzw. } \in \mathbb{C}) . \quad (6)$$

Wir müssen daher auch im allgemeinen Fall damit rechnen, daß Polynome ins Spiel kommen, und einen entsprechenden Ansatz bereithalten. Wir nehmen also an, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sei eine m -fache Nullstelle von chp ; dann ist

$$\text{chp}(\lambda) = \hat{p}(\lambda) (\lambda - \lambda_0)^m$$

für ein gewisses Polynom $\hat{p}(\cdot)$. In Anlehnung an (4) und (6) machen wir den Lösungsansatz

$$y(t) := q(t) e^{\lambda_0 t}, \quad (7)$$

dabei ist

$$q(t) := c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1}$$

ein beliebiges Polynom vom Grad $< m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (D - \lambda_0) y &= D(q(t)e^{\lambda_0 t}) - \lambda_0 (q(t)e^{\lambda_0 t}) \\ &= q'(t)e^{\lambda_0 t} + q(t)\lambda_0 e^{\lambda_0 t} - \lambda_0 q(t)e^{\lambda_0 t} \\ &= q'(t)e^{\lambda_0 t} . \end{aligned}$$

Wird dieser Prozeß m -mal wiederholt, so ergibt sich

$$(D - \lambda_0)^m y \underset{(*)}{=} q^{(m)}(t) e^{\lambda_0 t} \equiv 0,$$

da $q(\cdot)$ einen Grad $< m$ hat. Hieraus folgt aber

$$\text{chp}(D)y = (\hat{p}(D) \cdot (D - \lambda_0)^m) y \underset{(*)}{=} \hat{p}(D) ((D - \lambda_0)^m y) = \hat{p}(D) 0 = 0,$$

das heißt: Die Funktionen (7) sind tatsächlich Lösungen von (1).

An den Stellen (*) haben wir stillschweigend benutzt, daß dem Produkt zweier Polynome die Hintereinanderschaltung der zugehörigen Differentialoperatoren entspricht. Dieser Umstand ist ein wesentliches Ingredienz der ganzen Theorie. Es genügt, ihn für zwei Monome

$$p_1(\lambda) := \lambda^r, \quad p_2(\lambda) := \lambda^s$$

und ihr Produkt $p := p_1 \cdot p_2$ zu verifizieren: Es ist $p(\lambda) = \lambda^{r+s}$ und somit

$$p(D)y = D^{r+s} y = D^r(D^s y) = p_1(D)(p_2(D)y).$$

Wir haben also zu einem m -fachen Eigenwert λ_0 auch m linear unabhängige Lösungen gefunden, nämlich die Funktionen

$$e^{\lambda_0 t}, \quad t e^{\lambda_0 t}, \quad t^2 e^{\lambda_0 t}, \quad \dots, \quad t^{m-1} e^{\lambda_0 t}.$$

Da die charakteristische Gleichung nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau n Lösungen besitzt (mehrfache mehrfach gezählt), sind wir folglich imstande, n linear unabhängige Lösungen explizit anzugeben, und sind damit nach Satz (3.17) im Besitz aller Lösungen von (1).

② Gesucht sind die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$$

sowie speziell die Lösungen, die den Bedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \tag{8}$$

genügen.

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$$

und besitzt ersichtlich die Nullstelle $\lambda_1 := 1$. Wir reduzieren:

$$(\lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5) : (\lambda - 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5$$

und sehen, daß das reduzierte Polynom immer noch die Nullstelle 1 besitzt, also: $\lambda_2 := 1$. Weiter ist

$$(\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 5,$$

und Auflösung der quadratischen Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ liefert die beiden letzten Eigenwerte

$$\lambda_3 := -1 + 2i, \quad \lambda_4 := -1 - 2i.$$

Damit erhalten wir die vier reellen Basislösungen

$$Y_1(t) := e^t, \quad Y_2(t) := t e^t, \quad Y_3(t) := e^{-t} \cos(2t), \quad Y_4(t) := e^{-t} \sin(2t),$$

von denen die zwei ersten mit $t \rightarrow \infty$ "explodieren" und die beiden andern gedämpfte Schwingungen darstellen. Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + (c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t))e^{-t}.$$

Was nun die Zusatzbedingungen (8) betrifft, so folgt aus $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ schon $c_1 = c_2 = 0$. Es bleibt also

$$y(t) = (c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t))e^{-t}$$

mit der Ableitung

$$y'(t) = ((-c_3 + 2c_4) \cos(2t) + (-2c_3 - c_4) \sin(2t))e^{-t}.$$

Evaluation an der Stelle $t := 0$ führt mit (8) auf das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{rcl} c_3 & = & 1 \\ -c_3 + 2c_4 & = & 3 \end{array} \right\}.$$

