

# 5

## Mehrdimensionale Differentialrechnung

### 5.1 Grundbegriffe

Zur Erinnerung: Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion einer reellen Variablen und  $t_0 \in \text{dom}(f)$  ein fest gewählter Punkt, so läßt sich für beliebiges  $t \neq t_0$  der Differenzenquotient

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}$$

bilden, da der Zuwachs der unabhängigen Variablen in den Nenner gesetzt werden kann. Sofern der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} =: A$$

existiert, heißt  $f$  an der Stelle  $t_0$  differenzierbar, und der Grenzwert  $A =: f'(t_0)$  ist die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $t_0$ . Die Zahl  $A$  beschreibt das Änderungsverhalten von  $f$ , wenn man sich von der Stelle  $t_0$  ein wenig entfernt; nach 3.1.(3) gilt nämlich

$$f(t_0 + h) - f(t_0) = Ah + o(h) \quad (h \rightarrow 0). \quad (1)$$

Hiernach ist der Zuwachs des Funktionswertes in erster Näherung eine lineare Funktion der Zuwachsvariablen  $h$ , und  $A = f'(t_0)$  ist der maßgebende Proportionalitätsfaktor — wir haben darauf schon am Anfang des dritten Kapitels hingewiesen. Sinngemäß dasselbe gilt für eine komplex- oder vektorwertige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ ; die Ableitung  $f'(t_0)$  ist dann eine komplexe Zahl bzw. ein Vektor.

Die Erfahrung hat uns gezeigt, daß diese Situation bei den meisten vernünftigen Funktionen in den meisten Punkten  $t_0$  ihres Definitionsbereichs vorliegt — notable Ausnahme ist natürlich die Betragsfunktion, die im Ursprung nicht differenzierbar ist. Das ist gar nicht selbstverständlich. Die Welt könnte ja auch so eingerichtet sein, daß man im allgemeinen nur

$$|f(t_0 + h) - f(t_0)| \leq C\sqrt{|h|}$$

beweisen kann. Die Analysis sähe dann ganz anders aus.

Was bleibt von alledem übrig, wenn wir nun zu Funktionen von *mehreren* reellen Variablen übergehen? Gemeint sind Funktionen

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{bzw. } \rightarrow \mathbb{R}^m),$$

die in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definiert sind, wobei wir in erster Linie an die Fälle  $n := 2$  und  $n := 3$  denken. Wir wollen dabei folgendes verabreden: Die betrachteten Funktionen sollen immer auf einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^n$  definiert sein, so daß man von jedem Punkt  $\mathbf{p} \in \text{dom}(f)$  aus in jeder Richtung ein Stückchen weit gehen kann, ohne  $\text{dom}(f)$  zu verlassen (Fig. 5.1.1).

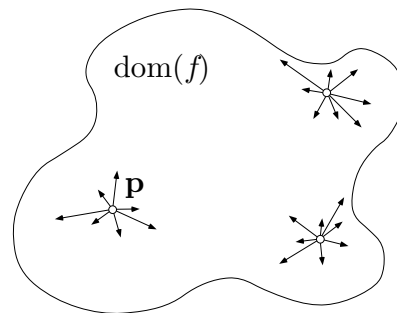


Fig. 5.1.1

In vielen Anwendungen, etwa bei Extremalaufgaben oder in der Integralrechnung, interessiert eine Funktion  $f$  allerdings ausgerechnet auf einer *kompakten* Menge, zum Beispiel auf dem Quadrat  $Q := [0, 1]^2$  (Fig. 5.1.2). Wir nehmen dann stillschweigend an, daß  $f$  auf einer etwas größeren offenen Menge  $\Omega$  definiert ist.

### \* Komplex-eindimensionale Differentialrechnung

Eine Besonderheit, die nicht so recht in den Rahmen dieses Kapitels paßt, ist die “komplex-eindimensionale Differentialrechnung”. Wir gehen hier nur kurz darauf ein; alles Weitere findet man in Büchern über komplexe Analysis (s.u.).

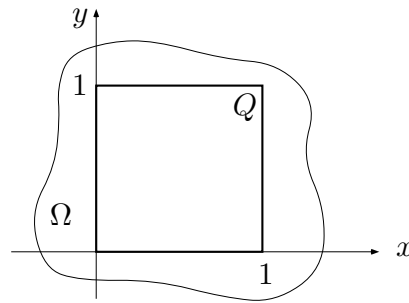


Fig. 5.1.2

Wird die  $(x, y)$ -Ebene als komplexe  $z$ -Ebene,  $z = x + iy$ , und die  $(u, v)$ -Ebene als komplexe  $w$ -Ebene,  $w = u + iv$ , aufgefaßt, so erscheint eine Funktion

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} u := u(x, y) \\ v := v(x, y) \end{cases}$$

als komplexwertige Funktion *einer* komplexen Variablen  $z$ :

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto w := f(z) .$$

Da  $\mathbb{C}$  ein Körper ist, können wir immer noch Differenzenquotienten

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (\in \mathbb{C})$$

bilden. Dies erlaubt, auch hier den Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: A$$

ins Auge zu fassen, wobei nun die Zuwachsvariable  $h$  über komplexe Werte, das heißt: "aus allen Richtungen kommend", gegen 0 geht (Fig. 5.1.3). Sofern dieser Grenzwert existiert, heißt die Funktion  $f$  an der Stelle  $z_0$  **komplex differenzierbar**. Die komplexe Zahl  $A$  ist die **Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $z_0$  und wird mit  $f'(z_0)$  bezeichnet. Die Relation (1) gilt sinngemäß, wobei jetzt die Zuwachsvariable  $h$  natürlich komplex ist.

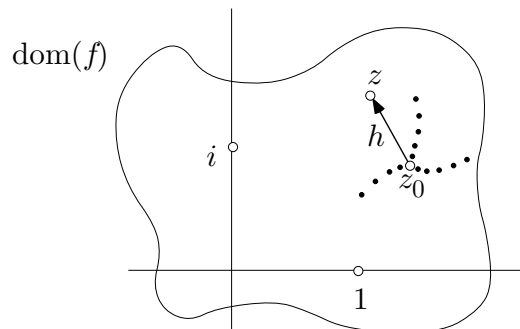


Fig. 5.1.3

Ist  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  in jedem Punkt  $z_0 \in \text{dom}(f)$  komplex differenzierbar, so nennt man  $f$  eine **analytische** oder **holomorphe** Funktion. Fürs komplexe Differenzieren gelten ebenfalls die in Satz (3.1) zusammengestellten Rechenregeln. Zu deren Herleitung wurden nämlich nur die Körpereigenschaften von  $\mathbb{R}$  und die Stetigkeit der Rechenoperationen benutzt, und diese Dinge sind in  $\mathbb{C}$  ebenfalls vorhanden. Im Komplexen tritt aber folgendes Wunder ein: Eine analytische Funktion ist automatisch beliebig oft differenzierbar und läßt sich an jeder Stelle  $z_0 \in \text{dom}(f)$  in eine gegen  $f$  konvergente Taylor-Reihe entwickeln. Das heißt, es gilt für alle hinreichend nahe bei  $z_0$  gelegenen Punkte  $z$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k .$$

Die Eigenschaften der analytischen Funktionen werden ausführlich behandelt in der sogenannten "Komplexen Analysis", die nach ziemlich übereinstimmender Ansicht das schönste Gebiet der niederen Analysis darstellt.

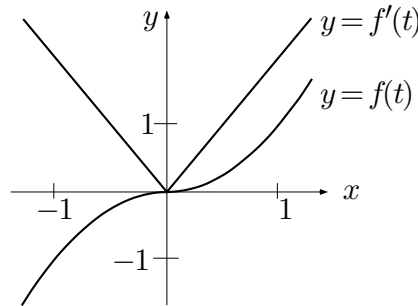


Fig. 5.1.4

① Die *reelle* Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \text{sgn } t \cdot t^2$$

(Fig 5.1.4) besitzt, wie man leicht verifiziert, die Ableitung  $f'(t) = 2|t|$ . Diese Funktion ist also differenzierbar, an der Stelle 0 aber nicht zweimal differenzierbar.

Die *komplexe* Funktion

$$f(z) := \exp z \quad \left( := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right)$$

ist in der ganzen  $z$ -Ebene analytisch und besitzt dort die Ableitung  $f' = \exp$ , also  $f' = f$ . Nach Satz (2.20)(a) gilt nämlich für beliebiges  $z_0 \in \mathbb{C}$ :

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z_0+h} - e^{z_0}}{h} = e^{z_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{z_0} .$$

Betrachten wir hingegen die an sich einfache und “schöne” Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) := \bar{z}$$

(Fig. 5.1.5), so erhalten wir zum Zuwachs  $h = |h|e^{i\phi}$  den Differenzenquotienten

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = e^{-2i\phi}.$$

Der Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} e^{-2i\phi}$  existiert aber nicht, denn  $e^{-2i\phi}$  kann für noch so kleines  $|h|$  beliebige Werte auf dem Einheitskreis annehmen. Die zuletzt betrachtete Funktion  $f$  ist also in *keinem* Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar. Die komplexe Differenzierbarkeit ist eben eine sehr starke Forderung an die “Feinstruktur” einer Funktion. Unter anderem impliziert sie die Erhaltung des Drehsinns von “infinitesimalen Kreisen”, womit die Konjugation von vornherein disqualifiziert ist, siehe die Figur.  $\bigcirc$

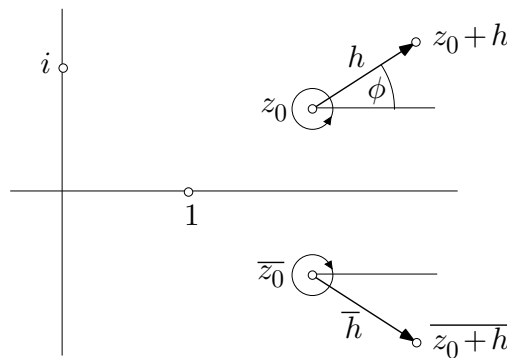


Fig. 5.1.5

## Richtungsableitung und partielle Ableitungen

Für Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$  (bzw.  $\curvearrowright \mathbb{R}^m$ ) einer reellen Vektorvariablen  $\mathbf{x}$  können wir definitiv keine Differenzenquotienten mehr bilden:

$$\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{h}}$$

ist nicht definiert. Von dieser Stelle an gibt es zwei Wege, um weiter zu kommen. Wir können sie kurz folgendermaßen charakterisieren:

- (a) Betrachtung von partiellen Ableitungen und Funktionalmatrizen;

- (b) Auffassung der Ableitung als lineare Abbildung von Tangentialräumen (s.u.): Die Relation (1) wird verallgemeinert zu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = A\mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}); \quad (2)$$

dabei ist nun  $A$  eine lineare Abbildung, die auf die Zuwachsvektoren  $\mathbf{h}$  wirkt.

Entsprechend erscheint die mehrdimensionale Differentialrechnung in zwei verschiedenen Versionen. Diese zwei Versionen stehen in demselben Verhältnis zueinander wie in der linearen Algebra die Matrizen zu den linearen Abbildungen: Eine Funktion

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

besitzt in jedem Punkt  $\mathbf{p} \in \text{dom}(\mathbf{f})$  eine  $(m \times n)$ -Matrix von partiellen Ableitungen, die sogenannte Funktionalmatrix von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$ . Diese Matrix ist die Matrix der durch (2) charakterisierten Abbildung  $A$  bezüglich der Standardbasen. — Für Einzelheiten verweisen wir auf Abschnitt 5.4.

Die Behandlung von konkreten Beispielen erfolgt immer auf dem Weg (a). Auch wir werden uns in erster Linie der Sprache der partiellen Ableitungen bedienen. Ein richtiges Verständnis der Theorie ist aber nur möglich, wenn man weiß, daß es auch die andere Auffassung gibt und daß hier ein weiteres Mal die lineare Algebra in der Analysis am Werk ist.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir endlich beginnen. Es seien also  $\Omega$  eine offene Menge im  $\mathbb{R}^n$ ,

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$$

eine reellwertige Funktion (man kann sich vorstellen, daß  $f(\mathbf{x})$  die Temperatur an der Stelle  $\mathbf{x}$  angibt),  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  ein fest gewählter Punkt und  $\mathbf{e}$  ein im Punkt  $\mathbf{x}_0$  angehefteter Einheitsvektor. Weiter haben wir eine frei im Raum bewegliche positive  $t$ -Achse  $\ell$  zur Verfügung, die wir nun derart ins Bild legen, daß  $t := 0$  auf den Punkt  $\mathbf{x}_0$  und  $t := 1$  auf die Spitze von  $\mathbf{e}$  fallen (Fig. 5.1.6). Dann entspricht allgemein dem Skalenwert  $t$  der Raumpunkt  $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$ . Wenn wir jetzt die Funktion  $f$  nur noch auf dem Strahl  $\ell$  betrachten, so wird daraus eine Funktion  $\phi(\cdot)$  der einen reellen Variablen  $t$ , nämlich

$$\phi(t) := f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}). \quad (3)$$

Da  $\Omega$  offen ist, ist  $\phi(t)$  für alle hinreichend kleinen  $t > 0$  definiert, und  $\phi$  besitzt Differenzenquotienten

$$\frac{\phi(t) - \phi(0)}{t - 0} = \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \quad (t > 0).$$

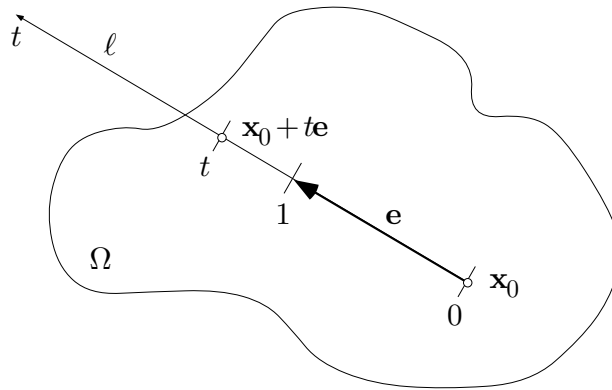


Fig. 5.1.6

Wir können daher den Grenzübergang  $t \rightarrow 0+$  ins Auge fassen, und im Konvergenzfall werden wir die Größe

$$\phi'(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} =: D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}_0)$$

als **Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  in Richtung  $\mathbf{e}$**  bezeichnen.

② Wir betrachten die Funktion

$$r(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}| \quad (= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \text{ falls } n = 3).$$

Ist zunächst  $\mathbf{x}_0 := \mathbf{0}$  (Fig. 5.1.7), so gilt

$$\frac{r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - r(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{|t\mathbf{e}|}{t} = 1 \quad (t > 0).$$

Die Richtungsableitung erhält damit den Wert

$$D_{\mathbf{e}}r(\mathbf{0}) = \lim_{t \rightarrow 0+} 1 = 1,$$

und zwar unabhängig von der gewählten Richtung  $\mathbf{e}$  — in Übereinstimmung mit der Anschauung: Vom Ursprung aus gesehen wächst der Betrag in allen Richtungen gleich schnell. (Der hier vorgefundene Sachverhalt ist singulär. Im Normalfall hängt  $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}_0)$  in bestimmter Weise von  $\mathbf{e}$  ab, s.u.)

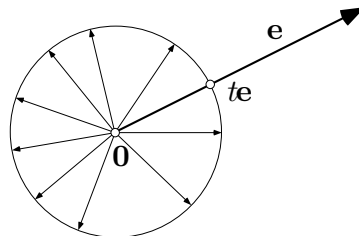


Fig. 5.1.7

Ist aber  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ , so sieht die Sache wesentlich anders aus. Im Sinne von (3) setzen wir

$$\phi(t) := r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e})$$

(Fig. 5.1.8) und berechnen

$$\phi(t) - \phi(0) = |\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}| - |\mathbf{x}_0| = \frac{|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}|^2 - |\mathbf{x}_0|^2}{|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}| + |\mathbf{x}_0|} = \frac{2\mathbf{x}_0 \cdot (t\mathbf{e}) + t^2}{|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}| + |\mathbf{x}_0|}.$$

Es folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e} + t}{|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}| + |\mathbf{x}_0|} = \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{x}_0|}.$$

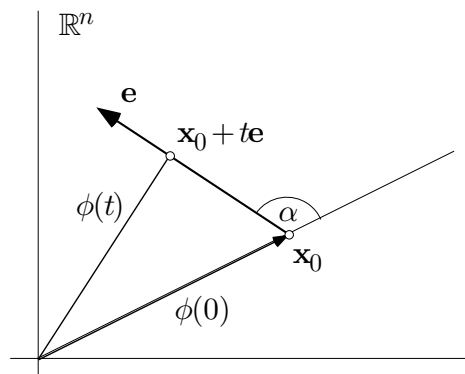


Fig. 5.1.8

Damit haben wir die Richtungsableitung der Betragsfunktion  $r(\cdot)$  an einer Stelle  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  in Richtung  $\mathbf{e}$  berechnet zu

$$D_{\mathbf{e}}r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{x}|} = \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}). \quad (4)$$

Der Wert der Richtungsableitung hängt also von der Richtung  $\mathbf{e}$  ab und läßt sich mit Hilfe des Skalarprodukts darstellen. (Wir werden sehen, daß das der Normalfall ist.) Die Zuwachsrates der Betragsfunktion hat den Maximalwert 1, wenn man in Richtung von  $\mathbf{x}$  fortschreitet; sie verschwindet in den Richtungen  $\mathbf{e} \perp \mathbf{x}$ , und sie hat den Minimalwert  $-1$ , wenn man von  $\mathbf{x}$  aus auf den Ursprung zuhält.  $\bigcirc$



Ist eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch einen Ausdruck in kartesischen Koordinaten ( $x, y$  oder  $x, y, z$  oder  $x_1, x_2, x_3$  usw.) gegeben, so lassen sich die Richtungsableitungen in den Koordinatenrichtungen besonders einfach berechnen. Wir betrachten der Einfachheit halber den zweidimensionalen Fall. Es sei also  $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0) \in \Omega$  ein fest gewählter Punkt. Die positive  $x$ -Richtung wird durch den Vektor  $\mathbf{e} := (1, 0)$  repräsentiert (Fig. 5.1.9). Zur Berechnung der Richtungsableitung  $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{z}_0) = D_{(1,0)}f(x_0, y_0)$  müssen wir die Differenzenquotienten

$$\frac{f(\mathbf{z}_0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{z}_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

betrachten. Man nennt den (beidseitigen) Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (5)$$

die **partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$**  und bezeichnet ihn mit

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \quad f_x(x_0, y_0)$$

oder ähnlich. Werden nummerierte Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  verwendet, so schreiben wir  $f_{.i}$  anstelle von  $f_{x_i}$ .

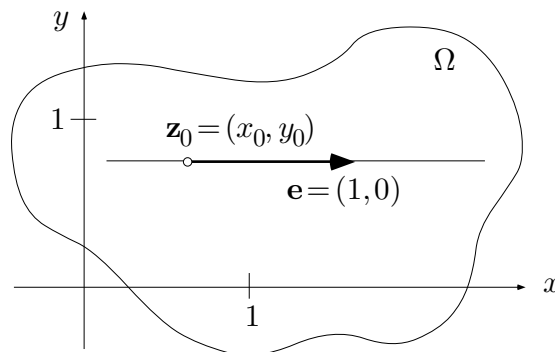


Fig. 5.1.9

*Anmerkung:* In (5) wird anders als bei der Richtungsableitung der beidseitige Grenzwert verlangt. Ist  $f$  partiell nach  $x$  differenzierbar, so gilt

$$D_{(1,0)}f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad D_{(-1,0)}f = -\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Die Betragsfunktion (siehe Beispiel ②) ist im Ursprung *nicht* partiell nach  $x_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) differenzierbar.

Die Berechnung (5) der partiellen Ableitung von  $f$  nach  $x$  läuft darauf hinaus, die **partielle Funktion**

$$\psi(x) := f(x, y_0)$$

an der Stelle  $x_0$  nach ihrer einzigen Variablen  $x$  abzuleiten. Die in  $f$  noch vorkommenden weiteren Variablen werden dabei als Konstante behandelt.