Es gibt daher genau eine Lösung, die die Zusatzbedingungen erfüllt, nämlich

$$y(t) = (\cos(2t) + 2 \sin(2t)) e^{-t}.$$

○

Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten nun die **inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = K(t). \quad (9)$$

Wir verwenden weiterhin die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \text{chp}(\lambda) &:= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \\ L &:= \text{chp}(D) \end{aligned}$$

und schreiben (9) kurz in der Form

$$Ly = K(t); \quad (9')$$

dabei ist $K(\cdot)$ eine *gegebene* Funktion von t . Diese Differentialgleichung modelliert zum Beispiel ein nach Maßgabe seiner Systemparameter a_i ($0 \leq a_i \leq n-1$) schwingendes elektrisches oder mechanisches System, dem von außen eine willkürlich von der Zeit abhängende Anregung (oder "Störkraft") $K(\cdot)$ aufgeprägt wird, siehe Beispiel 3.5.②. Die Differentialgleichung (9) ist dermaßen wichtig und verbreitet, daß im Lauf der Zeit verschiedene Lösungsverfahren erdacht worden sind, unter anderen:

- (a) spezieller Lösungsansatz für spezielle Anregungen $K(\cdot)$,
- (b) Methode der Variation der Konstanten,
- (c) Laplace-Transformation.

Bevor wir uns der "primitivsten" und nicht für beliebige $K(\cdot)$ anwendbaren Methode (a) annehmen, beweisen wir:

(3.18) *Es sei $(Y_1(\cdot), \dots, Y_n(\cdot))$ eine Basis des Lösungsraums der homogenen Differentialgleichung $Ly = 0$, und es sei $y_p(\cdot)$ eine irgendwie gefundene Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $Ly = K(t)$. Dann ist die allgemeine Lösung $y(\cdot)$ der inhomogenen Differentialgleichung gegeben durch*

$$y(t) := c_1Y_1(t) + \dots + c_nY_n(t) + y_p(t).$$

□ Ist

$$y = \sum_{k=1}^n c_k Y_k + y_p,$$

so folgt wegen $LY_k = 0$:

$$Ly = L\left(\sum_{k=1}^n c_k Y_k\right) + Ly_p = \sum_{k=1}^n c_k LY_k + K(\cdot) = K(\cdot).$$

Umgekehrt: Ist \tilde{y} eine beliebige Lösung von (9'), so ist

$$L(\tilde{y} - y_p) = L\tilde{y} - Ly_p = K(\cdot) - K(\cdot) = 0,$$

das heißt: $\tilde{y} - y_p$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Hieraus folgt mit Satz (3.17)(b):

$$\tilde{y} = (\tilde{y} - y_p) + y_p = \sum_{k=1}^n c_k Y_k + y_p$$

für geeignete Konstanten c_k . ┘

Da wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $Ly = 0$ explizit angeben können, haben wir nach diesem Satz das inhomogene Problem (9) vollständig gelöst, wenn wir (außer den Lösungen Y_1, \dots, Y_n des homogenen Problems) eine einzige sogenannte **partikuläre Lösung** y_p von (9) gefunden haben. Hierzu dienen die oben genannten Methoden (a)–(c).

Nach dem folgenden Satz ist es erlaubt, ein gegebenes $K(\cdot)$ in Komponenten zu zerlegen und die zugehörigen Teilprobleme je für sich zu behandeln:

(3.19) *Es sei $K(t) = K_1(t) + K_2(t)$, und es sei y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $Ly = K_1(t)$, analog y_2 eine Lösung der Differentialgleichung $Ly = K_2(t)$. Dann ist $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$Ly = K(t).$$

┘ Es ist $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = K_1 + K_2 = K$. ┘

Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten

Die Methode (a) ist anwendbar, falls die Anregung $K(\cdot)$ selber Lösung einer geeigneten *homogenen* linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sein kann. $K(\cdot)$ muß also von der Form

$$K(t) := t^r e^{\lambda t}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

oder eine Linearkombination von Funktionen dieser Art sein.