Die partielle Ableitung  $f_x(x_0, y_0)$  ist zunächst eine Zahl. Durchläuft nun der Punkt  $(x_0, y_0)$  das Gebiet  $\Omega$ , so wird daraus eine Funktion

$$f_x(\cdot, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

die ebenfalls als **partielle Ableitung** von  $f$  bezeichnet wird. Für die Berechnung von  $f_x$  stehen die Formeln von Abschnitt 3.1 zur Verfügung. Ist  $f$  gegeben als Ausdruck in den Variablen  $x$  und  $y$ , so erscheint auch  $f_x$  als ein derartiger Ausdruck.

③ Die Funktion  $f(x, y) := x^y$  ist definiert in der rechten Halbebene  $x > 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y x^{y-1}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} e^{(\log x)y} = \log x e^{(\log x)y} = \log x \cdot x^y. \end{aligned}$$

Für die Betragsfunktion  $r(\mathbf{x}) := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  hat man

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}), \quad (6)$$

in Übereinstimmung mit (4), denn es ist  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = x_i$ . ○

④ Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Argument“funktion”

$$\arg : \dot{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi, \quad (x, y) \mapsto \arg(x, y),$$

wobei  $\dot{\mathbb{R}}^2$  die **punktierte Ebene**  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  bezeichnet und  $/2\pi$  darauf hinweist, daß Argumentwerte nur “modulo  $2\pi$ ” festgelegt sind.

In jeder dem Ursprung abgewandten Halbebene  $H$  definiert  $\arg$  unendlich viele tatsächlich reellwertige Funktionen

$$\phi_k(\cdot, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R},$$

die sich voneinander um konstante Funktionen unterscheiden:

$$\phi_k(x, y) - \phi_l(x, y) \equiv 2(k - l)\pi .$$

Somit besitzen alle diese  $\phi_k(\cdot, \cdot)$  dieselben partiellen Ableitungen, die dann mit Fug als partielle Ableitungen von  $\arg$  aufgefaßt werden können. Zur Berechnung dieser Ableitungen kann man irgend ein  $\phi_k(\cdot, \cdot)$  heranziehen, in der Halbebene  $x > 0$  (Fig. 5.1.10) zum Beispiel die Funktion

$$\phi_0(x, y) = \arctan \frac{y}{x} .$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} , \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial y} &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x} \arg(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} , \quad \frac{\partial}{\partial y} \arg(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} ,$$

und man kann leicht zeigen, daß diese Formeln in der ganzen punktierten Ebene gelten. ○

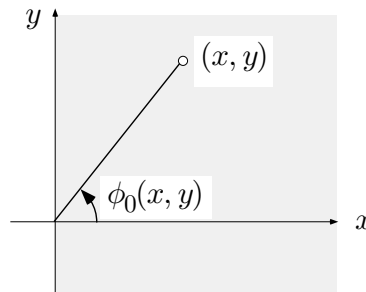


Fig. 5.1.10

Da die partiellen Ableitungen so bequem zu berechnen sind, stellt sich natürlich die Frage, ob wir mit ihrer Hilfe auch die Richtungsableitung für eine beliebige Richtung  $\mathbf{e}$  bekommen können. Bevor wir dem nachgehen, behandeln wir noch folgendes Problem: Was hat es zu bedeuten, wenn etwa die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial y}$  einer Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  identisch verschwindet? Wenn die Ableitung einer Funktion von *einer* Variablen auf einem Intervall identisch verschwindet, so ist die Funktion dort konstant (Satz **(3.8)**). Wir zeigen:

(5.1) Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  eine  $y$ -einfache offene Menge und gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \equiv 0$$

auf  $\Omega$ , so gibt es eine Funktion  $u(\cdot)$  der einen Variablen  $x$  mit

$$f(x, y) \equiv u(x) \quad ((x, y) \in \Omega), \quad (7)$$

das heißt: “ $f$  hängt nur von  $x$  ab”.

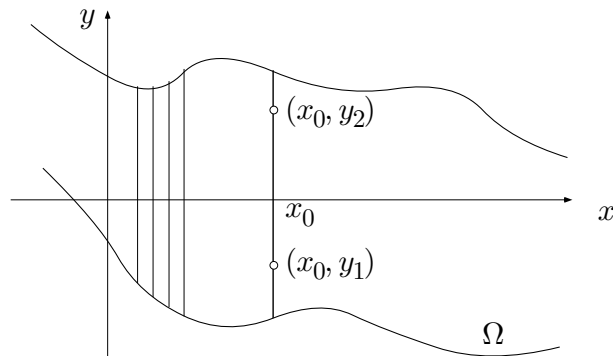


Fig. 5.1.11

□ Wir betrachten für ein festes  $x_0$  die partielle Funktion

$$\psi(y) := f(x_0, y) \quad ((x_0, y) \in \Omega).$$

Nach Voraussetzung über  $\Omega$  ist  $\text{dom}(\psi)$  ein Intervall (Fig. 5.1.11), und nach Voraussetzung über  $f$  ist

$$\psi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \equiv 0.$$

Somit ist  $\psi(\cdot)$  konstant, das heißt: Für zwei beliebige Punkte  $y_1, y_2 \in \text{dom}(\psi)$  gilt

$$f(x_0, y_1) = \psi(y_1) = \psi(y_2) = f(x_0, y_2).$$

Hiernach ist

$$u(x_0) := f(x_0, y) \quad ((x_0, y) \in \Omega)$$

wohldefiniert, und da  $x_0$  beliebig war, gilt (7). □

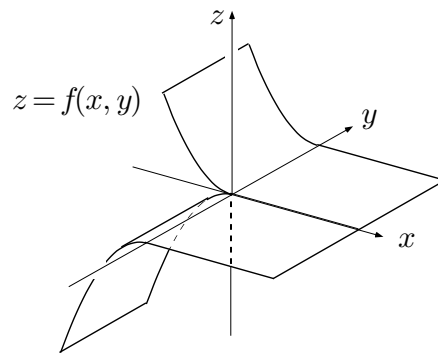


Fig. 5.1.12

Nebenbei: Die Voraussetzung über  $\Omega$  ist tatsächlich notwendig. Es sei etwa

$$\Omega := \{(x, y) \mid x > 0 \vee y \neq 0\}$$

die aufgeschnittene Ebene (Fig. 5.1.12) und

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & (x \geq 0), \\ x^2 \operatorname{sgn} y & (x < 0). \end{cases}$$

Dann ist  $\Omega$  zusammenhängend,  $f(\cdot, \cdot)$  besitzt auf  $\Omega$  sogar stetige partielle Ableitungen, und es ist  $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$  auf  $\Omega$ . Trotzdem läßt sich  $f$  nicht in der Form (7) darstellen.

## Lineare Approximation des Wertzuwachses

Besitzt eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetige partielle Ableitungen nach allen Variablen, so heißt  $f$  **stetig differenzierbar** oder kurz: eine  **$C^1$ -Funktion** (wir werden auf diese Bezeichnungsweise zurückkommen). Der folgende Satz ist für alles Weitere fundamental. Er besagt, daß eine  $C^1$ -Funktion von  $n$  Variablen im Kleinen linearisiert werden kann, und liefert damit den Anfang der Taylor-Entwicklung einer derartigen Funktion. Wir formulieren und beweisen den Satz zunächst für Funktionen von zwei Variablen.

**(5.2)** *Es sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion von zwei reellen Variablen  $x, y$  bzw. der Vektorvariablen  $\mathbf{z} := (x, y)$ , und es sei  $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0)$  ein fest gewählter Punkt in  $\Omega$ . Dann gilt*

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|) \quad (\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_0)$$

mit

$$A := f_x(x_0, y_0), \quad B := f_y(x_0, y_0).$$

□ Wir schreiben

$$\Delta f := f(x, y) - f(x_0, y_0) = (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) + (f(x, y) - f(x, y_0))$$

und wenden auf jede der beiden Klammern rechter Hand den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Version **(3.6)**, an. Es folgt

$$\Delta f = f_x(\xi, y_0)(x - x_0) + f_y(x, \eta)(y - y_0),$$

wobei  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ ,  $\eta$  zwischen  $y_0$  und  $y$  liegt (Fig. 5.1.13). Setzen wir  $(\xi, y_0) =: \mathbf{z}_1$ ,  $(x, \eta) =: \mathbf{z}_2$ , so folgt

$$\Delta f - A(x - x_0) - B(y - y_0) = (f_x(\mathbf{z}_1) - A)(x - x_0) + (f_y(\mathbf{z}_2) - B)(y - y_0)$$

und somit

$$|\Delta f - A(x - x_0) - B(y - y_0)| \leq (|f_x(\mathbf{z}_1) - A| + |f_y(\mathbf{z}_2) - B|)|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|.$$

Da die Punkte  $\mathbf{z}_1$  und  $\mathbf{z}_2$  mit  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_0$  ebenfalls gegen  $\mathbf{z}_0$  konvergieren und da  $f_x$  und  $f_y$  dort stetig sind, strebt hier die große Klammer rechter Hand mit  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_0$  gegen 0. Es gilt also

$$\lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_0} \frac{\Delta f - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|} = 0,$$

wie behauptet. □

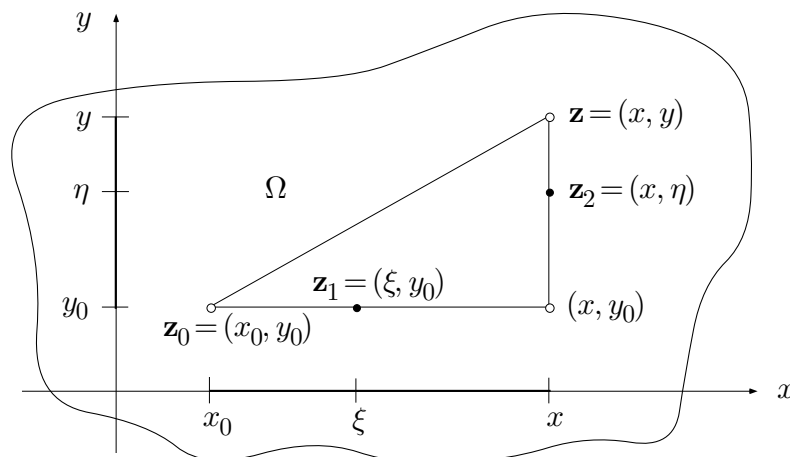


Fig. 5.1.13

Der “praktische Gehalt” dieses Satzes ist die Näherungsformel

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) \quad (8)$$

$$(A := f_x(x_0, y_0), \quad B := f_y(x_0, y_0))$$

zur approximativen Berechnung des Funktionswertes  $f(x, y)$ , wenn  $(x, y)$  nahe bei  $(x_0, y_0)$  liegt und die Werte von  $f$ ,  $f_x$  und  $f_y$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  verfügbar sind. Zur Qualität der Approximation das folgende: Der Fehler in der banalen Näherung  $f(x, y) \doteq f(x_0, y_0)$  geht mit  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_0$  gegen 0, “im Normalfall” so schnell wie  $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|$ . Der Fehler in der Näherung (8) geht wesentlich schneller gegen 0 als  $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|$ , “im Normalfall” so schnell wie  $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|^2$ .

⑤ Es sollen Näherungswerte für die Zahlen

$$\alpha := \sqrt{3.03^2 + 3.95^2}, \quad \beta := \sqrt{2.94^2 + 4.07^2}$$

bestimmt werden. Hierzu führen wir die Funktion

$$r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$$

ein; sie besitzt nach (6) die partiellen Ableitungen

$$r_x(x, y) = \frac{x}{r}, \quad r_y(x, y) = \frac{y}{r}.$$

Die vorliegenden numerischen Daten legen nahe,  $(x_0, y_0) := (3, 4)$  zu wählen. Dann ist

$$r(x_0, y_0) = 5, \quad r_x(x_0, y_0) = \frac{3}{5}, \quad r_y(x_0, y_0) = \frac{4}{5},$$

und wir erhalten aufgrund von (8):

$$r(x, y) \doteq 5 + 0.6 \cdot (x - 3) + 0.8(y - 4).$$

Damit wird

$$\alpha \doteq 5 + 0.6 \cdot 0.03 + 0.8 \cdot (-0.05) = 4.9780,$$

$$\beta \doteq 5 + 0.6 \cdot (-0.06) + 0.8 \cdot 0.07 = 5.0200.$$

Die wahren Werte sind 4.97829 und 5.02081.

○

## Tangenten und Tangentialebenen

Um eine geometrische Deutung von (8) zu geben, betrachten wir den Graphen von  $f$ . Der Graph

$$\mathcal{G} : \quad z = f(x, y)$$

einer  $C^1$ -Funktion  $f$  von zwei Variablen ist eine glatte Fläche im  $(x, y, z)$ -Raum, die schlicht über  $\text{dom}(f)$  liegt.

An dieser Stelle ist eine allgemeine Bemerkung über Tangenten und Tangentialebenen notwendig: Eine glatte Kurve  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  besitzt in jedem Punkt  $P \in \gamma$  eine Tangente, die wir mit  $T_P\gamma$  bezeichnen. Eine glatte Fläche  $S$  im  $\mathbb{R}^3$  besitzt in jedem Punkt  $P \in S$  eine **Tangentialebene**, die wir mit  $T_PS$  bezeichnen.  $T_PS$  ist durch folgende Eigenschaft charakterisiert (Fig. 5.1.14): Ist  $\gamma$  irgendeine durch  $P$  gehende Kurve auf der Fläche  $S$ , so liegt die Tangente  $T_P\gamma$  in der Ebene  $T_PS$ . Andersherum:  $T_PS$  wird von den Tangenten an die Flächenkurven durch  $P$  aufgespannt.

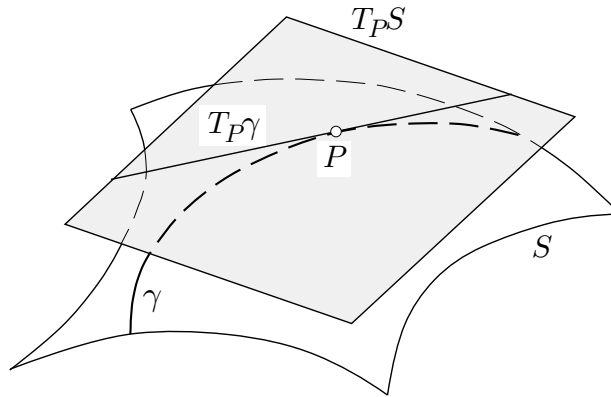


Fig. 5.1.14

Im Augenblick interessiert uns besonders die Umgebung des Punktes

$$P := (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathcal{G} .$$

Die Ebene  $y = y_0$  schneidet aus  $\mathcal{G}$  eine Kurve  $\gamma$  heraus (Fig. 5.1.15), die als Graph der partiellen Funktion

$$x \mapsto z := f(x, y_0) \quad (=:\phi(x))$$

aufgefaßt werden kann. Die Steigung von  $\gamma$  hat im Punkt  $P$  den Wert  $\phi'(x_0) = f_x(x_0, y_0) =: A$ . Folglich ist die Tangente  $T_P\gamma =: t$  gegeben durch

$$t : \quad \begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) \end{cases} . \quad (9)$$



Analog schneidet die Ebene  $x = x_0$  aus  $\mathcal{G}$  eine Kurve  $\bar{\gamma}$  heraus, die als Graph der partiellen Funktion

$$y \mapsto z := f(x_0, y)$$

aufgefaßt werden kann. Die Steigung von  $\bar{\gamma}$  hat im Punkt  $P$  den Wert  $f_y(x_0, y_0) =: B$ . Folglich ist die Tangente  $T_P\bar{\gamma} =: \bar{t}$  gegeben durch

$$\bar{t}: \quad \begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x_0, y_0) + B(y - y_0) \end{cases} .$$

Die beiden Geraden  $t$  und  $\bar{t}$  sind Tangenten an Flächenkurven durch  $P$  und liegen somit in der Tangentialebene  $T_P\mathcal{G} =: \mathcal{T}$ . Und weiter: Da  $t$  und  $\bar{t}$  voneinander verschieden sind, muß  $\mathcal{T}$  die von diesen beiden Geraden aufgespannte Ebene sein.

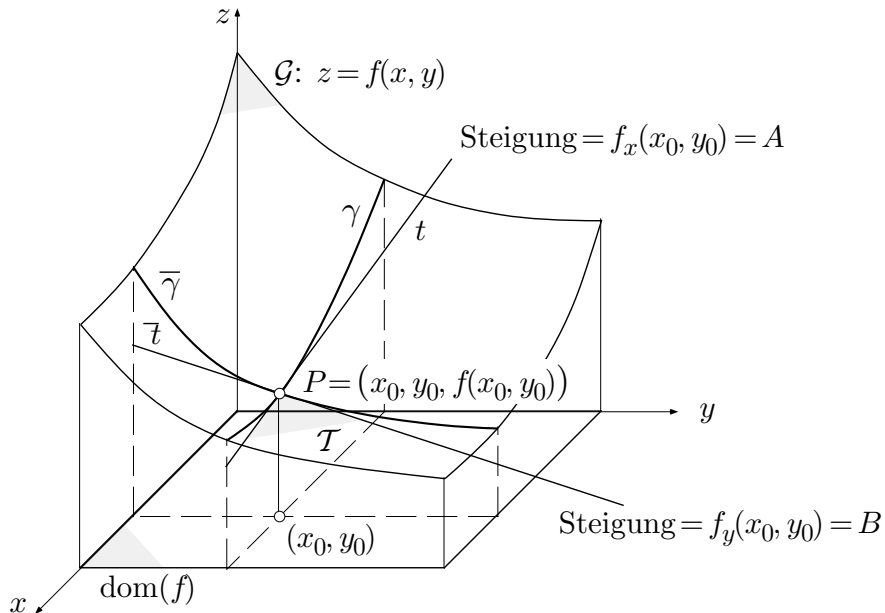


Fig. 5.1.15

Betrachten wir nun den Graphen der rechten Seite von (8)! Er besitzt die in den Variablen  $x$ ,  $y$  und  $z$  lineare Gleichung

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) ,$$

ist also eine Ebene. Schneiden wir diese Ebene mit der Ebene  $y = y_0$ , so resultiert die durch (9) gegebene Gerade  $t$ , und der Schnitt mit der Ebene

$x = x_0$  liefert die Gerade  $\bar{t}$ . Der Graph der rechten Seite von (8) ist also gerade die von  $t$  und  $\bar{t}$  aufgespannte Ebene  $\mathcal{T} = T_P\mathcal{G}$ .

Damit ist folgendes gezeigt: Der Gebrauch der Näherung (8) bedeutet, daß der Graph von  $f$  durch seine Tangentialebene  $\mathcal{T}$  im Punkt  $P$  ersetzt wird.

## Der Gradient

Wir formulieren nun (ohne weiteren Beweis) den Satz (5.2) für Funktionen von  $n$  reellen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  bzw. für Funktionen einer Vektorvariablen  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ :

(5.2') Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion,  $\mathbf{x} \in \Omega$  ein fest gewählter Punkt und  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$  ein im Punkt  $\mathbf{x}$  angehefteter variabler Zuwachs. Dann gilt

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + o(|\mathbf{h}|) \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}) \quad (10)$$

mit Koeffizienten  $A_k := f_{,k}(\mathbf{x})$ .