Bsp: $1, \quad b_0 + b_1 t + \dots + b_r t^r, \quad \cos(\omega t), \quad e^{-\delta t} \sin(\omega t), \quad t^r e^{-t}.$

In diesem Fall hilft ein geeigneter Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten. Die Grundregel lautet (ohne Beweis):

(3.20) Ist

$$K(t) := q(t) e^{\lambda_0 t},$$

mit einem Polynom $q(\cdot)$ vom Grad r und ist λ_0 ein m -facher Eigenwert von L , so erhält man eine partikuläre Lösung von (9) durch den Ansatz

$$y_p(t) := (A_0 + A_1 t + \dots + A_r t^r) t^m e^{\lambda_0 t}$$

mit unbestimmten Koeffizienten A_k .

Dieser Ansatz ist in die Differentialgleichung (9) einzubringen, worauf die A_k durch Koeffizientenvergleich so bestimmt werden können, daß (9) identisch in t erfüllt ist. — Satz **(3.20)** handelt vom schlimmstmöglichen Fall. Im allgemeinen sind wenigstens zwei der drei Zahlen r , m , λ_0 gleich 0, und alles wird viel einfacher. Ist $m > 0$, das heißt: $\lambda_0 \in \text{spec } L$, so sind wir im **Resonanzfall**: Die Anregung $K(\cdot)$ besitzt die gleiche Frequenz wie eine Eigenschwingung des ungestörten Systems. Dies führt bekanntlich zu besonderen Effekten.

Ist die Anregung $K(\cdot)$ eine Superposition von Termen $K_j(t) := q_j(t) e^{\lambda_j t}$ mit verschiedenen λ_j , so ist für jeden derartigen Term ein $y_{p,j}$ gemäß **(3.20)** anzusetzen, und die zu $K := \sum_j K_j$ gehörige partikuläre Lösung ist dann nach **(3.19)** gegeben durch

$$y_p = \sum_j y_{p,j}.$$

Bsp: Bei dem “trigonometrischen Monom” $K(t) := \cos(\omega t)$ sind die beiden Frequenzen $i\omega$ und $-i\omega$ angeregt, und die zugehörige partikuläre Lösung wird im allgemeinen $e^{i\omega t}$ - und $e^{-i\omega t}$ -Terme enthalten. Ist alles reell (und $\pm i\omega$ kein Eigenwert von L), so wird man daher von vorneherein

$$y_p(t) := A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

ansetzen.

Weitere Beispiele findet man in der folgenden Tabelle.

$K(t)$	Spektralbedingung	Ansatz für $y_p(t)$
t^r	$0 \notin \text{spec } L$	$A_0 + A_1 t + \dots + A_r t^r$
	$0 \in \text{spec } L, m\text{-fach}$	$A_0 t^m + A_1 t^{m+1} + \dots + A_r t^{m+r}$
$b_0 + b_1 t + \dots + b_r t^r,$ $b_i \in \mathbb{R}$	$0 \notin \text{spec } L$	$A_0 + A_1 t + \dots + A_r t^r$
$e^{\lambda_0 t}, \lambda_0 \in \mathbb{C}$	$\lambda_0 \notin \text{spec } L$	$A e^{\lambda_0 t}$
	$\lambda_0 \in \text{spec } L, m\text{-fach}$	$A t^m e^{\lambda_0 t}$
$\cos(\omega t), \sin(\omega t)$	$\pm i\omega \notin \text{spec } L$	$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$
	$\pm i\omega \in \text{spec } L, \text{ einfach}$	$t(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$
$t^2 e^{-t}$	$-1 \notin \text{spec } L$	$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) e^{-t}$

③ Die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega t) \quad (10)$$

beschreibt den resonant angeregten ungedämpften harmonischen Oszillator. Die zugehörige homogene Gleichung $y'' + \omega^2 y = 0$ besitzt die allgemeine reelle Lösung

$$y(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(siehe Beispiel ①). Für eine partikuläre Lösung von (10) machen wir gemäß unserer Tabelle den Ansatz

$$y_p(t) := t(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

wobei die Koeffizienten A und B so festzulegen sind, daß die in (10) eingebrachte Funktion y_p diese Gleichung identisch in t erfüllt. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (A + B\omega t) \cos(\omega t) + (B - A\omega t) \sin(\omega t), \\ y_p''(t) &= (2B\omega - A\omega^2 t) \cos(\omega t) + (-2A\omega - B\omega^2 t) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$y_p''(t) + \omega^2 y_p(t) = 2B\omega \cos(\omega t) - 2A\omega \sin(\omega t),$$

und nach (10) sollte dies $\equiv \cos(\omega t)$ sein. Es folgt

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2\omega}.$$

Aufgrund von Satz (3.18)(a) lautet demnach die allgemeine Lösung von (10):

$$y(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t) .$$

Wir beobachten eine Schwingung der Kreisfrequenz ω , deren Amplitude unabhängig von den Anfangsbedingungen im wesentlichen linear mit der Zeit zunimmt (Fig. 3.6.2). ○