Der Zuwachs des Funktionswertes ist also in erster Näherung eine lineare Funktion des Zuwachses  $\mathbf{h}$  der unabhängigen Variablen. Die in (10) erscheinende Summe von  $n$  Produkten läßt sich als Skalarprodukt deuten. Hierzu betrachten wir die Koeffizienten  $A_k$  als Koordinaten eines im Punkt  $\mathbf{x}$  angehefteten Vektors  $\nabla f$ , des sogenannten **Gradienten** von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}$ . Wir definieren also formal:

$$\nabla f(\mathbf{x}) := (f_{,1}(\mathbf{x}), f_{,2}(\mathbf{x}), \dots, f_{,n}(\mathbf{x}))$$

(auch die Bezeichnung **grad**  $f$  ist üblich), wobei wir zur geometrischen Bedeutung dieses Ansatzes gleich kommen werden. Jedenfalls können wir nun die Beziehung (10) folgendermaßen schreiben:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}), \quad (11)$$

und dies liefert die äußerst handliche Näherungsformel

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \doteq \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}. \quad (12)$$

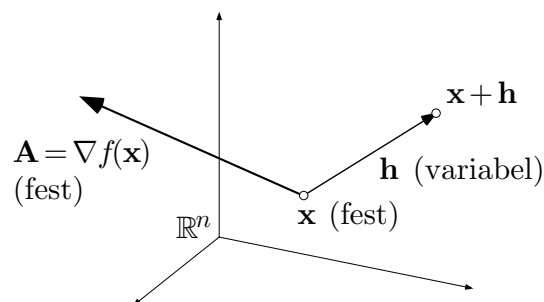


Fig. 5.1.16

Die Version (11) von Satz (5.2') setzt uns instand, die oben offengebliebene Frage zu beantworten, wie sich die Richtungsableitung für eine beliebige Richtung  $\mathbf{e}$  aus den partiellen Ableitungen berechnen läßt. Mit  $\mathbf{h} := t\mathbf{e}$  ( $t > 0$ ) erhalten wir aus (11):

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (t\mathbf{e}) + o(t) \quad (t \rightarrow 0+)$$

und somit

$$\frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x})}{t} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} + o(1) \quad (t \rightarrow 0+).$$

Damit ergibt sich für die gesuchte Richtungsableitung die Formel

$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}. \quad (13)$$

⑥ Es sei

$$f(x, y, z) := \frac{x^2 + 2y}{3 - z};$$

gesucht ist die Richtungsableitung an der Stelle  $P := (4, 2, 1)$  in Richtung  $\mathbf{e} := \frac{1}{3}(2, 1, -2)$ . — Zunächst berechnen wir

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z) = \left( \frac{2x}{3 - z}, \frac{2}{3 - z}, \frac{x^2 + 2y}{(3 - z)^2} \right)$$

und haben nun den Punkt  $P$  einzusetzen:

$$\nabla f(4, 2, 1) = (4, 1, 5).$$

Damit ergibt sich

$$D_{\mathbf{e}}f(P) = (4, 1, 5) \cdot \frac{1}{3}(2, 1, -2) = -\frac{1}{3}.$$

○

Die Formel (13) erlaubt uns, den vorher rein formal eingeführten Gradienten auch geometrisch zu erklären. Für eine gegebene Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und einen fest gewählten Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  ist  $\nabla f(\mathbf{x}) =: \mathbf{A}$  ein wohlbestimmter, im Punkt  $\mathbf{x}$  angehefteter Vektor. Wir betrachten nun die Richtungsableitung  $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x})$  als eine Funktion  $q(\cdot)$  des Richtungsvektors  $\mathbf{e}$ ; der Definitionsbereich dieser Funktion ist somit die  $(n - 1)$ -dimensionale Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^n$  (Fig. 5.1.17):

$$q: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{e} \mapsto q(\mathbf{e}) := D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}).$$

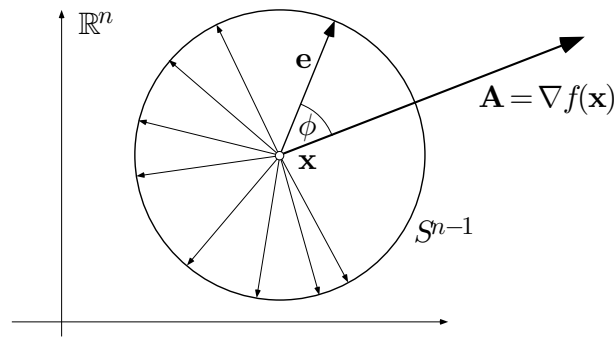


Fig. 5.1.17

Nach (13) ist

$$q(\mathbf{e}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{A}| \cos \phi,$$

wobei  $\phi$  den Winkel zwischen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{e}$  bezeichnet. Die Richtungsableitung  $q(\mathbf{e})$  hat daher den Maximalwert  $|\mathbf{A}|$ , wenn  $\mathbf{e}$  in die Richtung von  $\mathbf{A}$  weist, und  $q(\mathbf{e})$  ist minimal ( $= -|\mathbf{A}|$ ) in der entgegengesetzten Richtung. In anderen Worten: Der Gradient  $\nabla f(\mathbf{x})$  zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrate von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}$ , und sein Betrag ist gleich dieser maximalen Zuwachsrate.

⑦ An der Stelle  $P = (x_0, y_0)$  biegt der Bergweg um: Richtung Südost geht es mit 25% Steigung bergan, Richtung Süd geht es mit 20% Gefälle bergab (Fig. 5.1.18). Der Wanderer im Nebel möchte möglichst rasch zum Gipfel. In welcher Richtung muß er gehen, und wie steil ist es da?

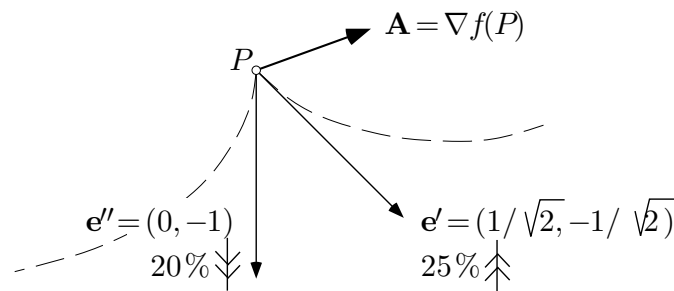


Fig. 5.1.18

Es bezeichne  $f(x, y)$  die Höhe über Meer an der Stelle  $(x, y)$ . Wir müssen versuchen, aus den gegebenen Daten den Gradienten  $\nabla f(x_0, y_0) =: (A_1, A_2)$  zu bestimmen. Die beiden genannten Himmelsrichtungen werden durch die Vektoren  $\mathbf{e}' := (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  und  $\mathbf{e}'' := (0, -1)$  repräsentiert. Nach (13) gilt

$$D_{\mathbf{e}'} f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}'$$

und analog für  $\mathbf{e}''$ . Setzen wir hier die Zahlen ein, so erhalten wir die zwei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} 0.25 &= \frac{1}{\sqrt{2}}A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}A_2 \\ -0.2 &= \quad \quad - A_2 \end{aligned} \right\}$$

für die Unbekannten  $A_1, A_2$ . Es folgt nacheinander  $A_2 = 0.2$ ,  $A_1 = \sqrt{2} \cdot 0.25 + 0.2 = 0.554$  und somit

$$\nabla f(P) = (0.554, 0.2) .$$

Die einzuschlagende Richtung ergibt sich aus

$$\arg(A_1, A_2) = 19.86^\circ ;$$

in dieser Richtung hat die Steigung (= Höhendifferenz pro Meter Horizontal-distanz) den Wert

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 59\% .$$

○

## Die verallgemeinerte Kettenregel

Zum eisernen Bestand der Differentialrechnung in mehreren Variablen gehört die sogenannte verallgemeinerte Kettenregel. Es geht da um die Ableitung von zusammengesetzten Funktionen in einem mehrdimensionalen Environment. Die Regel drückt letzten Endes aus, daß der Zusammensetzung von Funktionen die Zusammensetzung ihrer (als lineare Abbildungen aufgefaßten) Ableitungen entspricht. Sie ist daher in erster Linie bei theoretischen Überlegungen von Bedeutung und weniger beim Rechnen mit konkret gegebenen Funktionsausdrücken.

Es sei also

$$\mathbf{x}(\cdot) : \mathbb{R} \curvearrowright \Omega , \quad t \mapsto \mathbf{x}(t)$$

eine vektorwertige Funktion der Variablen  $t$  ("Zeit"), die man etwa als Bahn eines Satelliten interpretieren kann (Fig. 5.1.19). Weiter sei

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

eine reellwertige Funktion; man kann sich dabei vorstellen, daß  $f(\mathbf{x})$  die Temperatur an der Stelle  $\mathbf{x}$  angibt.

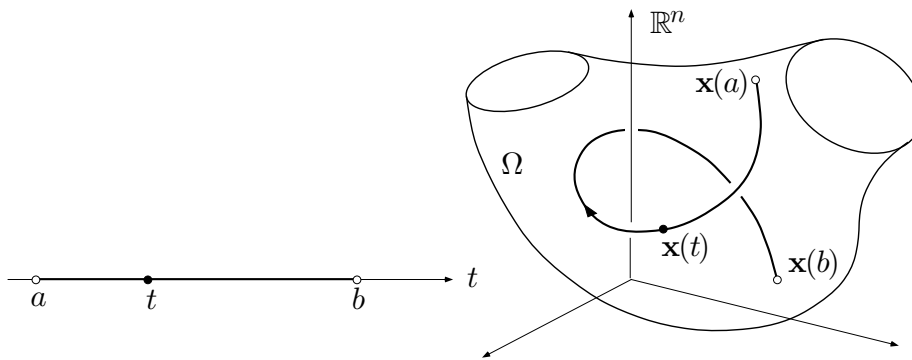


Fig. 5.1.19

Die aus  $\mathbf{x}(\cdot)$  und  $f$  zusammengesetzte Funktion

$$\phi(t) := f(\mathbf{x}(t)) \quad (14)$$

der Variablen  $t$  hat in unserem Bild folgende Bedeutung: Sie stellt den von einem mitreisenden Beobachter erlebten zeitlichen Temperaturverlauf dar. Sind  $\mathbf{x}$  und  $f$  durch Funktionsterme gegeben, so läßt sich der Funktionsterm  $\phi(t)$  ohne weiteres durch den Vollzug von (14) erhalten und der Ableitungsterm  $\phi'(t)$  nach den bekannten Regeln ausrechnen. Die verallgemeinerte Kettenregel liefert aber eine Darstellung von  $\phi'(t)$ , in der die Entstehungsgeschichte (14) noch deutlich sichtbar ist: Sowohl die partiellen Ableitungen von  $f$  wie die Ableitungen der Komponentenfunktionen von  $\mathbf{x}(\cdot)$  gehen in charakteristischer Weise in diese Darstellung ein. Hier also die **verallgemeinerte Kettenregel**:

**(5.3)** Ist  $\phi: t \mapsto f(\mathbf{x}(t))$  die aus den  $C^1$ -Funktionen  $\mathbf{x}(\cdot): \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^n$  und  $f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$  zusammengesetzte Funktion, so ist auch  $\phi$  eine  $C^1$ -Funktion, und zwar gilt

$$\phi' = f_{.1} x'_1 + f_{.2} x'_2 + \dots + f_{.n} x'_n,$$

oder ausführlich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) &= f_{.1}(\mathbf{x}(t)) \cdot x'_1(t) + \dots + f_{.n}(\mathbf{x}(t)) \cdot x'_n(t) \\ &= \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t). \end{aligned} \quad (15)$$

□ Es sei  $t_0 \in \text{dom}(\mathbf{x}(\cdot))$  ein fest gewählter Zeitpunkt und  $\mathbf{x}(t_0) =: \mathbf{x}_0$ . Weiter sei  $t$  ein variabler Zeitpunkt in der Nähe von  $t_0$ ; es sei etwa  $t > t_0$ . Zum Zeitintervall  $[t_0, t]$  gehört die Ortsveränderung

$$\mathbf{h} := \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 \doteq (t - t_0)\mathbf{x}'(t_0)$$

(Fig. 5.1.20). Aufgrund von (12) können wir nun folgendermaßen argumentieren:

$$\begin{aligned}\phi(t) - \phi(t_0) &= f(\mathbf{x}(t)) - f(\mathbf{x}(t_0)) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) \\ &\doteq \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} \doteq \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}'(t_0) (t - t_0) .\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} \doteq \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}'(t_0) ,$$

und im Limes  $t \rightarrow t_0$  ergibt sich eben

$$\phi'(t_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}'(t_0) = \sum_{k=1}^n f_{,k}(\mathbf{x}_0) \cdot x'_k(t_0) ,$$

was zu beweisen war. ┘

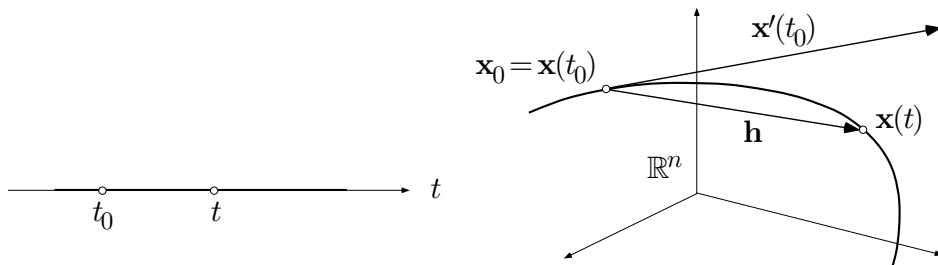


Fig. 5.1.20

⑧ Um eine ganz banale Anwendung der verallgemeinerten Kettenregel zu geben, betrachten wir das Produkt

$$\phi(t) := u(t) \cdot v(t)$$

der beiden reellwertigen Funktionen  $u(\cdot)$  und  $v(\cdot)$  als Zusammensetzung der vektorwertigen Funktion

$$\mathbf{w}(\cdot) : t \mapsto \mathbf{w}(t) := (u(t), v(t))$$

mit der Funktion

$$f(u, v) := uv$$

von zwei Variablen: Es ist  $\phi(t) \equiv f(\mathbf{w}(t))$ . Wegen

$$f_u(u, v) = v, \quad f_v(u, v) = u$$

folgt

$$\phi'(t) = f_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + f_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t) = v(t)u'(t) + u(t)v'(t) ,$$

wie erwartet. ○

## Differentiation unter dem Integralzeichen

Eine weitere, ebenfalls nichtgeometrische Anwendung von Satz (5.3) ist die sogenannte Leibnizsche Regel über die Ableitung eines Integrals nach einem Parameter. Es sei zunächst  $B \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter Bereich und

$$f(\cdot, t) : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, t)$$

eine mit der reellen Hilfsvariablen  $t$  parametrisierte Schar von Funktionen der räumlichen Variablen  $\mathbf{x}$ . Das Integral dieser Funktionen über den Bereich  $B$  wird dann von  $t$  abhängen; das heißt: Es liegt eine Funktion

$$\Phi(t) := \int_B f(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x})$$

vor. Beispiel: Bezeichnet  $f(\mathbf{x}, t)$  die elektrische Ladungsdichte an der Stelle  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$ , so stellt  $\Phi(t)$  die zur Zeit  $t$  in dem Bereich  $B$  befindliche Gesamtladung dar.

Die **Leibnizsche Regel** besagt, daß man zur Berechnung der Ableitung  $\Phi'(t)$  unter dem Integralzeichen partiell nach  $t$  differenzieren darf:

(5.4) *Unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen gilt*

$$\frac{d}{dt} \int_B f(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) = \int_B f_t(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}).$$

□ Wir halten einen Punkt  $t_0 \in \text{dom}(\Phi)$  fest. Dann gilt für beliebige  $t$  in der Nähe von  $t_0$ :

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(t_0) &= \int_B f(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) - \int_B f(\mathbf{x}, t_0) d\mu(\mathbf{x}) \\ &= \int_B (f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t_0)) d\mu(\mathbf{x}) \doteq \int_B f_t(\mathbf{x}, t_0) (t - t_0) d\mu(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

und somit

$$\Phi'(t_0) \doteq \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} \doteq \int_B f_t(\mathbf{x}, t_0) d\mu(\mathbf{x}).$$

Da hier die Genauigkeit durch geeignete Wahl von  $t \doteq t_0$  beliebig gesteigert werden kann, gilt in Wirklichkeit

$$\Phi'(t_0) = \int_B f_t(\mathbf{x}, t_0) d\mu(\mathbf{x}),$$

wie behauptet. □



⑨ Es soll das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx =: \Phi(\alpha) \quad (\alpha \geq 0)$$

berechnet werden. (Der Integrand strebt für  $x \rightarrow 0+$  gegen 0 und für  $x \rightarrow 1-$  gegen  $\alpha$ .) — Eine Stammfunktion ist nirgends in Sicht. Der Umweg über  $\Phi'$  hilft aber weiter:

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx = \int_0^1 \frac{\log x \cdot x^\alpha}{\log x} dx = \int_0^1 x^\alpha dx \\ &= \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha + 1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\Phi(\alpha) = \log(\alpha + 1) + C$$

für ein geeignetes  $C$ , und da offensichtlich  $\Phi(0) = 0$  ist, erhalten wir definitiv

$$\Phi(\alpha) = \log(\alpha + 1).$$

○

Gelegentlich hängt auch der Integrationsbereich  $B$  von dem Parameter ab. Im eindimensionalen Fall geht es dann um Integrale der folgenden Art (siehe die Fig. 5.1.21):

$$\Phi(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx.$$

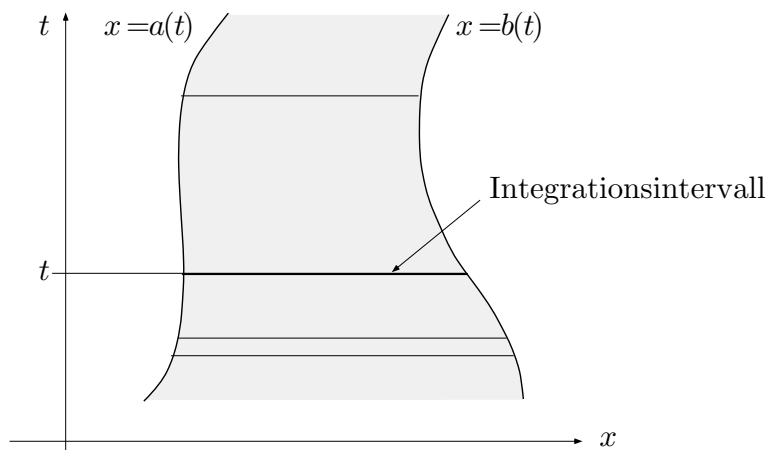


Fig. 5.1.21

Wenn wir die Ableitung dieser neuen Funktion  $\Phi$  berechnen wollen, so müssen wir in geeigneter Weise berücksichtigen, daß die Variable  $t$  an drei verschiedenen Stellen in die Definition von  $\Phi$  eingeht. Hierzu führen wir formal die vektorwertige Funktion

$$\mathbf{r}(\cdot) : t \mapsto (a(t), b(t), t)$$

ein sowie die reellwertige Funktion

$$F(a, b, c) := \int_a^b f(x, c) dx$$

der drei Variablen  $a, b, c$  bzw. der Vektorvariablen  $\mathbf{r} := (a, b, c)$ . Dann läßt sich  $\Phi$  in der folgenden Weise schreiben:

$$\Phi(t) = F(\mathbf{r}(t)) \quad \text{—}$$

ein klarer Fall für Satz **(5.3)**:

$$\Phi'(t) = F_a \cdot a'(t) + F_b \cdot b'(t) + F_c \cdot 1,$$

wobei die partiellen Ableitungen  $F_a, F_b, F_c$  an der Stelle  $\mathbf{r}(t)$  zu nehmen sind. Mit **(4.4)** und **(5.4)** ergibt sich

$$F_a(a, b, c) = -f(a, c), \quad F_b(a, b, c) = f(b, c), \quad F_c(a, b, c) = \int_a^b f_c(x, c) dx,$$

so daß wir als **Leibnizsche Regel “mit Extras”** die folgende Formel notieren können:

**(5.5)**

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx.$$

Die nächste Anwendung der verallgemeinerten Kettenregel kommt bestimmt.