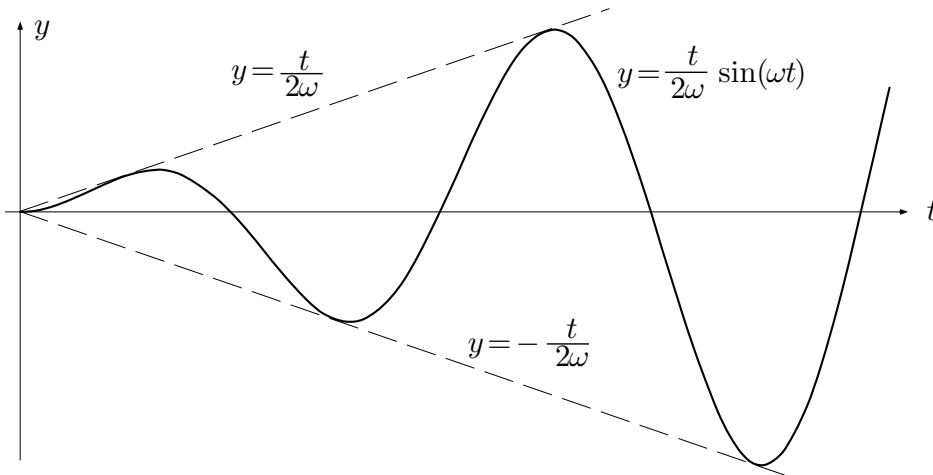


Fig. 3.6.2

Der gedämpfte harmonische Oszillator

④ (Forts. von Beispiel 3.5.②) Bevor wir unser Federpendel wieder in Bewegung setzen, soll dargetan werden, daß zum Beispiel ein einfacher Schwingkreis (Fig. 3.6.3) zu der gleichen Differentialgleichung Anlaß gibt wie das Federpendel. Die beiden Systeme besitzen also formal dieselbe Theorie, und weiter: Die Vorgänge in dem betrachteten mechanischen System können in einem Schwingkreis mit passend gewählten Elementen “analog” reproduziert (**simuliert**) werden.

Jedes “Element” in dem Schwingkreis wird durch eine konstituierende Gleichung charakterisiert, wobei es üblich ist, die “Konstante” eines Elements mit demselben Buchstaben zu bezeichnen wie das betreffende Element selbst.

Element	konstituierende Gleichung
Kapazität C	$u_C = q / C$
Induktivität L	$u_L = L \frac{di}{dt}$
Widerstand R	$u_R = R i$

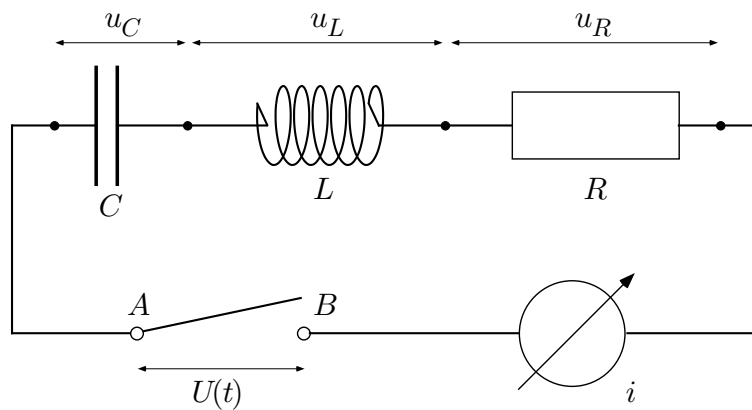


Fig. 3.6.3

Dabei bezeichnen u_C , u_L , u_R die über den betreffenden Elementen gemessenen Spannungen, q die auf C sitzende Ladung und i den in dem Stromkreis fließenden Strom. Es gilt

$$i = \dot{q} . \quad (11)$$

Wird der Schalter über den Klemmen A und B geschlossen, so gilt nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz:

$$u_L + u_R + u_C = 0 .$$

Allgemein: Wird an die Klemmen A und B eine willkürlich modulierte Fremdspannung $U(t)$ angelegt, so gilt

$$u_L + u_R + u_C = U(t) .$$

Aufgrund der konstituierenden Gleichungen der einzelnen Elemente haben wir daher

$$L \frac{di}{dt} + Ri + q/C = U(t) .$$

Die Stromstärke i ist die in diesem Zusammenhang interessierende Zustandsvariable. Wir differenzieren die letzte Gleichung nach t und erhalten wegen (11):