## Aufgaben

1. (M) Es sei

$$f(x, y) := \arctan(2x^2 + 3xy - 4y^2) .$$

Berechne  $f(1, 1)$  sowie einen Näherungswert für  $f(1.02, 0.97)$ . Vergleiche mit dem genauen Wert.

2. Es sei

$$F(\alpha) := \int_1^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0) .$$

Man gebe einen integralfreien Ausdruck für  $F'(\alpha)$ .

3. Die Funktion

$$f(x, y, z) := \int_{\cos x}^{\sin y} e^{zt} dt$$

(integriert wird nach  $t$ ; die Variablen  $x, y, z$  werden während der Integration festgehalten!) ist im ganzen  $(x, y, z)$ -Raum erklärt. Berechne  $\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0\right)$ .

4. Finde und beweise dabei eine koordinatenfreie Identität der Form

$$\nabla(f \cdot g) = \dots .$$

## 5.2 Höhere Ableitungen, Taylorsche Formel

### Funktionen der Klasse $C^r$

Ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von  $n$  reellen Variablen ( $x, y$  oder  $x, y, z$  oder  $x_1, \dots, x_n$ ), so sind ihre  $n$  partiellen Ableitungen

$$f_x, f_y \quad \text{bzw.} \quad f_x, f_y, f_z \quad \text{bzw.} \quad f_{.k} \quad (1 \leq k \leq n) \quad (1)$$

Funktionen derselben Art, allenfalls mit einem etwas kleineren Definitionsbereich  $\Omega' \subset \Omega$ .

① Die Betragsfunktion

$$r(\mathbf{x}) := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

besitzt den Definitionsbereich  $\mathbb{R}^n$ . Ihre partiellen Ableitungen

$$r_{.k}(\mathbf{x}) = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_k}{r} \quad (1 \leq k \leq n)$$

sind jedoch nur im punktierten Raum  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  erklärt. ○

Die Funktionen (1) besitzen ihrerseits partielle Ableitungen nach allen Variablen, so daß wir zum Beispiel bei einer Funktion von  $x$  und  $y$  auf vier partielle Ableitungen zweiter Ordnung kommen:

$$(f_x)_x =: f_{xx}, \quad (f_x)_y =: f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}.$$

In dieser Weise fortfahrend können wir (jedenfalls formal) partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung bilden, wobei jede derartige Ableitung durch ein bestimmtes "Wort" aus dem Variablenalphabet gekennzeichnet ist. So ist  $f_{xxyxyyx}$  eine gewisse partielle Ableitung siebenter Ordnung von  $f$ . Sind alle partiellen Ableitungen von  $f$  bis zur Ordnung  $r$  tatsächlich vorhanden und stetig, so nennt man  $f$  eine Funktion der **Klasse**  $C^r$  und schreibt  $f \in C^r$ , wenn nötig  $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R})$ .

Nun darf man "bekanntlich" bei höheren partiellen Ableitungen die Differentiationsreihenfolge vertauschen. In erster Linie gilt:

**(5.6)** Es sei  $f$  eine  $C^2$ -Funktion der Variablen  $x$  und  $y$ . Dann gilt  $f_{xy} = f_{yx}$ .

┌ Betrachte einen festen Punkt  $(x_0, y_0) \in \text{dom}(f)$ . Die Größe

$$A(x, y) := f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)$$

(Fig. 5.2.1) ist für alle Punkte  $(x, y)$  in der Nähe von  $(x_0, y_0)$  definiert und steht in dem folgenden Zusammenhang mit den gemischten Ableitungen von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} f_{xy}(x_0, y_0) &\doteq \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &\doteq \frac{\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} - \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}}{y - y_0} = \frac{A(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)}. \end{aligned}$$

Analog schließt man für  $f_{yx}(x_0, y_0)$ ; und es folgt

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{A(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = f_{yx}(x_0, y_0). \quad \text{┐}$$

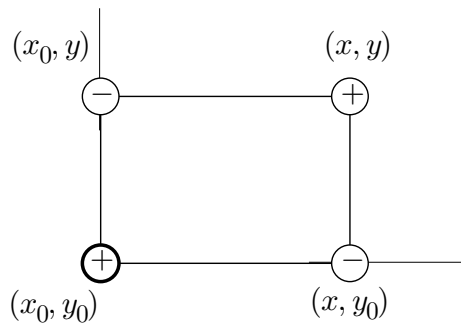


Fig. 5.2.1

Mit vollständiger Induktion ergibt sich hieraus, daß es bei partiellen Ableitungen irgendeiner Ordnung einzig darauf ankommt, wie oft nach jeder auftretenden Variablen differenziert wird. Man schreibt also zum Beispiel

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y \partial z^3}$$

und meint damit, daß  $f$  zweimal partiell nach  $x$ , einmal nach  $y$  und dreimal nach  $z$  zu differenzieren ist.

② Wir behandeln zwischenhinein das folgende kombinatorische Problem: Wieviele partielle Ableitungen der Ordnung  $\leq N$  muß man bei einer Funktion von  $n$  Variablen veranschlagen? Dieses Problem ist von praktischer Bedeutung, wenn es darum geht, in einem Computer Speicherplätze für die Koeffizienten von  $N$ -Jets (Taylor-Polynomen) zu reservieren.

Jede der genannten partiellen Ableitungen läßt sich wie folgt durch ein Wort der Länge  $N + n$ , bestehend aus  $N$  Einsen und  $n$  Nullen, repräsentieren: Die  $n$  Nullen stehen als Trennstriche zwischen  $n + 1$  Gruppen von Einsen (einige dieser Gruppen können auch leer sein). Die Länge der  $k$ -ten derartigen Gruppe,  $0 \leq k \leq n$ , gibt an, wie oft nach der Variablen  $x_k$  differenziert werden soll. Die Variable  $x_0$  ist eine "Phantomvariable"; die Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $< N$  werden dann automatisch mitgezählt.

Bsp: Das Wort

10110100111

gehört zu  $n = 4$  und  $N = 7$ ; es repräsentiert die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_4^3}.$$

Es ist ziemlich klar, daß auf diese Weise die genannte Kollektion von partiellen Ableitungen bijektiv auf die Menge der 0-1-Folgen der Länge  $N + n$  mit genau  $n$  Nullen abgebildet wird. Die Anzahl dieser Folgen beträgt

$$\binom{N + n}{n}.$$

Dies ist auch die gesuchte Anzahl von Ableitungen. ○

### Taylor-Entwicklung bei zwei Variablen

Wir kommen nun zur Taylor-Entwicklung der Funktionen von  $n$  Variablen, wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall von  $n := 2$  Variablen  $x, y$  beschränken. Es sei also  $\Omega$  eine Umgebung des Punktes  $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0)$  und

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine Funktion der Klasse  $C^{N+1}$  für ein passendes  $N$ . Es geht darum, den Funktionswert an der (variablen) Stelle

$$\mathbf{z} := \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z} = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

durch ein Polynom in den Zuwachskordinaten  $\Delta x, \Delta y$  zu approximieren, wobei wir auch hier den Limes  $\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$  im Auge haben.

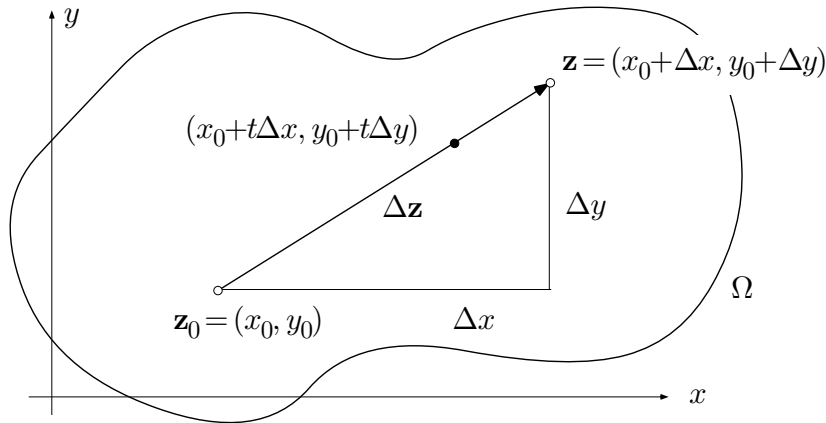


Fig. 5.2.2

Um die Resultate von Abschnitt 3.4 über die Taylor-Entwicklung von Funktionen *einer* Variablen verwenden zu können, halten wir  $\Delta \mathbf{z}$  für den Moment ebenfalls fest und betrachten die Hilfsfunktion

$$\Phi(t) := f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

die den Wertverlauf von  $f$  längs der Verbindungsstrecke der Punkte  $\mathbf{z}_0$  und  $\mathbf{z}$  beschreibt (Fig. 5.2.2). Dann ist  $\Phi(0) = f(x_0, y_0)$ , und

$$\Phi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

ist der gesuchte Endwert. Nach Satz (3.11), angewandt mit  $a := 0$  und  $t := 1$  lässt sich dieser Endwert wie folgt darstellen:

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \frac{1}{1!}\Phi'(0) + \frac{1}{2!}\Phi''(0) + \dots + \frac{1}{N!}\Phi^{(N)}(0) + R_N; \quad (2)$$

dabei ist

$$R_N = \frac{1}{(N+1)!}\Phi^{(N+1)}(\tau) \quad (3)$$

für ein geeignetes  $\tau \in ]0, 1[$ .

Für die Berechnung der Ableitungen von  $\Phi$  müssen wir wiederholt die verallgemeinerte Kettenregel (5.3) heranziehen. Die auftretenden partiellen Ableitungen von  $f$  sind nämlich an der Stelle  $(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$  zu nehmen und sind somit ebenfalls zusammengesetzte Funktionen von  $t$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= f_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y, \\ \Phi''(t) &= (f_{xx}\Delta x + f_{xy}\Delta y)\Delta x + (f_{yx}\Delta x + f_{yy}\Delta y)\Delta y \\ &= f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi'''(t) &= (f_{xxx}\Delta x + f_{xxy}\Delta y)\Delta x^2 + 2(f_{xyx}\Delta x + f_{xyy}\Delta y)\Delta x\Delta y + \dots \\ &= f_{xxx}\Delta x^3 + 3f_{xxy}\Delta x^2\Delta y + \dots\end{aligned}$$

und so weiter. Man erkennt das folgende Bildungsgesetz:

$$\Phi^{(r)}(t) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-k} \partial y^k} \Big|_{(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)} \Delta x^{r-k} \Delta y^k. \quad (4)$$

Wir wenden uns zunächst dem Hauptteil rechter Hand in (2) zu. Setzen wir für die Ableitungen  $\Phi^{(r)}(0)$  ( $0 \leq r \leq N$ ) die Werte ein, die sich aus (4) ergeben, so entsteht ein Polynom vom Grad  $\leq N$  in den Variablen  $\Delta x, \Delta y$ . Dieses Polynom ist der  **$N$ -Jet** oder das  **$N$ -te Taylorsche Approximationspolynom von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$** ; wir bezeichnen es mit  $j_{(x_0, y_0)}^N f$ . Die Koeffizienten des  $N$ -Jets sind die Werte der partiellen Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $\leq N$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ , versehen mit gewissen kombinatorischen Faktoren:

$$\begin{aligned}j_{(x_0, y_0)}^N f(\Delta x, \Delta y) &= f(x_0, y_0) + f_x \Delta x + f_y \Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{N!} \left( \binom{N}{0} f_{x^N} \Delta x^N + \binom{N}{1} f_{x^{N-1}y} \Delta x^{N-1} \Delta y + \dots \right)\end{aligned}$$

(alle partiellen Ableitungen sind an der Stelle  $(x_0, y_0)$  zu nehmen). — Damit können wir (2) ersetzen durch

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = j_{(x_0, y_0)}^N f(\Delta x, \Delta y) + R_N.$$

Wir versuchen nun, das Restglied (3) abzuschätzen. Nach Voraussetzung über  $f$  sind alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $N + 1$  von  $f$  in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  beschränkt; ferner ist

$$|\Delta x| \leq |\Delta \mathbf{z}|, \quad |\Delta y| \leq |\Delta \mathbf{z}|.$$

Betrachten wir daher die Darstellung (4) für  $r := N + 1$ , so können wir folgendes sagen: Es gibt eine von  $\Delta \mathbf{z}$  unabhängige Konstante  $C$  mit

$$|R_N| = \frac{1}{(N+1)!} |\Phi^{(N+1)}(\tau)| \leq C |\Delta \mathbf{z}|^{N+1},$$

denn für jeden der  $N + 2$  Summanden in (4) gilt eine derartige Abschätzung. Hieraus folgt:

$$R_N = o(|\Delta \mathbf{z}|^N) \quad (\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}).$$



Summa summarum haben wir den folgenden Satz über die Taylor-Entwicklung in zwei Variablen bewiesen:

**(5.7)** *Unter den getroffenen Annahmen gilt*

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = j_{(x_0, y_0)}^N f(\Delta x, \Delta y) + o(|\Delta \mathbf{z}|^N) \quad (\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}) .$$

Der frühere Satz **(5.2)** ist hierin als Fall  $N := 1$  enthalten. Satz **(5.7)** läßt sich natürlich zur approximativen Berechnung von Funktionswerten benutzen, indem man den  $o$ -Term vernachlässigt:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \doteq j_{(x_0, y_0)}^N f(\Delta x, \Delta y) .$$

Ist  $j_{(x_0, y_0)}^N f \neq 0$ , so begeht man dabei einen Fehler, der für  $\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$  wesentlich kleiner ist als der letzte in  $j_{(x_0, y_0)}^N f$  auftretende Term.

## Analyse von kritischen Punkten

Vor allem aber dient **(5.7)** zur Untersuchung von isolierten kritischen Punkten einer Funktion:

Es sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von  $n$  Variablen. Ein Punkt  $\mathbf{p} \in \Omega$  heißt **kritischer** oder **stationärer Punkt** von  $f$ , wenn  $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  ist, das heißt: wenn an der Stelle  $\mathbf{p}$  alle partiellen Ableitungen erster Ordnung verschwinden. Die kritischen Punkte sind also die Lösungen des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} f_{.1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{.n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

von  $n$  Gleichungen in  $n$  Unbekannten; sie liegen im allgemeinen isoliert. Ist  $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ , so heißt  $\mathbf{p}$  ein **regulärer Punkt** von  $f$ .

In einem kritischen Punkt gibt der 1-Jet keinen Aufschluß über das lokale Verhalten der Funktion, denn er ist eine Konstante. Wir müssen daher mindestens den 2-Jet betrachten, der in einem kritischen Punkt  $\mathbf{p}$  einer Funktion von  $n$  Variablen folgendermaßen aussieht:

$$j_{\mathbf{p}}^2 f(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n f_{.ik} \Delta x_i \Delta x_k .$$

Hier erscheint rechter Hand ein homogenes quadratisches Polynom in den Variablen  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ , die sogenannte **Hessesche Form** von  $f$  in dem betreffenden kritischen Punkt:

$$H(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) := \sum_{i,k=1}^n f_{.ik} \Delta x_i \Delta x_k$$

(die partiellen Ableitungen  $f_{.ik}$  sind an der Stelle  $\mathbf{p}$  zu nehmen). Die Analyse derartiger quadratischer Formen gehört zur linearen Algebra. Um einen kleinen Eindruck davon zu vermitteln, behandeln wir den Fall von zwei Variablen.

Es sei also  $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0)$  ein kritischer Punkt der Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Satz (5.7) gilt

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}H(\Delta x, \Delta y) + o(|\Delta \mathbf{z}|^2) \quad (5)$$

( $\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$ );

dabei ist

$$H(\Delta x, \Delta y) = f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2 .$$

Der kritische Punkt  $\mathbf{z}_0$  heißt **nichtentartet**, wenn die Determinante von  $H(\cdot, \cdot)$  nicht verschwindet:

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)_{\mathbf{z}_0} \neq 0 .$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt der Charakter der Hesseschen Form (positiv definit oder negativ definit oder indefinit, s.u.) vollständigen Aufschluß über das qualitative Verhalten von  $f$  in der Umgebung von  $\mathbf{z}_0$ , und man braucht sich um den  $o$ -Term in (5) nicht zu kümmern, wenn man zum Beispiel wissen will, ob an der Stelle  $\mathbf{z}_0$  ein lokales Maximum von  $f$  vorliegt. Wir wollen das hier nicht beweisen, machen aber Gebrauch davon beim Übergang von der zweiten zur dritten Kolonne der Tabelle 5.2.3.

**(5.8)** *Es sei  $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$  ein nichtentarteter kritischer Punkt der Funktion  $f$ . Dann trifft genau einer der in der Tabelle 5.2.3 beschriebenen Sachverhalte zu.*

Bedingungen	Hessesche Form	Verhalten von $f$ im Punkt $\mathbf{z}_0$
$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$		
(a) $f_{xx} > 0$	positiv definit (Bsp: $\Delta x^2 + \Delta y^2$ )	lokales Minimum
(b) $f_{xx} < 0$	negativ definit (Bsp: $-\Delta x^2 - \Delta y^2$ )	lokales Maximum
$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$	indefinit (Bsp: $\Delta x^2 - \Delta y^2$ )	kein lokales Extremum, "Sattelpunkt"

Tab. 5.2.3

□ Ist  $f_{xx} \neq 0$ , so läßt sich die Hessesche Form folgendermaßen schreiben:

$$H(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{f_{xx}} \left( (f_{xx}\Delta x + f_{xy}\Delta y)^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)\Delta y^2 \right). \quad (6)$$

Es sei zunächst  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ . Dann ist die eckige Klammer positiv für alle Werte der Variablen  $\Delta x, \Delta y$ , außer für  $\Delta x = \Delta y = 0$ . Ist  $f_{xx} > 0$ , so ist dann auch  $H(\Delta x, \Delta y)$  stets positiv, außer für  $\Delta x = \Delta y = 0$ , und folglich im Ursprung minimal. Ein derartiges  $H(\cdot, \cdot)$  heißt **positiv definit**. Nach dem angeführten Prinzip ist dann die Ausgangsfunktion  $f$  im Punkt  $\mathbf{z}_0$  lokal minimal. Analog schließt man, falls  $f_{xx} < 0$  ist.

Im Fall  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$  enthält die große Klammer in (6) einen Plusterm und einen Minusterm und kann somit beiderlei Vorzeichen annehmen. Dasselbe gilt dann auch für  $H(\cdot, \cdot)$ , das heißt:  $H(\cdot, \cdot)$  ist **indefinit**.

Der Fall  $f_{xx} = 0$  wird ähnlich behandelt. □

Hiernach gibt es bei zwei Variablen genau drei verschiedene Typen von nicht-entarteten kritischen Punkten. Zu diesen drei Typen gehören drei charakteristische Gestalten des Graphen von  $f$  in der Umgebung eines derartigen Punktes, siehe die Figuren 5.2.4–5.