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \dot{U}(t) .$$

Dies ist die konstituierende Gleichung unseres Schwingkreises und stimmt bis auf die Bezeichnung der Systemparameter überein mit der Gleichung 3.5.(6), die wir hier noch einmal hinschreiben:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = K(t) .$$

Wir kehren nun zu dem in Fig. 3.5.2 dargestellten mechanischen System zurück; allerdings soll es jetzt nur noch schwach gedämpft sein. Es sei also $b^2 - 4fm < 0$; dann werden die beiden Eigenwerte

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{-\left(\frac{f}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)}$$

komplex. Setzen wir zur Abkürzung

$$\delta := \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{f}{m}}, \quad \omega_* := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (12)$$

so kommt

$$\lambda_1 = -\delta + i\omega_*, \quad \lambda_2 = -\delta - i\omega_* .$$

Die allgemeine reelle Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung 3.5.(8) ist somit gegeben durch

$$y(t) = e^{-\delta t} (a \cos(\omega_* t) + b \sin(\omega_* t)) \quad (13)$$

und stellt (unter beliebigen Anfangsbedingungen) eine gedämpfte Schwingung dar. Der Systemparameter δ ist die **Dämpfungs-konstante**, und ω_* heißt **Eigen-Kreisfrequenz** des betrachteten Systems. Aus (12) geht hervor, daß ω_* im Fall $\delta = 0$ (keine Dämpfung) den Wert $\omega_0 = \sqrt{f/m}$ besitzt und mit zunehmender Dämpfung abnimmt.

Wir wollen weiter untersuchen, was beim Vorliegen einer harmonisch oszillierenden Anregung $K(\cdot)$ geschieht. Hierzu betrachten wir die spezielle inhomogene Differentialgleichung

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = K_0 e^{i\omega t} \quad (14)$$

mit einem frei wählbaren Parameter $\omega > 0$. Wir haben $K(\cdot)$ komplex angesetzt, um die Phasenlage der entstehenden Schwingungen leichter beurteilen zu können.

Von nun an wollen wir $\delta > 0$ voraussetzen, so daß $i\omega$ jedenfalls kein Eigenwert der homogenen Gleichung ist. Nach Satz (3.20) ist dann eine partikuläre Lösung $y_s(\cdot)$ in der Form

$$y_s(t) := c e^{i\omega t}$$

anzusetzen, das heißt: als harmonische Schwingung mit der komplexen Amplitude c . Setzen wir $y_s(\cdot)$ und seine Ableitungen

$$\dot{y}_s(t) = i\omega c e^{i\omega t}, \quad \ddot{y}_s(t) = -\omega^2 c e^{i\omega t}$$

in (14) ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich für c die Bedingung

$$-m\omega^2 c + bi\omega c + fc = K_0 .$$

Damit ist c bestimmt zu

$$c = \frac{K_0}{(f - m\omega^2) + ib\omega} = \frac{K_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}.$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung von (14), indem wir $y_s(\cdot)$ zur allgemeinen Lösung (13) der homogenen Gleichung addieren. Da alle Funktionen (13) mit $t \rightarrow \infty$ exponentiell abklingen, bleibt nach Beendigung dieses Einschwingvorgangs nur noch der (von den Anfangsbedingungen unabhängige) Summand $y_s(\cdot)$ übrig. Man nennt daher $y_s(\cdot)$ die **stationäre Lösung** von (14).

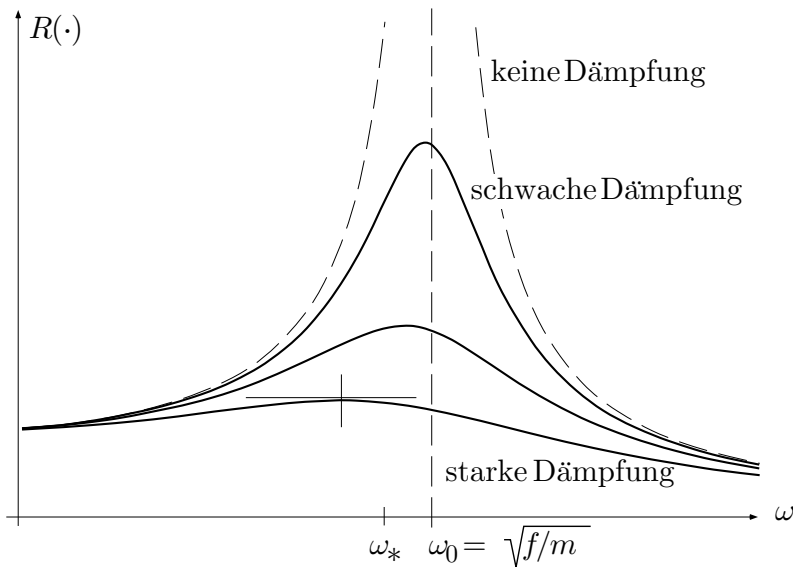


Fig. 3.6.4

Die stationäre Lösung $y_s(\cdot)$ schwingt mit derselben, von den Systemparametern ω_0 und δ *unabhängigen*, Frequenz wie die Anregung $K(\cdot)$. Wir untersuchen nun ihre komplexe Amplitude c etwas genauer. Der Betrag

$$|c| = \frac{K_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} =: R(\omega)$$

stellt die Amplitude der effektiv beobachteten Schwingung $\operatorname{Re} y_s(\cdot)$ dar und hängt in charakteristischer Weise von der Anregungsfrequenz ω ab (siehe die Fig. 3.6.4). Man nennt $R(\cdot)$ die **Resonanzfunktion** des betrachteten Systems. $R(\omega)$ ist maximal für diejenige Anregungsfrequenz ω , die den Radikanden

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 = \left(\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\delta^2)\right)^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2)$$

zu einem Minimum macht, und das ist ersichtlich der Fall, wenn die große Klammer verschwindet, das heißt für

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

also nicht für $\omega := \omega_0$ oder $\omega = \omega_*$, wie man vielleicht erwarten würde.

Um die Phase von $y_s(\cdot)$ bezüglich $K(\cdot)$ zu bestimmen, schreiben wir c in der Form

$$c = \frac{K_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}.$$

Mit $\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega =: c'$ folgt

$$\arg c = \arg c' = \arg(\omega_0^2 - \omega^2, -2\delta\omega)$$

(Fig. 3.6.5). Hiernach ist $-\pi < \arg c < 0$. Das bedeutet physikalisch: $y_s(\cdot)$ eilt der Anregung $K(\cdot)$ nach. Ist $\omega = \omega_0$, so ist $\arg c = -\pi/2$, und für $\omega \rightarrow \infty$ strebt $\arg c$ gegen $-\pi$. ○

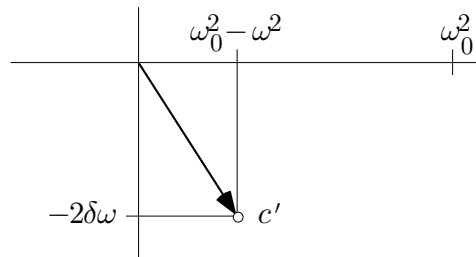


Fig. 3.6.5

Eulersche Differentialgleichungen

Den linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten liegt eine gewisse Translationsinvarianz der betrachteten Phänomene zugrunde: Man kann den Schwingungsversuch mit gleichen Anfangsdaten auf morgen verschieben und wird dasselbe einen Tag später beobachten. In gewissen geometrischen Situationen liegt statt der Translationsinvarianz eine "Streckungs-invarianz" vor, die ebenfalls zu linearen Differentialgleichungen von einem bestimmten Typ führt. Wir bezeichnen hierzu die unabhängige Variable mit r und lassen für r von vorneherein nur positive Werte zu, so daß Potenzen r^α mit beliebigen reellen Exponenten α definiert sind.

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y^{(n)} + \frac{b_{n-1}}{r} y^{(n-1)} + \dots + \frac{b_1}{r^{n-1}} y' + \frac{b_0}{r^n} y = 0 \quad (r > 0) \quad (15)$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten b_i wird (homogene) **Eulersche Differentialgleichung** genannt. Die Sätze (3.17)–(3.19) gelten für beliebige lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung, also auch hier. Man kann (15) mit Hilfe der Substitution

$$r = e^t \quad (-\infty < t < \infty)$$

und längeren Rechnungen in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführen. Rascher kommt man mit dem richtigen Ansatz zum Ziel; er lautet:

$$y(r) := r^\alpha, \quad (16)$$

wobei der Exponent α noch geeignet zu bestimmen ist. Zunächst folgt

$$y'(r) = \alpha r^{\alpha-1}, \quad y''(r) = \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2}, \dots$$