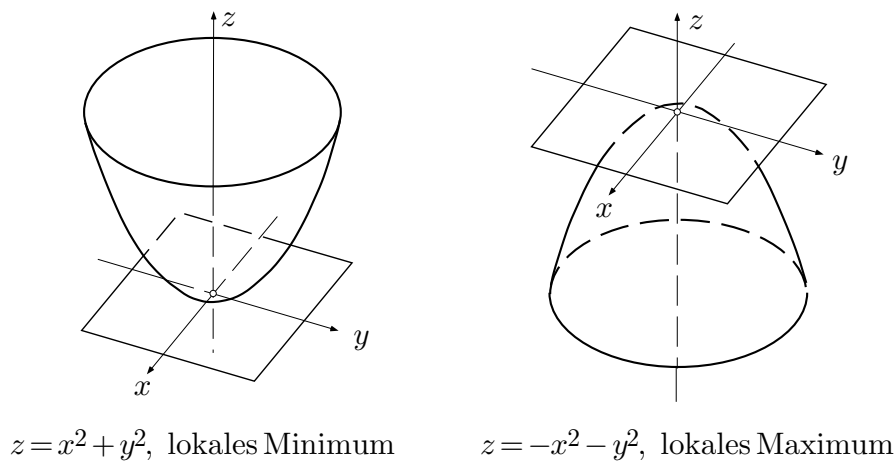


Fig. 5.2.4

③ Die Funktion

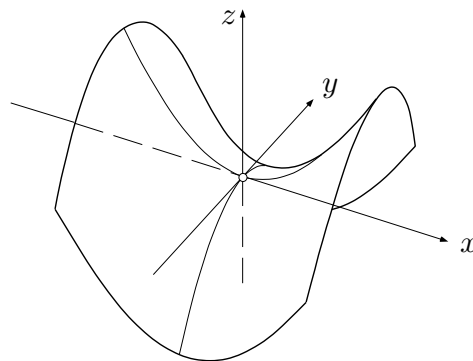
$$f(x, y) := \frac{x^2}{2} + \alpha y^4$$

ist ein Polynom und somit ihre eigene Taylor-Entwicklung im Ursprung. Da lineare Glieder fehlen, ist der Ursprung ein kritischer Punkt, und zwar ist die zugehörige Hessesche Form ablesbar als

$$H(x, y) = x^2.$$

(Wird im Ursprung entwickelt, so benötigt man keine Hilfsvariablen  $\Delta x, \Delta y$ .) Die Determinante dieser Form ist  $1 \cdot 0 - 0^2 = 0$ , somit ist der kritische Punkt entartet, und der 2-Jet  $j_0^2 f$  bzw. unsere Tabelle geben keinen Aufschluß über das qualitative Verhalten von  $f$  in der Umgebung von  $\mathbf{0}$ .

Der Definition von  $f$  entnimmt man, daß dieses Verhalten im wesentlichen vom Vorzeichen von  $\alpha$  abhängt, also erst an  $j_0^4 f$  abgelesen werden kann: Ist  $\alpha \geq 0$ , so ist  $f$  im Ursprung lokal minimal; ist  $\alpha < 0$ , so nimmt  $f$  in jeder Umgebung des Ursprungs beiderlei Vorzeichen an.  $\circ$



$$z = x^2 - y^2, \text{ "Sattelpunkt"}$$

Fig. 5.2.5

④ Es sollen die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) := \cos(x + 2y) + \cos(2x + 3y)$$

bestimmt und diskutiert werden. Hierzu haben wir zuerst das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} (f_x =) \quad -\sin(x + 2y) - 2\sin(2x + 3y) = 0 \\ (f_y =) \quad -2\sin(x + 2y) - 3\sin(2x + 3y) = 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

aufzulösen. Es folgt sofort

$$(a) \quad \sin(x + 2y) = 0 \quad \wedge \quad (b) \quad \sin(2x + 3y) = 0 .$$

Mit (a) gilt auch  $\sin(2x + 4y) = 0$ , und dies ist nur dann mit (b) verträglich, wenn  $y$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist. Aus (a) folgt hieraus weiter:  $\sin x = 0$ , das heißt: auch  $x$  ist notwendigerweise ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$ . Als kritische Punkte kommen daher nur die Punkte

$$\mathbf{z}_{kl} := (k\pi, l\pi) \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

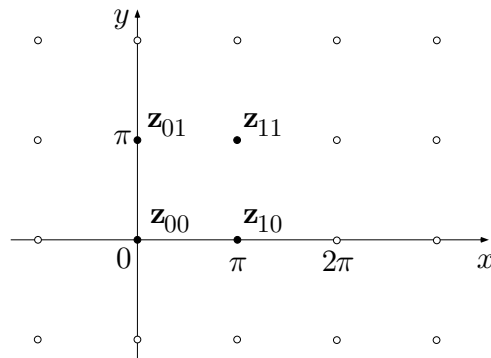


Fig. 5.2.6

in Frage. Man sieht sofort, daß alle diese Punkte die Gleichungen (7) erfüllen; die Menge  $S_{\text{krit}}(f)$  besteht also genau aus den  $\mathbf{z}_{kl}$ .

Da  $f$  in beiden Variablen  $2\pi$ -periodisch ist, braucht man nur die vier kritischen Punkte  $\mathbf{z}_{00} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z}_{01}$ ,  $\mathbf{z}_{10}$  und  $\mathbf{z}_{11}$  zu analysieren (Fig. 5.2.6). Wir beschränken uns auf den Ursprung und berechnen zunächst aus (7):

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -\cos(x + 2y) - 4\cos(2x + 3y) , \\ f_{xy}(x, y) &= -2\cos(x + 2y) - 6\cos(2x + 3y) , \\ f_{yy}(x, y) &= -4\cos(x + 2y) - 9\cos(2x + 3y) . \end{aligned}$$

Es folgt

$$f_{xx}(\mathbf{0}) = -5, \quad f_{xy}(\mathbf{0}) = -8, \quad f_{yy}(\mathbf{0}) = -13;$$

somit ist

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)_{\mathbf{0}} = 65 - 64 = 1 > 0, \quad f_{xx}(\mathbf{0}) < 0 .$$

Aufgrund von (5.8) liegt daher im Ursprung ein lokales Maximum vor (was man natürlich auch ohne alle Rechnung einsehen kann: Die Funktion  $f$  hat dort den Maximalwert 2).  $\bigcirc$

## Aufgaben

1. Bestimme die allgemeinste  $C^2$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , für die  $f_{xy} \equiv 0$  ist.
2. Eine Firma produziert zwei Güter  $X$  und  $Y$ . Bei  $x$  Einheiten des Gutes  $X$  und  $y$  Einheiten des Gutes  $Y$  ergeben sich Kosten  $C(x, y)$ . Zeige: Sinken die Grenzkosten des Gutes  $X$ , wenn die Produktion von  $Y$  erhöht wird, so sinken die Grenzkosten des Gutes  $Y$ , wenn die Produktion von

$X$  erhöht wird. (*Hinweis:* Die **Grenzkosten** des Gutes  $X$  am Arbeitspunkt  $(x_0, y_0)$  sind gegeben durch die Größe  $\frac{\partial C}{\partial x}(x_0, y_0)$  und stellen die Produktionskosten einer zusätzlichen Einheit von  $X$  dar.)

3. Es seien  $f$  und  $g$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen einer Variablen, und es sei  $c (> 0)$  eine Konstante. Zeige: Die Funktion

$$u(x, t) := f(x + ct) + g(x - ct)$$

genügt der sogenannten **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

(Die Graphen der Funktionen  $g_t(x) := g(x - ct)$  stellen eine mit Geschwindigkeit  $c$  nach rechts laufende Welle auf der  $x$ -Achse dar.)

4. (M) Bestimme den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) := 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 6y$$

und analysiere das Verhalten von  $f$  in diesem Punkt.

5. Untersuche das Verhalten der Funktion

$$f(x, y) := 2x^4 - 3x^2y + y^2$$

in der Umgebung von  $(0, 0)$ . Liegt im Ursprung ein Extremum vor? (*Hinweis:* Betrachte die Punkte  $(x, y)$  mit  $f(x, y) = 0$ .)

6. (a) (M) Zeige: Die Funktion

$$f(x, y) := \cos(2x + y) - \cos(x - 3y)$$

besitzt im Ursprung einen kritischen Punkt, und zwar einen Sattelpunkt.

- (b) Stelle  $f$  mit Hilfe trigonometrischer Umformung als Produkt dar und diskutiere anhand des erhaltenen Ausdrucks das Vorzeichen von  $f$  in der Umgebung von  $(0, 0)$ . Figur!

7. Es sei  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  ein gegebener Vektor  $\neq \mathbf{0}$ . Die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2 + 1} .$$

Überlege erstens, daß  $f$  im  $\mathbb{R}^n$  globale Extremalwerte (Maximum und Minimum) annimmt, und zweitens, wo man z.B. die Maximalstelle suchen müßte. Berechne hierauf die beiden Extremalwerte von  $f$ .

8. Zwei Partikel befinden sich an den Stellen  $x$  und  $y$ ,  $x < y$ , des Intervalls  $[0, 1]$  und sind in diesem Intervall eingeschlossen (siehe die Fig. 5.2.7). Zwischen den Partikeln und den Wänden wirken Abstoßungskräfte wie folgt: Das  $x$ -Partikel wird von der linken Wand abgestoßen mit der Kraft  $1/x$ , das  $y$ -Partikel wird von der rechten Wand abgestoßen mit der Kraft  $1/(1-y)$ , und die beiden Partikel stoßen sich gegenseitig ab mit der Kraft  $2/(y-x)$ . Die potentielle Energie  $V$  des Gesamtsystems ist dann gegeben durch

$$V = -\log x - \log(1-y) - 2\log(y-x) .$$

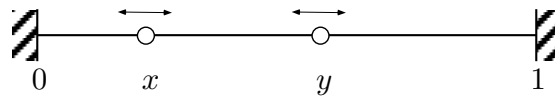


Fig. 5.2.7

- (a) Bestimme die Gleichgewichtslage.  
 (b) Ist das Gleichgewicht stabil? — Die Antwort ist zu begründen.
9. Gegeben ist die Funktion  $f(x, y, z) := \cos(x+y+z)$ . Bestimme das Taylor-Polynom  $j_{(0,0,0)}^3 f(x, y, z)$ . (*Hinweis*: Setze vorübergehend  $x+y+z =: u$ .)
10. Untersuche, ob die Funktion

$$f(x, y) := x^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 - 3x^2y^3 + y^4$$

im Ursprung ein Extremum besitzt. (*Hinweis*: Nicht gleich drauflosrechnen!)

11. Betrachte die Funktionenschar

$$f_\alpha(x, y) := \sin x \sin y - \alpha(\cos x + \cos y) ,$$

$\alpha$  ein reeller Parameter. Der Ursprung ist ein kritischer Punkt für sämtliche Funktionen dieser Schar. Für welche  $\alpha$  ist  $f_\alpha$  im Ursprung lokal maximal bzw. minimal bzw. keines von beiden? Für welche  $\alpha$  ist der kritische Punkt entartet? (Diese Sonderfälle nicht weiter diskutieren!)

12. Eine Funktion  $f: t \mapsto y = f(t)$  ist (nach unten) konvex, wenn ihre zweite Ableitung  $f''$  durchwegs  $> 0$  ist. Überlege, wie die Konvexitätsbedingung für eine Funktion  $f: (x, y) \mapsto z = f(x, y)$  von zwei Variablen lautet, und begründe Deine Antwort.

*Bsp*:  $f(x, y) := x^2 - xy + y^2$  ist konvex,  $g(x, y) := x^2 + 3xy + y^2$  nicht.

## 5.3 Implizite Funktionen

### Problemstellung

Werden die beiden an sich unabhängigen und gleichberechtigten Variablen  $x$  und  $y$  durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

aneinander gebunden, so sind sie nicht mehr unabhängig: Zu einem vorgegebenen  $x$ -Wert  $\xi$  gibt es nur einige wenige, vielleicht gar keine,  $y$ -Werte  $\eta_k$  derart, daß das Paar  $(\xi, \eta_k)$  die Gleichung (1) erfüllt. Wiewohl nun  $x$  und  $y$  in gewisser Weise “voneinander abhängig” sind, definiert aber eine Gleichung (1) in aller Regel keine globale Funktion

$$\phi : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \phi(x),$$

die den Inhalt von (1) vollständig wiedergeben würde.

Aus Erfahrung wissen wir: Die Lösungsmenge  $L$  einer Gleichung (1) ist typischerweise eine Kurve in der  $(x, y)$ -Ebene, allenfalls mit singulären Punkten. Im vorliegenden Abschnitt geht es darum, diese Erfahrung auf den Begriff zu bringen und zu verallgemeinern. Dabei soll auch klar werden, inwiefern eine derartige Gleichung trotz dem oben Gesagten  $y$  “implizit” als eine Funktion von  $x$  definiert. Wohlgemerkt: Es geht nicht darum, die Gleichung (1) formelmäßig nach der einen oder andern Variablen aufzulösen, sondern um allgemeine Aussagen, die gerade dann von Nutzen sind, wenn eine formelmäßige Auflösung nicht möglich ist.

Es seien also  $\Omega$  ein Gebiet der  $(x, y)$ -Ebene,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion und  $L$  die Lösungsmenge der Gleichung (1):

$$L := \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0\}.$$

Angenommen, wir hätten — zum Beispiel numerisch, oder durch Erraten — einen Punkt  $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0)$  der Lösungsmenge gefunden. Gibt es vielleicht in der Nähe von  $\mathbf{z}_0$  noch weitere Punkte von  $L$ ? Und wenn ja: Welchen geometrischen Charakter besitzt der in der Umgebung von  $\mathbf{z}_0$  liegende Teil von  $L$ ? Hier zunächst ein Beispiel:

① Die Lösungsmenge  $L$  der Gleichung

$$(f(x, y) :=) \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0, \tag{2}$$

ist das sogenannte **Descartessche Blatt**. Der Figur 5.3.1 (siehe auch die Fig. 2.1.5) entnimmt man: Zu einem gegebenen  $x$ -Wert  $\xi$  gibt es einen, zwei oder drei  $y$ -Werte  $\eta_k$  mit

$$f(\xi, \eta_k) = 0.$$



Der Punkt  $\mathbf{z}_0$  ist ein “typischer” Punkt von  $L$ : In einem hinreichend kleinen “Fenster” um  $\mathbf{z}_0$  können wir  $L$  sowohl als Graph einer lokalen Funktion

$$\phi : ]x_0 - h, x_0 + h[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \phi(x)$$

wie auch als Graph einer Funktion  $\psi: y \mapsto x = \psi(y)$  auffassen. Zum Punkt  $\mathbf{z}_1 := (\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$  gibt es hingegen kein derartiges  $x$ -Intervall, da rechts von  $x_1 = \sqrt[3]{4a}$  keine Punkte von  $L$  mehr liegen. In anderen Worten: In der Umgebung von  $\mathbf{z}_1$  läßt sich  $L$  nicht als Graph einer lokalen Funktion  $x \mapsto y = \phi(x)$  auffassen (wohl aber als Graph einer Funktion  $y \mapsto x = \psi(y)$ ).

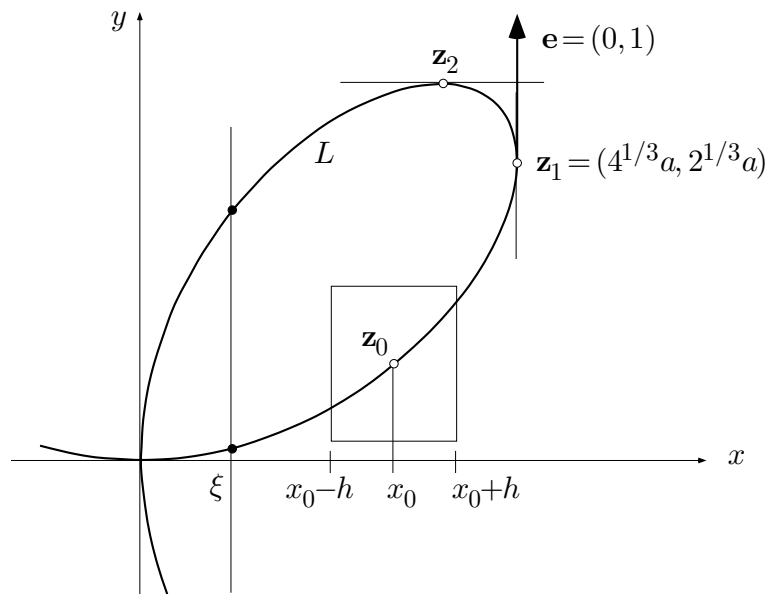


Fig. 5.3.1

Die Koordinaten von  $\mathbf{z}_1$  wurden mit Hilfe der folgenden Überlegung gefunden: Marschiert man von  $\mathbf{z}_1$  aus längs der “Bahn”  $L$ , so bleibt der Funktionswert von  $f$  konstant ( $= 0$ ). Die Anfangsrichtung der Bahn ist vertikal. Dann muß aber die Richtungsableitung  $D_{(0,1)}f(\mathbf{z}_1)$  gleich 0 sein; denn sonst würde der Funktionswert beim Losmarschieren auf  $L$  zum Beispiel zunehmen. Diese Richtungsableitung ist aber nichts anderes als  $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\mathbf{z}_1}$ ; somit ist

$$f_y(\mathbf{z}_1) = 0,$$

und der Punkt  $\mathbf{z}_1$  genügt neben (2) zusätzlich der Gleichung

$$(f_y =) \quad 3y^2 - 3ax = 0. \quad (3)$$

Die Koordinaten von  $\mathbf{z}_1$  ergeben sich nun durch Auflösung des Gleichungssystems (2)^(3). — Im Punkt  $\mathbf{z}_2$  haben wir den analogen Sachverhalt, aber mit vertauschten Rollen von  $x$  und  $y$ : In der Umgebung von  $\mathbf{z}_2$  läßt sich  $L$  nicht als Graph einer Funktion  $y \mapsto x = \psi(y)$  auffassen, und gleichzeitig ist  $f_x(\mathbf{z}_2) = 0$ .

Der Ursprung schließlich ist ein singulärer Punkt von  $L$ . Damit mußte man rechnen, da an dieser Stelle sogar beide partiellen Ableitungen von  $f$  verschwinden:

$$\nabla f(\mathbf{0}) = (f_x, f_y)_0 = (3x^2 - 3ay, 3y^2 - 3ax)_0 = \mathbf{0} .$$

○

### Hauptsatz, mit Formel für die Ableitung

Nachdem wir an diesem Beispiel einige der zu erwartenden Phänomene kennengelernt haben, können wir den folgenden **Satz über implizite Funktionen** formulieren (Fig. 5.3.2):

**(5.9)** ( $\Omega, f$  und  $L$  haben die angegebene Bedeutung.) Ist  $(x_0, y_0) \in L$  und gilt

$$f_y(x_0, y_0) \neq 0 ,$$

so gibt es ein Fenster  $Q := I' \times I''$  mit Zentrum  $(x_0, y_0)$  und eine  $C^1$ -Funktion

$$\phi : I' \rightarrow I'' , \quad x \mapsto y = \phi(x) \tag{4}$$

mit  $L \cap Q = \mathcal{G}(\phi)$ ; das heißt: Innerhalb des Fensters  $Q$  stimmt  $L$  mit dem Graphen von  $\phi$  überein. Ferner gilt

$$\phi'(x_0) = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} . \tag{5}$$

Formel (5) erlaubt, die Ableitung der durch die Gleichung (1) implizit definierten lokalen Funktionen  $\phi$  in einzelnen Punkten zu berechnen, ohne die Gleichung formelmäßig aufzulösen.

□ Wir dürfen zur Vereinfachung  $(x_0, y_0) = \mathbf{0}$  annehmen. Es sei also

$$f(\mathbf{0}) = 0 , \quad f_x(\mathbf{0}) =: A , \quad f_y(\mathbf{0}) =: B > 0 .$$

Das Seitenverhältnis  $\rho$  (Höhe:Breite) des Fensters  $Q$  hängt von  $A$  und von  $B$  ab. Wir setzen

$$\rho := \frac{|A| + 1}{B} .$$

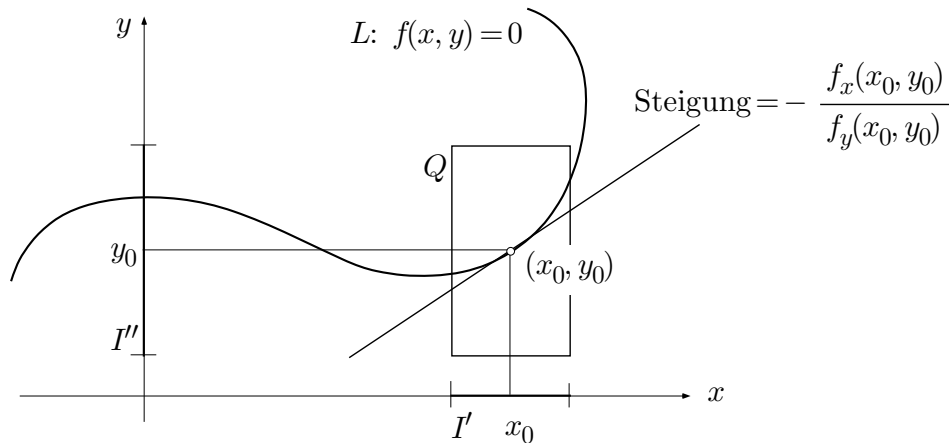


Fig. 5.3.2

Nach Satz (5.2) gilt

$$\lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(x, y) - Ax - By|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Es gibt daher ein  $h > 0$ , so daß für alle

$$(x, y) \in Q := [-h, h] \times [-\rho h, \rho h]$$

(Fig. 5.3.3) die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\frac{|f(x, y) - Ax - By|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1 + \rho^2}}, \quad (6)$$

$$f_y(x, y) > 0, \quad (7)$$

wobei wir für (7) benutzt haben, daß  $f_y(\mathbf{0}) > 0$  und  $f_y$  stetig ist. Aus der Beziehung (6) folgt weiter

$$\forall (x, y) \in Q: \quad |f(x, y) - Ax - By| \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\sqrt{1 + \rho^2}} \leq \frac{h}{2}. \quad (8)$$

Wir betrachten nun für ein festes  $\xi \in I' := [-h, h]$  die partielle Funktion

$$g(y) := f(\xi, y) \quad (-\rho h \leq y \leq \rho h).$$

Wegen (7) ist  $g$  streng monoton wachsend. Weiter gilt wegen (8):

$$|f(\xi, \rho h) - A\xi - B\rho h| \leq \frac{h}{2}$$

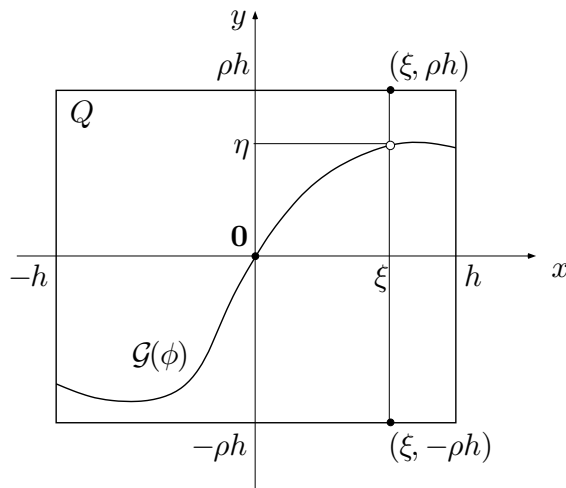


Fig. 5.3.3

und somit

$$g(\rho h) \geq A\xi + B\rho h - \frac{h}{2} \geq -|A|h + (|A| + 1)h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} > 0.$$

Analog zeigt man  $g(-\rho h) < 0$ . Hieraus folgt: Die Funktion  $g$  besitzt im Intervall  $I'' := [-\rho h, \rho h]$  genau eine Nullstelle  $\eta$ , und das heißt: Es gibt genau ein  $\eta \in I''$  mit  $f(\xi, \eta) = 0$ . Wir setzen  $\phi(\xi) := \eta$ .

Da  $\xi \in [-h, h]$  beliebig war, ist die Funktion (4) damit wohldefiniert, und es gilt in der Tat  $L \cap Q = \mathcal{G}(\phi)$ .

Wir zeigen nicht, daß  $\phi$  stetig differenzierbar ist; hingegen beweisen wir die Formel (5). Nach Konstruktion ist

$$\forall x \in I' : \quad f(x, \phi(x)) = 0.$$

Hieraus folgt nach der verallgemeinerten Kettenregel

$$f_x(x, \phi(x)) \cdot 1 + f_y(x, \phi(x)) \cdot \phi'(x) \equiv 0.$$

Setzen wir hier  $x := x_0$ , so ergibt sich wegen  $\phi(x_0) = y_0$  die Formel

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\phi'(x_0) = 0,$$

was wegen  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$  mit (5) äquivalent ist. ┘

① (Forts.) Wir nehmen der Einfachheit halber  $a := 1$  an; es geht dann um die Gleichung

$$(f(x, y) :=) \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Der Punkt  $\mathbf{z}_3 := \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$  liegt auf  $L$ , denn es gilt

$$\frac{8}{27} + \frac{64}{27} - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = 0.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} f_x(\mathbf{z}_3) &= (3x^2 - 3y)_{\mathbf{z}_3} = 3 \cdot \frac{4}{9} - 3 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}, \\ f_y(\mathbf{z}_3) &= (3y^2 - 3x)_{\mathbf{z}_3} = 3 \cdot \frac{16}{9} - 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \neq 0. \end{aligned}$$

In der Umgebung des Punktes  $\mathbf{z}_3$  läßt sich daher  $L$  als Graph einer Funktion  $\phi: x \mapsto y = \phi(x)$  auffassen (Fig. 5.3.4). Dabei ist  $\phi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$  und

$$\phi'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{f_x(\mathbf{z}_3)}{f_y(\mathbf{z}_3)} = \frac{4}{5}.$$

○

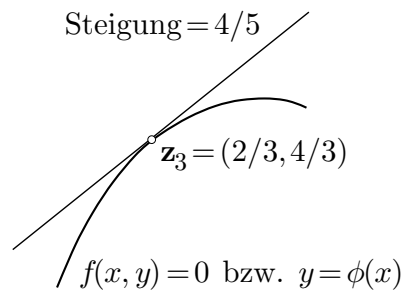


Fig. 5.3.4

② Es sei  $f: x \mapsto y = f(x)$  eine  $C^1$ -Funktion von einer Variablen,  $f(x_0) = y_0$ , und es sei  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $f$  in der Umgebung von  $x_0$  streng monoton und besitzt dort eine Umkehrfunktion  $g: y \mapsto x = g(y)$ . Wie wir in Satz (3.1)(f) gesehen haben, ist

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \left( = \frac{1}{f'(g(y_0))} \right).$$

Zu diesem Ergebnis können wir auch folgendermaßen gelangen: Der Funktionswert  $g(y)$  der Umkehrfunktion  $g$  an einer vorgegebenen Stelle  $y$  ist die Lösung  $x$  der Gleichung

$$f(x) - y = 0. \quad (9)$$

Wir bilden formal die Funktion

$$F(x, y) := f(x) - y$$

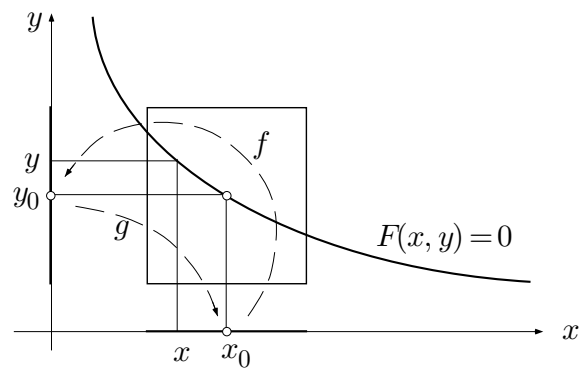


Fig. 5.3.5

von zwei Variablen und haben

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_x(x_0, y_0) = f'(x_0) \neq 0, \quad F_y(x_0, y_0) = -1.$$

Nach Satz (5.9) “können” wir daher die Gleichung  $F(x, y) = 0$  bzw. (9) in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  “nach  $x$  auflösen”; das heißt: Es gibt eine  $C^1$ -Funktion

$$g: y \mapsto x = g(y),$$

so daß (9) in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  mit  $x = g(y)$  äquivalent ist. Ferner gilt

$$g'(y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

○

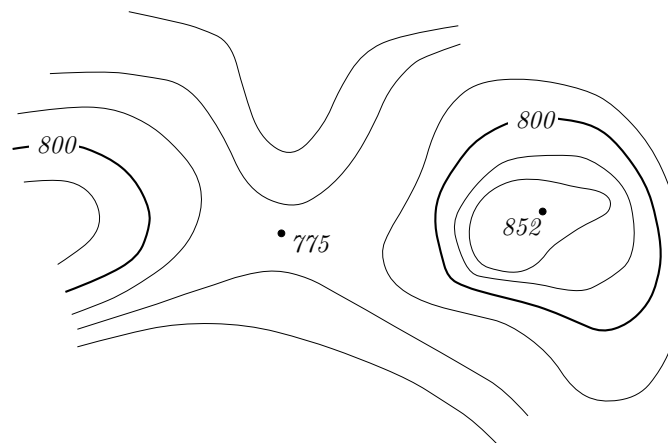


Fig. 5.3.6

### Anwendung: Niveaulinien und Niveauflächen

Aus Satz (5.9) ergibt sich insbesondere, daß die Lösungsmenge  $L$  einer Gleichung  $f(x, y) = 0$  typischer Weise eine glatte Kurve ist. Wir wollen das gerade in einem etwas allgemeineren Zusammenhang formulieren und erinnern dazu an den folgenden Begriff (vgl. Abschnitt 2.1): Ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von zwei reellen Variablen und  $C \in \mathbb{R}$  ein beliebig vorgegebener Wert, so heißt die Urbildmenge

$$f^{-1}(C) =: \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = C\}$$

(= Menge der Punkte, in denen  $f$  den Wert  $C$  annimmt) auch **Niveaulinie von  $f$  zum Niveau  $C$** . Jeder Punkt  $(x_0, y_0) \in \Omega$  liegt auf genau einer Niveaulinie, nämlich auf derjenigen zum Niveau  $C_0 := f(x_0, y_0)$ . Die Höhenlinien auf der Landkarte sind die Niveaulinien der Funktion  $f :=$  "Höhe über Meer" zu den angeschriebenen Niveaux (Fig. 5.3.6). Die in Satz (5.9) betrachtete Lösungsmenge  $L$  ist nichts anderes als die Niveaulinie  $f^{-1}(0)$ , in Abschnitt 2.1 auch mit  $N_0$  bezeichnet.

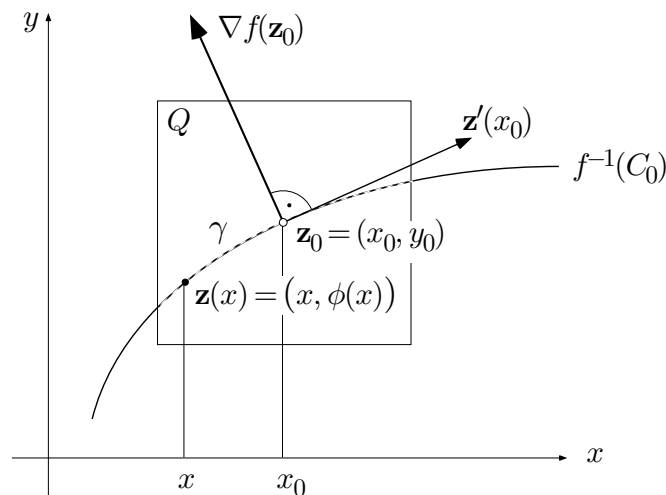


Fig. 5.3.7

Die Niveau"linien" haben ihren Namen verdient. Wir zeigen nämlich:

**(5.10)** *Es sei  $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$  ein regulärer Punkt der  $C^1$ -Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f(\mathbf{z}_0) =: C_0$ . Dann ist die Niveaulinie  $f^{-1}(C_0)$  in der Umgebung von  $\mathbf{z}_0$  eine glatte Kurve, und der Gradient  $\nabla f(\mathbf{z}_0)$  steht senkrecht auf der Tangente an diese Kurve im Punkt  $\mathbf{z}_0$ .*

□ Nach Voraussetzung ist  $\nabla f(\mathbf{z}_0) \neq \mathbf{0}$  und somit zum Beispiel  $f_y(\mathbf{z}_0) \neq 0$ . Die Hilfsfunktion

$$\tilde{f}(x, y) := f(x, y) - C_0$$

erfüllt die Bedingungen

$$\tilde{f}(\mathbf{z}_0) = 0, \quad \tilde{f}_y(\mathbf{z}_0) = f_y(\mathbf{z}_0) \neq 0.$$

Nach Satz (5.9) gibt es daher eine  $C^1$ -Funktion  $\phi$  von einer Variablen, so daß die Gleichung

$$\tilde{f}(x, y) = 0, \quad \text{d.h.} \quad f(x, y) = C_0$$

in einer Umgebung  $Q$  von  $\mathbf{z}_0$  äquivalent ist mit  $y = \phi(x)$ . Der in  $Q$  gelegene Teil  $\gamma$  der Niveaulinie  $f^{-1}(C_0)$  besitzt daher die  $C^1$ -Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad x \mapsto \mathbf{z}(x) := (x, \phi(x))$$

und ist folglich eine glatte Kurve durch den Punkt  $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$  (Fig. 5.3.7). Es gilt  $f(\mathbf{z}(x)) \equiv C_0$ , und hieraus folgt nach der Kettenregel (5.3):

$$\nabla f(\mathbf{z}(x)) \cdot \mathbf{z}'(x) \equiv 0.$$

Setzt man hier  $x := x_0$ , so kommt

$$\nabla f(\mathbf{z}_0) \cdot \mathbf{z}'(x_0) = 0;$$

das heißt:  $\nabla f(\mathbf{z}_0)$  steht senkrecht auf dem Tangentialvektor von  $\gamma$  im Punkt  $\mathbf{z}_0$ . ┘

③ Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

mit dem einzigen kritischen Punkt  $\mathbf{0}$ . Ihre Niveaulinien  $f^{-1}(C)$ ,  $C > 0$ , sind konzentrische Kreise um  $\mathbf{0}$  (Fig. 5.3.8); die Niveaulinie  $f^{-1}(0)$  besteht aus dem Ursprung allein.

Die Funktion

$$g(x, y) := x^2 - y^2$$

hat ebenfalls den einzigen kritischen Punkt  $\mathbf{0}$ . Ihre Niveaulinien  $g^{-1}(C)$ ,  $C \neq 0$ , sind die Hyperbeln

$$x^2 - y^2 = C,$$

die Niveaulinie  $g^{-1}(0)$  besteht aus den beiden Geraden  $y = \pm x$ .

In beiden Fällen hat das Feld der Niveaulinien im Ursprung eine Singularität; überall sonst ist es regulär und sieht "lokal" gleich aus wie eine Schar von parallelen Geraden. ○



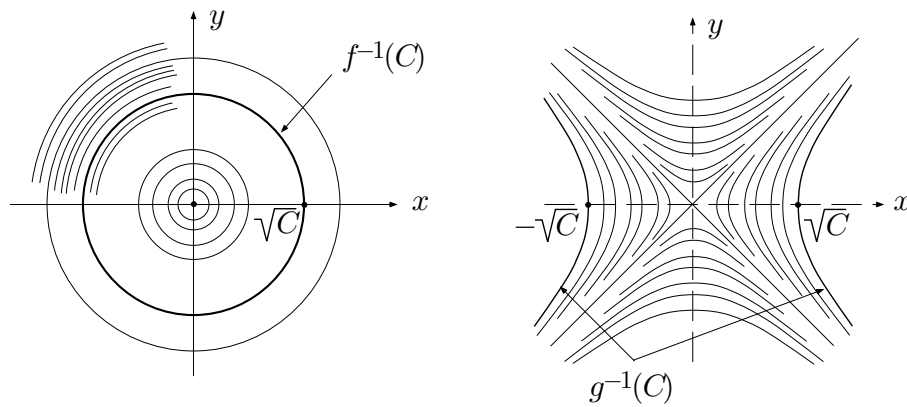


Fig. 5.3.8

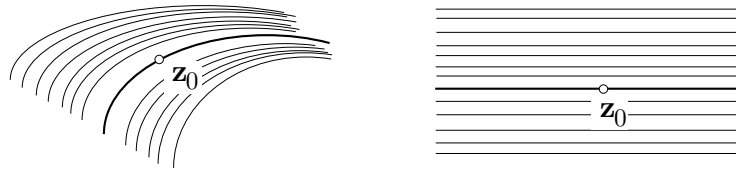


Fig. 5.3.9

Diese Beispiele belegen den folgenden allgemeinen Sachverhalt: Ist  $\mathbf{z}_0$  ein regulärer Punkt der  $C^1$ -Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist das Feld der Niveaulinien von  $f$  in der Umgebung von  $\mathbf{z}_0$  “im wesentlichen”, das heißt: bis auf eine differenzierbare Verzerrung, eine Schar von parallelen Geraden (Fig. 5.3.9). Wir können das hier nicht beweisen; vor allem darum nicht, weil uns der klare Begriff für eine “differenzierbare Verzerrung” fehlt.

Wir gehen nun zu Funktionen von drei Variablen über; man kann sich etwa eine Temperaturverteilung in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  vorstellen. Anstelle von Niveaulinien wie in der Ebene gibt es hier Niveauflächen. Es sei also

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

eine  $C^1$ -Funktion und  $C \in \mathbb{R}$  ein beliebig vorgegebener Wert. Dann heißt die Urbildmenge

$$f^{-1}(C) =: \{(x, y, z) \in \Omega \mid f(x, y, z) = C\}$$

auch **Niveaufläche von  $f$  zum Niveau  $C$** . Durchläuft  $C$  die Wertmenge von  $f$ , so erhält man eine ganze Schar von Flächen, die zusammen das ganze Gebiet  $\Omega$  aufblättern wie die Seiten eines Buches das von ihm eingenommene Volumen. Man kann auch an die Häute einer Zwiebel denken.

Die Niveauflächen sind typischer Weise tatsächlich Flächen; es gilt nämlich das folgende dreidimensionale Analogon zu Satz (5.10):

**(5.11)** Es sei  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$  ein regulärer Punkt der  $C^1$ -Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f(\mathbf{p}) =: C_0$ . Dann ist die Niveaulfläche  $f^{-1}(C_0)$  in der Umgebung von  $\mathbf{p}$  eine glatte Fläche  $S$ , und der Gradient  $\nabla f(\mathbf{p})$  steht senkrecht auf der Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}S$ .

┌ Zunächst eine Vorbemerkung: Satz (5.9) gilt auch für eine Vektorvariable  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  anstelle der reellen Variablen  $x$  und liefert dann zu einer Gleichung

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$$

unter den entsprechenden Bedingungen eine  $C^1$ -Funktion  $\phi: \mathbf{x} \mapsto y = \phi(\mathbf{x})$ .

Nach Voraussetzung ist  $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$  und somit zum Beispiel  $f_z(\mathbf{p}) \neq 0$ . Nach dem Satz über implizite Funktionen (bzw. aufgrund der Vorbemerkung) kann man daher die Gleichung

$$f(x, y, z) - C_0 = 0 \tag{10}$$

in einer geeigneten Umgebung  $Q = Q' \times I$  des Punktes  $\mathbf{p}$  nach  $z$  auflösen. Das heißt: Es gibt eine  $C^1$ -Funktion  $\phi: Q' \rightarrow I$  der Variablen  $x$  und  $y$ , so daß die Gleichung (10) innerhalb  $Q$  äquivalent ist mit

$$z = \phi(x, y);$$

insbesondere ist  $\phi(x_0, y_0) = z_0$ . Der in  $Q$  gelegene Teil  $S$  der Niveaulfläche  $f^{-1}(C_0)$  besitzt daher die  $C^1$ -Parameterdarstellung

$$S: \quad (x, y) \mapsto \mathbf{r}(x, y) := (x, y, \phi(x, y))$$

und ist somit eine glatte Fläche durch den Punkt  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$  (Fig. 5.3.10).