Mit der Abkürzung

$$\alpha^{(k)} := \begin{cases} 1 & (k=0), \\ \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-(k-1)) & (k \geq 1) \end{cases} \quad (k \text{ Faktoren!})$$

erhalten wir allgemein

$$y^{(k)}(r) = \alpha^{(k)} r^{\alpha-k} \quad (k \geq 0).$$

Setzen wir das in (15) ein, so ergibt sich für die linke Seite der Ausdruck

$$\begin{aligned} & \alpha^{(n)} r^{\alpha-n} + \frac{b_{n-1}}{r} \alpha^{(n-1)} r^{\alpha-(n-1)} + \dots + \frac{b_1}{r^{n-1}} \alpha r^{\alpha-1} + \frac{b_0}{r^n} r^\alpha \\ &= (\alpha^{(n)} + b_{n-1} \alpha^{(n-1)} + \dots + b_1 \alpha + b_0) r^{\alpha-n} \\ &= \text{inp}(\alpha) r^{\alpha-n}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet

$$\text{inp}(\alpha) := \alpha^{(n)} + b_{n-1} \alpha^{(n-1)} + \dots + b_1 \alpha + b_0$$

das sogenannte **Indexpolynom** der Gleichung (15); $\text{inp}(\cdot)$ besitzt den genauen Grad n . Die angesetzte Funktion (16) ist genau dann eine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung (15), wenn der zuletzt erhaltene Ausdruck

$$\text{inp}(\alpha) r^{\alpha-n}$$

identisch in r verschwindet, und das ist genau dann der Fall, wenn

$$\text{inp}(\alpha) = 0 \tag{17}$$

ist. Hieraus folgt: Besitzt die **Indexgleichung** (17) n verschiedene reelle Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, so bilden die n (linear unabhängigen) Funktionen

$$Y_k(r) := r^{\alpha_k} \quad (1 \leq k \leq n)$$

eine Basis des Lösungsraums \mathcal{L} von (15). Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$y(r) := c_1 r^{\alpha_1} + c_2 r^{\alpha_2} + \dots + c_n r^{\alpha_n} .$$

⑤ Die Eulersche Differentialgleichung

$$y''' + \frac{3}{r}y'' - \frac{3}{r^2}y' = 0$$

besitzt das Indexpolynom

$$\text{inp}(\alpha) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1) - 3\alpha = \alpha^3 - 4\alpha = \alpha(\alpha+2)(\alpha-2)$$

mit Nullstellen $\alpha_1 := 0$, $\alpha_2 := 2$, $\alpha_3 := -2$. Die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung lautet daher:

$$y(r) := c_1 + c_2 r^2 + c_3 \frac{1}{r^2} .$$

○

Wir untersuchen nicht, was bei komplexen Nullstellen des Indexpolynoms zu tun ist, gehen aber noch kurz auf den Fall mehrfacher Nullstellen ein. Die genauere Analyse liefert folgendes: Ist α_0 zum Beispiel eine zweifache Nullstelle des Indexpolynoms, so sind

$$Y_1(r) := r^{\alpha_0}, \quad Y_2(r) := r^{\alpha_0} \log r$$

zwei zugehörige linear unabhängige Lösungen von (15). Dies war aufgrund der Verwandtschaft von (1) und (15) zu erwarten.

⑥ Untersucht man stationäre Temperaturverteilungen auf einer Kreisscheibe oder auf Kreisringen, so wird man auf folgende Differentialgleichung geführt:

$$y'' + \frac{1}{r}y' - \frac{k^2}{r^2}y = 0; \tag{18}$$

dabei ist der Parameter k eine beliebige natürliche Zahl. Das Indexpolynom

$$\text{inp}(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 = \alpha^2 - k^2$$

besitzt für $k > 0$ die zwei reellen Nullstellen $\alpha_1 := k$, $\alpha_2 := -k$, und die allgemeine Lösung von (18) lautet in diesem Fall:

$$y(r) = c_1 r^k + c_2 \frac{1}{r^k} .$$

Ist jedoch $k = 0$, so besitzt das Indexpolynom die doppelte Nullstelle $\alpha_0 := 0$, und wir erhalten als allgemeine Lösung von (18):

$$y(r) = c_1 + c_2 \log r .$$

○

Aufgaben

- Bestimme eine möglichst einfache lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten reellen Koeffizienten, welche die Funktion

$$f(x) := x e^{-2x} \cos x$$

als eine Lösung hat.

- Für diejenigen der folgenden Funktionen, die Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sein können, gebe man je eine derartige Differentialgleichung an.