Es sei weiter

$$\gamma: ]-h, h[ \rightarrow S, \quad t \mapsto \mathbf{r}(t)$$

eine in der Fläche  $S \subset f^{-1}(C_0)$  gelegene Kurve durch den Punkt  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(0)$ . Dann gilt  $f(\mathbf{r}(t)) \equiv C_0$ , und hieraus folgt nach der Kettenregel (5.3):

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \equiv 0.$$

Setzt man hier  $t := 0$ , so kommt

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0,$$

das heißt:  $\nabla f(\mathbf{p})$  steht senkrecht auf dem Tangentialvektor  $T_{\mathbf{p}}\gamma$ . Da dies für alle Flächenkurven durch den Punkt  $\mathbf{p}$  zutrifft, steht  $\nabla f(\mathbf{p})$  in der Tat senkrecht auf der Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}S$ . ─

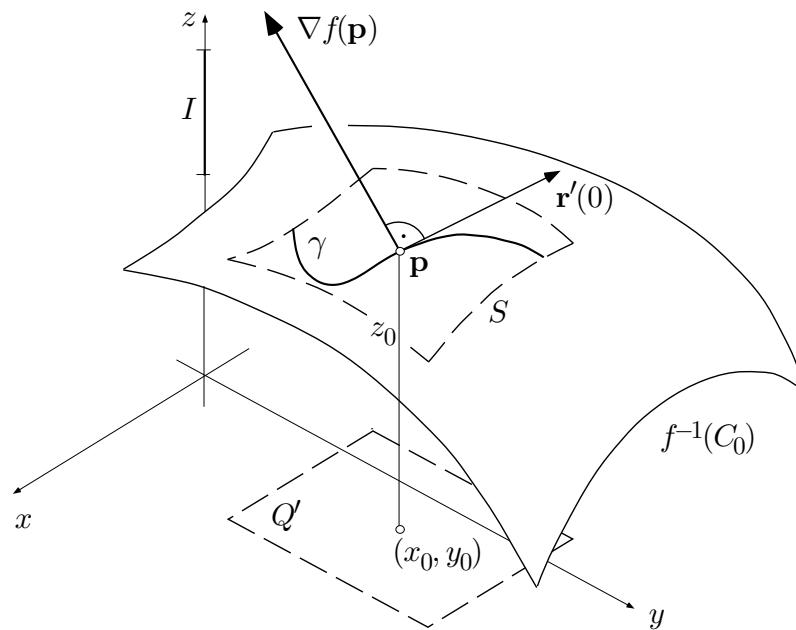


Fig. 5.3.10

④ Welcher Punkt der Fläche

$$S: \quad xy^2z^3 = 1; \quad x, y, z > 0$$

liegt am nächsten beim Ursprung? —  $S$  ist die Niveauläche  $f^{-1}(1)$  der Funktion

$$f(x, y, z) := xy^2z^3.$$

Bezeichnet  $P = (x, y, z)$  den gesuchten Punkt, so ist anschaulich klar, daß der von  $O$  ausgehende Strahl durch  $P$  auf der Tangentialebene  $T_P S$  senkrecht steht (Fig. 5.3.11). Nach Satz (5.11) gibt es daher ein  $\lambda \neq 0$  mit

$$\underline{OP} = \lambda \nabla f(P)$$

oder in Koordinaten:

$$(x, y, z) = \lambda(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} x = \lambda \cdot y^2z^3 \\ y = \lambda \cdot 2xyz^3 \\ z = \lambda \cdot 3xy^2z^2 \end{cases}.$$

Multiplizieren wir hier die erste Gleichung mit  $x$ , die zweite mit  $y$  und die dritte mit  $z$ , so folgt wegen  $P \in S$ , das heißt:  $xy^2z^3 = 1$ :

$$x^2 = \lambda, \quad y^2 = 2\lambda, \quad z^2 = 3\lambda.$$

Somit ist  $\lambda > 0$  und

$$x = \sqrt{\lambda}, \quad y = \sqrt{2\lambda}, \quad z = \sqrt{3\lambda}.$$

Wegen  $xy^2z^3 = 1$  ist notwendigerweise

$$\lambda^{1/2} \cdot 2\lambda \cdot (3\lambda)^{3/2} = 2 \cdot 3^{3/2} \lambda^3 = 1$$

und folglich  $\lambda = 2^{-1/3}3^{-1/2}$ . Damit erhalten wir

$$P = (2^{-1/6}3^{-1/4}, 2^{1/3}3^{-1/4}, 2^{-1/6}3^{1/4}) = (0.677, 0.957, 1.172).$$

○

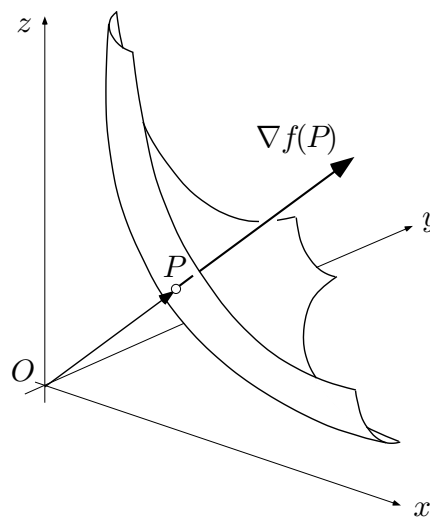


Fig. 5.3.11

## Aufgaben

1. (a) Verifiziere: Die Gleichung

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y = 0$$

definiert implizit eine Funktion  $y = \phi(x)$  mit  $\phi(1) = 1$ .

- (b) (M) Berechne  $\phi'(1)$  mit Hilfe einer expliziten Darstellung von  $\phi$ .  
 (c) Berechne  $\phi'(1)$  mit Hilfe der Formel für die Ableitung einer implizit gegebenen Funktion.

- (d) Bestimme ein maximales Intervall, auf dem  $\phi$  stetig differenzierbar ist.
2. Drücke die zweite Ableitung der durch  $f(x, y) = 0$  implizit definierten Funktion  $\phi: x \mapsto y = \phi(x)$  durch die partiellen Ableitungen von  $f$  aus.  
(Hinweis:  $\phi'(x) = -f_x(x, \phi(x))/f_y(x, \phi(x))$ .)
3. Gegeben ist die Gleichung

$$xy^3 + 4xy^2 + 2x^2y + 4x - 2 = 0. \quad (*)$$

- (a) Verifiziere: (\*) definiert implizit eine in der Umgebung von  $x = 2$  definierte  $C^1$ -Funktion  $\phi: x \mapsto y = \phi(x)$  mit  $\phi(2) \in \mathbb{Z}$ .
- (b) Berechne  $\phi'(2)$ .
4. Zeige: Die Tangentialebenen an die Fläche

$$S: \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \quad (a > 0 \text{ fest})$$

schneiden auf den Koordinatenachsen Abschnitte ab, deren Summe konstant ist.

5. Zwei physikalische Größen  $x$  und  $y$  sind aneinander gebunden durch eine Beziehung der Form

$$x^4 - 5x^3y^2 + 6xy^3 = \text{const.}$$

Zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  werden die beiden Größen gemessen; man findet  $x = 2$ ,  $y = 1$ . Berechne angenähert den Zuwachs  $\Delta y$ , wenn sich  $x$  in der darauffolgenden Minute um  $\Delta x := 0.001$  erhöht.

6. Die Oberfläche eines über der  $(x, y)$ -Ebene schwebenden Ellipsoids ist gegeben durch die Gleichung

$$3x^2 + 2xz + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 10z + 12 = 0.$$

Wird das Ellipsoid senkrecht von oben beleuchtet, so wirft es einen Schatten auf die  $(x, y)$ -Ebene. Bestimme die Schattengrenze, sei es in der Form  $F(x, y) = 0$  oder als Parameterdarstellung  $t \mapsto (x(t), y(t))$ .

7. Die Fläche  $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - z = 0\}$  modelliert einen Gebirgspaß. Zu einem bestimmten Zeitpunkt sendet die unendlich ferne untergehende Sonne ihre letzten Strahlen aus der Richtung  $\mathbf{s} := (-4, 1, -1)$ . Bestimme die Schattengrenze  $\gamma$  auf  $S$ ; erwünscht ist eine Parameterdarstellung. Um was für eine Kurve handelt es sich? Figur!

## 5.4 Die Funktionalmatrix

### Auf der Suche nach dem definitiven Ableitungsbegriff

Dieser Abschnitt kann bei der ersten Lektüre übersprungen werden. — Wir betrachten im folgenden noch einmal den Ableitungsbegriff (vgl. die Ausführungen zu Beginn von Abschnitt 5.1), und zwar allgemein von Funktionen (Abbildungen)

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \quad (1)$$

dabei können  $n$  und  $m$  unabhängig voneinander die Werte 1, 2, 3, ... annehmen. Wenn wir von der "Ableitung" derartiger Funktionen sprechen, so geht es hier erstens nur um die erste Ableitung; mit höheren Ableitungen wird der im folgenden dargestellte Formalismus nicht fertig. Zweitens meinen wir immer die Ableitung in einem bestimmten Punkt  $\mathbf{p} \in \text{dom}(\mathbf{f})$  und nicht die Ableitung als "Begleitfunktion" der Ausgangsfunktion  $\mathbf{f}$ .

Die erste Ableitung von Funktionen (1) ist bis jetzt in verschiedenen Gestalten auf den Plan getreten:

(a) Für eine "gewöhnliche" reelle Funktion  $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$  haben wir den "Prototyp" der Ableitung,

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}.$$

(b) Für eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^m, \quad t \mapsto \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$$

von einer reellen Variablen läßt sich der obige Limes immer noch bilden. Man erhält die Momentangeschwindigkeit

$$\mathbf{f}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = (f'_1(t_0), \dots, f'_m(t_0)) \in \mathbb{R}^m.$$

Ist  $\mathbf{f}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , so ist  $\mathbf{f}'(t_0)$  der Tangentialvektor an die Kurve  $\gamma: t \mapsto \mathbf{f}(t)$  im Punkt  $\mathbf{y}_0 := \mathbf{f}(t_0)$ , siehe Beispiel 3.1.②.

(c) Die erste Ableitung einer reellwertigen Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

von  $n$  Variablen wird repräsentiert durch ihren Gradienten

$$\nabla f(\mathbf{p}) = (f_{,1}, \dots, f_{,n})_{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^n.$$

(d) Wir werden ferner Parameterdarstellungen von Flächen im Raum, also Abbildungen

$$\mathbf{r}(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

zu betrachten haben; gelegentlich werden wir auch Abbildungen

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3$$

antreffen. So läßt sich zum Beispiel die Umrechnung von kartesischen Koordinaten auf Kugelkoordinaten,

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \phi \\ y &= r \cos \theta \sin \phi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

als eine Abbildung

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3, \quad (r, \phi, \theta) \mapsto (x, y, z)$$

auffassen. Für derartige Situationen haben wir noch keinen Ableitungsbegriff zur Verfügung.

Wir fragen nach einem Konzept, das die verschiedenen gefundenen Ableitungsformen unter einen Hut bringt und auch die in (d) betrachteten Fälle mit umfaßt. Ein derartiges Konzept gibt es. Der entscheidende Ansatz besteht darin, die Ableitung nicht als Zahl oder als Vektor oder etwas Ähnliches zu betrachten, sondern als eine lineare Abbildung, deren numerische Daten in einer Matrix, eben der Funktionalmatrix, gespeichert sind.

Wir betrachten also allgemein eine  $C^1$ -Abbildung (1) sowie einen festen Punkt  $\mathbf{p} \in \text{dom}(\mathbf{f})$ . Es sei  $\mathbf{q} := \mathbf{f}(\mathbf{p})$  der Bildpunkt von  $\mathbf{p}$ . Dabei nehmen wir an, daß im  $\mathbf{x}$ -Raum ein für allemal kartesische Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  und im  $\mathbf{y}$ -Raum kartesische Koordinaten  $y_1, \dots, y_m$  gegeben sind.

Der Punkt  $\mathbf{p}$  besitzt einen Tangentialraum  $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$  (Fig. 5.4.1). Dieser Raum  $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$  enthält einerseits die im Punkt  $\mathbf{p}$  angehefteten Vektoren (zum Beispiel Kräfte, Geschwindigkeiten, Gradienten), andererseits die von  $\mathbf{p}$  aus gemessenen "Zuwächse" der unabhängigen Variablen  $\mathbf{x}$ .

Hier geht es nun um diese Zuwächse; wir bezeichnen daher die Elemente von  $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$  mit  $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$ . Analog besitzt der Punkt  $\mathbf{q}$  einen Tangentialraum  $T_{\mathbf{q}}\mathbb{R}^m$  mit Elementen  $d\mathbf{y} = (dy_1, \dots, dy_m)$ . Die  $dx_k$  und die  $dy_i$  sind ganz einfach die Koordinaten der Vektorvariablen  $d\mathbf{x}$  bzw.  $d\mathbf{y}$  und ja nicht etwa "unendlichkleine Größen". Es ist allerdings wahr, daß wir im weiteren Verlauf den Grenzübergang  $d\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  im Auge haben.

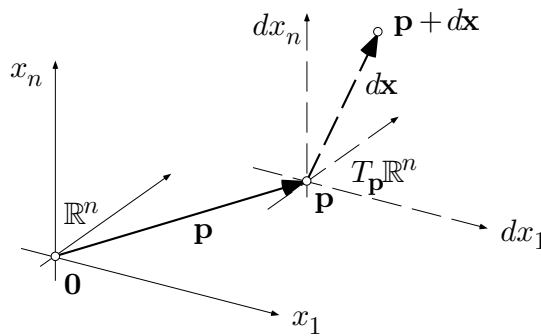


Fig. 5.4.1

In dem vorliegenden Zusammenhang erweist es sich als zweckmäßig, die Koordinaten der Punkte und vor allem die der Zuwächse als Kolonnenmatrizen zu schreiben:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} =: [\mathbf{p}], \quad \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} =: [d\mathbf{x}], \quad \begin{bmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{bmatrix} =: [d\mathbf{y}].$$

Alles dreht sich nun um den (vektoriellen) Zuwachs des Funktionswerts  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , wenn die unabhängige Variable  $\mathbf{x}$  von  $\mathbf{p}$  aus den Zuwachs  $d\mathbf{x}$  erfährt, also um die Größe

$$\Delta \mathbf{f} := \mathbf{f}(\mathbf{p} + d\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})$$

in Funktion der Variablen  $d\mathbf{x}$ . Wir schauen uns das einmal an im Fall (b) mit  $\mathbf{p} := t_0$ . Nach 3.1.(3) gilt für jede Koordinatenfunktion  $f_i$ :

$$f_i(t_0 + dt) - f_i(t_0) = f'_i(t_0) dt + o(dt) \quad (dt \rightarrow 0).$$

Diese  $m$  Beziehungen lassen sich folgendermaßen in Matrizenform schreiben:

$$\begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_m \end{bmatrix}_{t_0} \cdot [dt] + o(dt); \quad (3)$$

dabei steht rechter Hand ein Matrizenprodukt.

Im Fall (c) haben wir nach Satz (5.2)':

$$f(\mathbf{p} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n f_{.k}(\mathbf{p}) dx_k + o(|d\mathbf{x}|),$$

und auch hier können wir ein Matrizenprodukt ins Spiel bringen:

$$[\Delta f] = [f_{.1} \ f_{.2} \ \dots \ f_{.n}]_{\mathbf{p}} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} + o(|d\mathbf{x}|). \quad (4)$$



Schließlich paßt auch der Fall (a) in diesen Rahmen:

$$[\Delta f] = [f']_{t_0} [dt] + o(dt) . \quad (5)$$

Die Variationen (3), (4), (5) desselben Themas werden simultan abgedeckt mit dem folgenden Satz über  $C^1$ -Abbildungen (1):

**(5.12)** (*f*, *p* und  $\Delta \mathbf{f}$  haben die angegebene Bedeutung)  $\Delta \mathbf{f}$  ist in erster Näherung eine lineare Funktion von  $d\mathbf{x}$ , und zwar gilt

$$\begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \vdots \\ \Delta f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1.1} & f_{1.2} & \cdots & f_{1.n} \\ f_{2.1} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{m.1} & & \cdots & f_{m.n} \end{bmatrix}_{\mathbf{p}} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} + o(|d\mathbf{x}|) \quad (d\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}) . \quad (6)$$

┌ Jede einzelne Koordinatenfunktion  $f_i$  von  $\mathbf{f}$  ist eine reellwertige  $C^1$ -Funktion der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und genügt damit der Beziehung (4). Schreibt man die sich ergebenden  $m$  Formeln untereinander, so resultiert gerade (6). ─

## Die Funktionalmatrix

Die Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{p}} =: \left[ \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right] =: \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}} \quad (7)$$

heißt **Funktionalmatrix** oder **Jacobische Matrix** von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$ . Die Elemente dieser Matrix sind die  $m \cdot n$  ersten partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen  $f_i$  an der Stelle  $\mathbf{p}$ , und zwar stehen in der  $i$ -ten Zeile die partiellen Ableitungen von  $f_i$  nach den  $n$  unabhängigen Variablen  $x_k$ . Andersherum: In der  $k$ -ten Kolonne steht der Ableitungsvektor der partiellen Funktion “ $\mathbf{f}$  von  $x_k$  allein”. Die Bezeichnungsweise (7) der Funktionalmatrix erlaubt folgende kondensierte Gestalt von (6):

$$[\Delta \mathbf{f}] = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}} \cdot [d\mathbf{x}] + o(|d\mathbf{x}|) \quad (d\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}) . \quad (6')$$

① Wir betrachten die Funktion

$$\mathbf{r}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = \frac{1}{2\pi} v \end{cases}; \quad (8)$$

es handelt sich um die Parameterdarstellung einer Schraubenfläche der Ganghöhe 1. Die Funktionalmatrix berechnet sich zu

$$\left[ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \right] = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & 1/(2\pi) \end{bmatrix}.$$

Für einen festen Punkt  $(u_0, v_0)$  in der Parameterebene wird daraus eine Zahlenmatrix. So ist zum Beispiel (Fig. 5.4.2):

$$\left[ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \right]_{(5, \pi/3)} = \begin{bmatrix} 1/2 & -5\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 5/2 \\ 0 & 1/(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -3.464 \\ 0.866 & 2.5 \\ 0 & 0.159 \end{bmatrix}.$$

Wir notieren noch

$$[\mathbf{r}(5, \pi/3)] = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5\sqrt{3}/2 \\ 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.464 \\ 0.167 \end{bmatrix}$$

und erhalten damit aus (6') die folgende in der Umgebung von  $(5, \pi/3)$  nützliche Näherungsformel für die Funktion  $\mathbf{r}(\cdot, \cdot)$ :

$$[\mathbf{r}(5 + du, \pi/3 + dv)] \doteq \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.464 \\ 0.167 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & -3.464 \\ 0.866 & 2.5 \\ 0 & 0.159 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}.$$

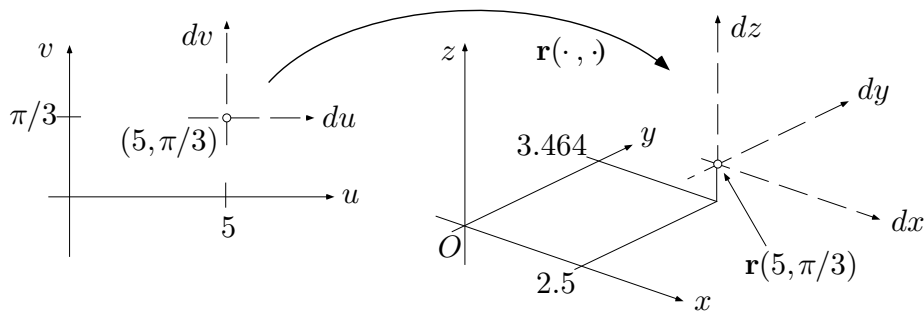


Fig. 5.4.2

Die Funktionalmatrix ist die Matrix einer linearen Abbildung  $L$  der Tangentialräume:

$$L: T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{\mathbf{q}}\mathbb{R}^m, \quad d\mathbf{x} \mapsto d\mathbf{y} := L d\mathbf{x},$$

$$[L] := \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}}.$$

Diese lineare Abbildung ist das mathematische Objekt, nach dem wir gesucht haben. Man nennt  $L$  die **Ableitung** oder das **Differential** (!) von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$  und verwendet dafür Bezeichnungen wie

$$d\mathbf{f}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{f}_*(\mathbf{p})$$

und ähnliche. Wir werden unsere Aufmerksamkeit im weiteren auf die Funktionalmatrix, also die Matrix von  $d\mathbf{f}(\mathbf{p})$  bezüglich der Standardbasen in  $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$  und  $T_{\mathbf{q}}\mathbb{R}^m$ , konzentrieren und die dahinter stehende Ableitung  $d\mathbf{f}(\mathbf{p})$  selbst in Ruhe lassen.