- | | |
|---|--|
| (a) $\phi_1(t) := \cosh t$, | (b) $\phi_2(t) := t^{3/2} \quad (t > 0)$, |
| (c) $\phi_3(t) := \sin(t + 1)$, | (d) $\phi_4(t) := t + \cos t$, |
| (e) $\phi_5(t) := t^{1/\log t} \quad (t > 0)$. | |

- Ⓜ Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

- | |
|---|
| (a) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$, |
| (b) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^{2x}$, |
| (c) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$. |

- Ⓜ Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - y = \cosh t$$

sowie die Lösung, die den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ genügt.

5. (M) Betrachte ein gedämpftes Federpendel mit Masse $m := 2.00$ kg, Federkonstante $f := 300$ N/m und Dämpfungskonstante $b := 60$ kg/sec. Der Anfangsausschlag beträgt $y(0) := 0.50$ m.
- (a) Wie groß darf die nach unten gerichtete Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ höchstens sein, wenn kein Nulldurchgang eintreten soll?
- (b) Man untersuche und zeichne den Bewegungsverlauf für $v(0) = -15.0$ m/sec.

6. (M) Bestimme die allgemeine reelle Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen:

$$(a) \quad \ddot{y} - 4y = te^{-t}, \quad (b) \quad \ddot{y} + \omega^2 y = t^2(1 + \cos(\omega t)).$$

7. Für welche Werte des komplexen Parameters α besitzt die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \alpha y = 0$$

nichttriviale 2π -periodische Lösungen?

8. Ein Federpendel (Fig. 3.5.2) besitzt die Federkonstante $f := 1$, die Dämpfung $b := 2$ und eine frei wählbare Masse $m > 0$. Ist m hinreichend groß, so führt das angestoßene und dann losgelassene Pendel gedämpfte Schwingungen aus. In welchem Bereich läßt sich die Schwingungsdauer T durch Wahl von m variieren? (*Hinweis:* Es geht um die Eigenwerte der Differentialgleichung $m\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$. Die Kreisfrequenz ω und T sind verknüpft durch $T \cdot \omega = 2\pi$.)
9. Die Bevölkerung eines Dorfes hat sich von 1820 bis 1920 exponentiell auf 1000 Personen verdoppelt. Ab 1920 wurde dieses natürliche Wachstum überlagert durch einen jährlich konstanten Wanderungsgewinn, und 1970 waren es bereits 2000 Einwohner. Wieviele Personen sind in dieser Zeit jährlich zugezogen? (*Hinweis:* Betrachte die Einwohnerzahl als kontinuierliche Variable. Verwende die Angaben über die erste Phase zur Bestimmung der Wachstumskonstanten α und setze hierauf die während der zweiten Phase geltende Differentialgleichung an.)

10. Betrachte den Oszillator

$$\ddot{y} + (2 + \cos \alpha + \sin \alpha) \dot{y} + 3y = 0$$

für verschiedene Werte des reellen Parameters α .

- (a) Zeige: Sämtliche Lösungen sind gedämpfte harmonische Schwingungen, und das für jeden Wert von α .
- (b) Lege α so fest, daß diese Schwingungen für $t \rightarrow \infty$ möglichst rasch abklingen.
11. Gesucht sind die sämtlichen für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gedämpften Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y} + iy = 0$. ($i^2 = -1$)

12. (M) Ein ungedämpfter harmonischer Oszillator befindet sich zunächst in Ruhestellung. In einem gewissen Moment wird eine auslenkende Kraft eingeschaltet, die mit der Zeit exponentiell nachläßt. Es geht also um das Anfangswertproblem

$$\ddot{y} + \omega^2 y = e^{-\delta t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Langfristig, das heißt: nach dem Einschwingvorgang, verbleibt eine stationäre harmonische Schwingung. Berechne deren (reelle) Amplitude.

13. Wird durch das Zentrum der Erde ein Tunnel gebohrt und läßt man einen Stein in diesen Tunnel fallen, so pendelt der Stein in dem Tunnel harmonisch hin und her (ist nicht zu beweisen). Man berechne die Schwingungsdauer T , ausgedrückt durch den Erdradius R ($\doteq 6400$ km) und die Erdbeschleunigung g ($\doteq 10$ m/sec²) und gebe auch einen ungefähren Zahlenwert in Stunden an. (*Hinweis:* Überlege, wie Amplitude, Schwingungsdauer und Beschleunigung im Kulminationspunkt aneinander gekoppelt sind.)
14. (M) Versuche einen naheliegenden Ansatz zur Lösung der inhomogenen Eulerschen Differentialgleichung

$$y'' - \frac{4}{r}y' + \frac{6}{r^2}y = r^5.$$