Daß wir die richtigen Begriffe eingeführt haben, erkennt man an der folgenden Fassung der verallgemeinerten Kettenregel:

(5.13') *Bei der Zusammensetzung von Abbildungen multiplizieren sich die zugehörigen Funktionalmatrizen.*

Im einzelnen heißt das (Fig. 5.4.3):

(5.13) *Es seien*

$$\mathbf{y}(\cdot): \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}(\mathbf{x})$$

und

$$\mathbf{z}(\cdot): \mathbb{R}^m \curvearrowright \mathbb{R}^s, \quad \mathbf{y} \mapsto \mathbf{z}(\mathbf{y})$$

zwei  $C^1$ -Abbildungen mit  $\mathbf{y}(\mathbf{p}) =: \mathbf{q} \in \text{dom}(\mathbf{z}(\cdot))$ . Dann besitzt ihre Zusammensetzung:  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{z}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$  die folgende Funktionalmatrix:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \right]_{\mathbf{q}} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}}.$$

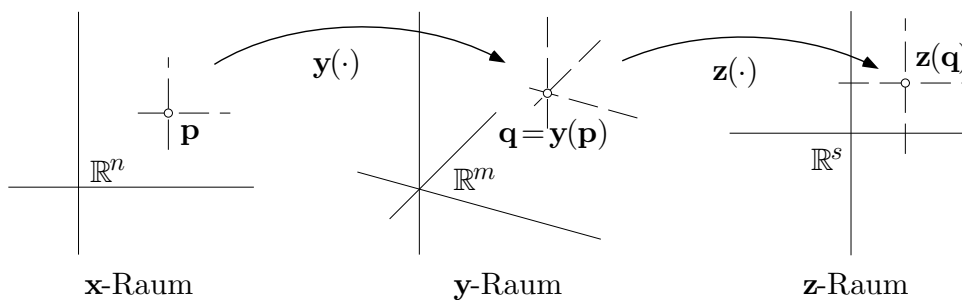


Fig. 5.4.3

□ Wir betrachten eine feste Position  $(i, k)$  der Matrix linker Hand. Das betreffende Matrixelement ist die partielle Ableitung

$$\left. \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{p}}.$$

Zu deren Berechnung hat man nach Satz (5.3) “durch die dazwischengeschalteten Variablen  $y_1, \dots, y_m$  hindurchzudifferenzieren”: Es gilt

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial y_1} & \frac{\partial z_i}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial z_i}{\partial y_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{bmatrix};$$

dabei sind die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$  und die Ableitungen  $\frac{\partial z_i}{\partial y_j}$  an der Stelle  $\mathbf{q} := \mathbf{y}(\mathbf{p})$  zu nehmen. In der letzten Gleichung steht aber rechter Hand gerade das Element in der Position  $(i, k)$  der Produktmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{q}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}_{\mathbf{p}}.$$

Da  $i$  und  $k$  beliebig waren, folgt die Behauptung. □

② Aus Satz (5.13) folgt unter anderem, daß die Funktionalmatrizen von zwei zueinander inversen  $C^1$ -Abbildungen in zugeordneten Punkten zueinander invers sind. Die eindimensionale Version dieses Sachverhalts haben wir schon in Satz (3.1)(f) kennengelernt. An dieser Stelle betrachten wir als Beispiel die Beziehung zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten in der (punktierten) Ebene. Hier haben wir einerseits die Abbildung

$$\text{rect} : \quad \mathbf{p} \mapsto \mathbf{z}, \quad (r, \phi) \mapsto \begin{cases} x := r \cos \phi \\ y := r \sin \phi \end{cases}$$

und andererseits die Umkehrabbildung

$$\text{pol} : \quad \mathbf{z} \mapsto \mathbf{p}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} r := \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi := \arg(x, y) \end{cases},$$

wobei wir die Mehrdeutigkeit des Arguments für einmal außer acht lassen. Die Funktionalmatrix von rect berechnet sich zu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_r & x_\phi \\ y_r & y_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Wie man leicht nachrechnet, besitzt diese Matrix folgende Inverse:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\frac{1}{r} \sin \phi & \frac{1}{r} \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Dies ist schon die Funktionalmatrix  $\left[ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \right]$  der Umkehrabbildung  $\text{pol}$ , nur leider durch die falschen Variablen ausgedrückt. Wir rechnen sie daher auf  $x$  und  $y$  um; es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} r_x & r_y \\ \phi_x & \phi_y \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{bmatrix}.$$

Die hier für die partiellen Ableitungen  $r_x, r_y, \phi_x, \phi_y$  erhaltenen Ausdrücke bestätigen 5.1.(6) sowie das Ergebnis von Beispiel 5.1.④.  $\circ$

## Rang und Regularität, Jacobische Determinante

Wir kehren zurück zu einer allgemeinen Abbildung (1). Die Funktionalmatrix

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}}$$

dient nicht nur zur Approximation von Zuwächsen  $\Delta \mathbf{f}$  (siehe Beispiel ①); sie gibt auch Auskunft über das qualitative Verhalten von  $\mathbf{f}$  in der Umgebung von  $\mathbf{p}$ . Hierfür kommt es nicht auf die genauen numerischen Werte der Matrixelemente an, sondern auf die (einzige) geometrische Invariante dieser Matrix, nämlich ihren *Rang*  $r$ . Da es sich um eine  $(m \times n)$ -Matrix handelt, gilt a priori

$$0 \leq r \leq \min\{m, n\}.$$

In den meisten Punkten  $\mathbf{p} \in \text{dom}(f)$  besitzt die Funktionalmatrix den maximal möglichen Rang  $\min\{m, n\}$ . Derartige Punkte heißen **reguläre Punkte** von  $\mathbf{f}$ . Damit wird die früher für Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$  gegebene Definition verallgemeinert: Im Fall  $m = 1$  ist

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}} = [f_{.1} \ f_{.2} \ \dots \ f_{.n}]_{\mathbf{p}}$$

eine  $(1 \times n)$ -Matrix, ihr Rang also 0 oder 1. Der Rang hat genau dann den Maximalwert 1, wenn  $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$  ist.

Allgemein läßt sich folgendes sagen: Ist  $\mathbf{p}$  ein regulärer Punkt von  $\mathbf{f}$ , so verhält sich  $\mathbf{f}$  in der Umgebung von  $\mathbf{p}$  gerade so, wie man es aufgrund der Dimensionszahlen  $n$  und  $m$  erwartet. Wir erläutern dieses Prinzip an zwei Beispielen; siehe dazu auch das Beispiel 5.3.③ sowie den Anfang von Abschnitt 6.3, insbesondere Beispiel 6.3.①.

③ Die vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) := t^3 \\ y(t) := t^2 \end{cases}$$

ist eine Parameterdarstellung der **Neilschen Parabel**

$$\gamma: y = |x|^{2/3} \quad (-\infty < x < \infty)$$

(Fig. 5.4.4). Die Funktionalmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$$

besitzt für alle  $t \neq 0$  den Rang 1 und an der Stelle  $t := 0$  den Rang 0. Tatsächlich ist  $\gamma$  überall eine schöne Kurve, außer im Ursprung.  $\bigcirc$

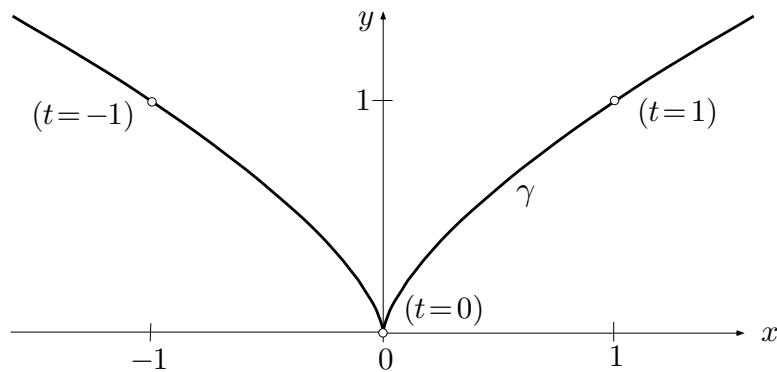


Fig. 5.4.4

① (Forts.) Wir multiplizieren die Kolonnenvektoren

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{r}_v = \left(-u \sin v, u \cos v, \frac{1}{2\pi}\right)$$

der Funktionalmatrix vektoriell und erhalten

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\frac{1}{2\pi} \sin v, -\frac{1}{2\pi} \cos v, u\right).$$

Es folgt

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \frac{1}{4\pi^2} + u^2 > 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 .$$

Die Vektoren  $\mathbf{r}_u$  und  $\mathbf{r}_v$  sind somit durchwegs linear unabhängig. Hieraus schließen wir: Die Funktionalmatrix hat in allen Punkten den Rang 2, die Parameterdarstellung (8) ist also überall regulär. Der Flächencharakter der Schraubenfläche ist tatsächlich nirgends gestört (auch auf der Achse nicht!).  $\circ$

Von besonderem Interesse ist der Fall  $m = n$ , der zum Beispiel bei Koordinatentransformationen auftritt. Hier ist die Funktionalmatrix quadratisch und besitzt somit eine Determinante

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) := \det \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}} ,$$

die sogenannte **Funktionaldeterminante** oder **Jacobische Determinante** von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$ . Die Regularitätsbedingung  $r = n$  ist genau dann erfüllt, wenn

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) \neq 0$$

ist. In diesem Fall ist die Funktionalmatrix eine reguläre Matrix im Sinn der linearen Algebra und besitzt eine wohlbestimmte inverse Matrix. Diese Invertierbarkeit der Ableitung von  $\mathbf{f}$  impliziert die Invertierbarkeit von  $\mathbf{f}$  selbst. Es gilt nämlich der folgende **Satz über die (lokale) Umkehrabbildung** (siehe die Fig. 5.4.5):

**(5.14)** *Es sei  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Abbildung, und an der Stelle  $\mathbf{p} \in \text{dom}(\mathbf{f})$  gelte  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) \neq 0$ . Dann bildet  $\mathbf{f}$  eine geeignete Umgebung  $U$  von  $\mathbf{p}$  bijektiv auf eine Umgebung  $V$  von  $\mathbf{q} := \mathbf{f}(\mathbf{p})$  ab, und die Umkehrabbildung*

$$\mathbf{g} := (\mathbf{f}|_U)^{-1} : \quad V \rightarrow U$$

*ist stetig differenzierbar.*

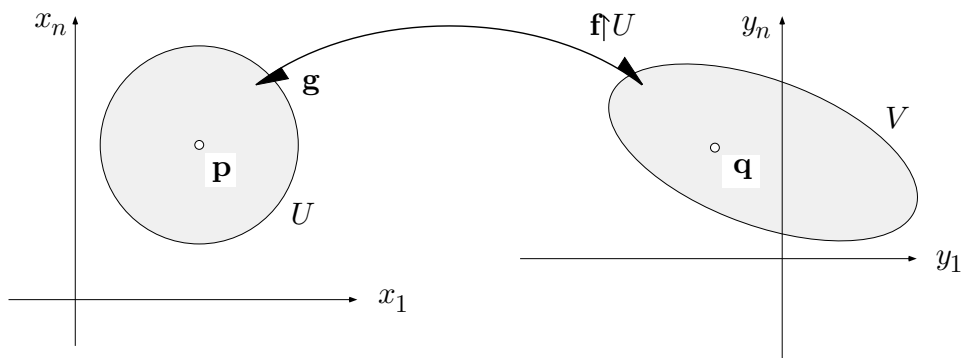


Fig. 5.4.5

(Ohne Beweis) — Dieser fundamentale Satz ist wie der Satz über implizite Funktionen ein reiner Existenzsatz; er liefert keine Formeln für  $\mathbf{g}$ , falls  $\mathbf{f}$  durch Ausdrücke gegeben ist.

## Variablentransformation bei mehrfachen Integralen

Die Jacobische Determinante spielt auch eine Rolle in der Integralrechnung. Es geht da um die Variablentransformation bei mehrfachen Integralen

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}), \quad (9)$$

wobei hier  $f$  nichts mit den vorher betrachteten  $\mathbf{f}$ 's zu tun hat.

Wir haben schon am Schluß von Abschnitt 4.5 gesehen, daß es unter Umständen von Vorteil ist, den Integrationsbereich  $B$  mit Hilfe von anderen Koordinaten zu beschreiben; oft erhält dabei auch der Integrand  $f$  ein einfacheres Aussehen. Man hat dann einen “Phantombereich”  $\tilde{B}$  in einem Hilfsraum der Variablen  $\mathbf{u}$  sowie eine im wesentlichen bijektive Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(\cdot) : \tilde{B} \rightarrow B, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{u})$$

des eigentlichen Integrationsbereichs  $B$  (Fig. 5.4.6). Die Funktion  $f$  erscheint in den neuen Koordinaten als Pullback

$$\tilde{f}(\mathbf{u}) := f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) .$$

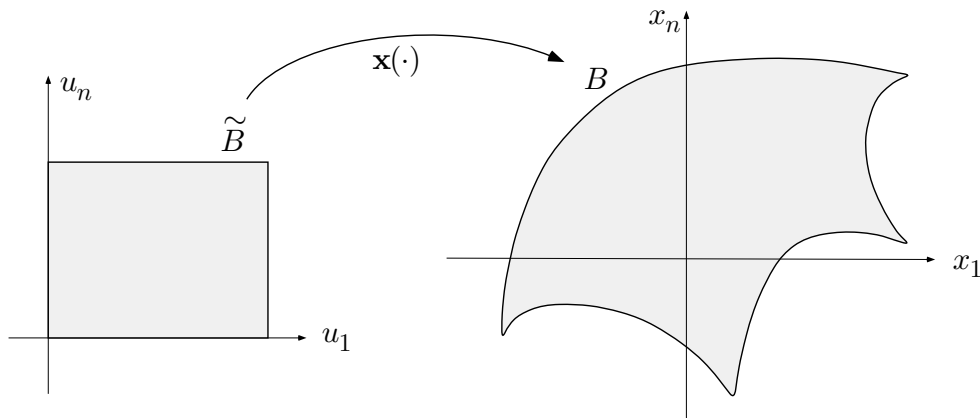


Fig. 5.4.6

Es geht nun darum, den für (9) erforderlichen Integrationsprozess in den Phantombereich  $\tilde{B}$  zurückzuverlegen. Hierüber gilt der folgende Satz:



(5.15) ( $B, \tilde{B}, f, \tilde{f}$  und  $\mathbf{x}(\cdot)$  haben die angegebene Bedeutung.)

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(\mathbf{u}) |J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})| d\mu(\mathbf{u}) .$$

Die Sätze (4.17) (Polarkoordinaten) und (4.18) (Kugelkoordinaten) sind natürlich Spezialfälle dieses Satzes. Wir überlassen es dem Leser, die Jacobische Determinante der Transformation (2) zu berechnen. Es ergibt sich tatsächlich

$$\det \left[ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} \right] = r^2 \cos \theta .$$

□ Wir beweisen Satz (5.15) im dreidimensionalen Fall und für eine Transformation

$$\mathbf{r}(\cdot) : \tilde{B} \rightarrow B, \quad (u, v, w) \mapsto (x, y, z) . \quad (10)$$

Man denke sich den Phantombereich  $\tilde{B}$  in kleine achsenparallele Teilquader  $\tilde{B}_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) mit ‘‘Anfangsecke’’  $\mathbf{p}_k$  zerlegt und betrachte zunächst ein festes  $\tilde{B}_k$  (Fig. 5.4.7) mit Kantenlängen  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ . Die Transformation (10) führt  $\tilde{B}_k$  über in ein Klötzchen  $B_k \subset B$ ; eine Ecke von  $B_k$  befindet sich im Punkt  $\mathbf{q}_k := \mathbf{r}(\mathbf{p}_k)$ . Dieses Klötzchen läßt sich fast nicht unterscheiden von einem Parallelepiped  $P$ , und zwar wird  $P$  aufgespannt von den drei Vektoren

$$\mathbf{r}_u(\mathbf{p}_k)\Delta u, \quad \mathbf{r}_v(\mathbf{p}_k)\Delta v, \quad \mathbf{r}_w(\mathbf{p}_k)\Delta w .$$

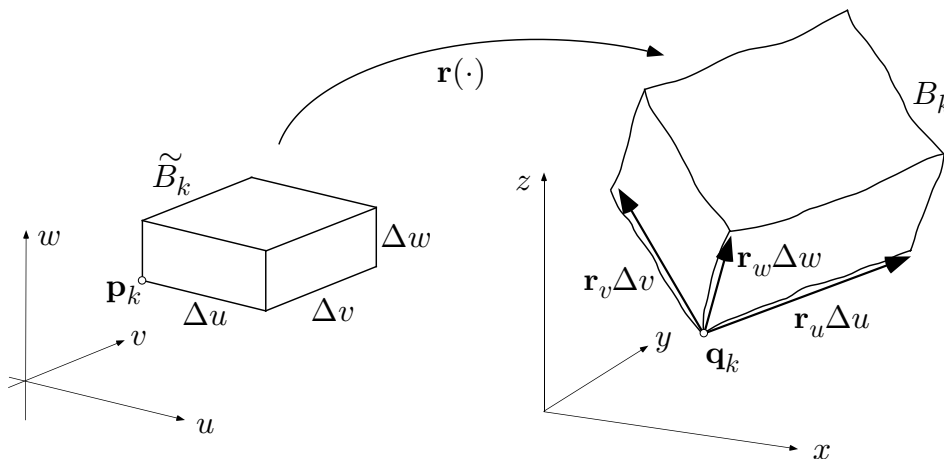


Fig. 5.4.7

$P$  besitzt somit das Volumen

$$\mu(P) = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w]_{\mathbf{p}_k}| \Delta u \Delta v \Delta w .$$

Hier ist das Spatprodukt rechter Hand nichts anderes als die Jacobische Determinante  $J_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}_k)$ . Wir haben daher mit vertretbarem Fehler

$$\mu(B_k) \doteq \mu(P) = |J_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}_k)| \mu(\tilde{B}_k) .$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich nunmehr aus der folgenden Kette von “Gleichungen”:

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y, z) d\mu(x, y, z) &\stackrel{(*)}{\doteq} \sum_{k=1}^N f(\mathbf{q}_k) \mu(B_k) \doteq \sum_{k=1}^N \tilde{f}(\mathbf{p}_k) |J_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}_k)| \mu(\tilde{B}_k) \\ &\doteq \int_{\tilde{B}} f(u, v, w) |J_{\mathbf{r}}(u, v, w)| d\mu(u, v, w) . \end{aligned}$$

An der Stelle (\*) wurde benutzt, daß die Darstellung (10) “im wesentlichen” bijektiv ist, so daß die Klötzchen  $B_k$  zusammen den Integrationsbereich  $B$  gerade einfach überdecken. ┘

④ Es soll das polare Trägheitsmoment der Ellipse

$$B := \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

bezüglich  $O$  bestimmt werden — gemeint ist das Integral

$$\Theta := \int_B (x^2 + y^2) d\mu(x, y) .$$

In sinngemäßer Abwandlung von Polarkoordinaten verwenden wir für  $B$  die Parameterdarstellung

$$(t, \phi) \mapsto \begin{cases} x := at \cos \phi \\ y := bt \sin \phi \end{cases}$$

mit dem Phantombereich

$$\tilde{B} := [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

(Fig. 5.4.8). Die Funktionalmatrix

$$\begin{bmatrix} x_t & x_\phi \\ y_t & y_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \phi & -at \sin \phi \\ b \sin \phi & bt \cos \phi \end{bmatrix}$$

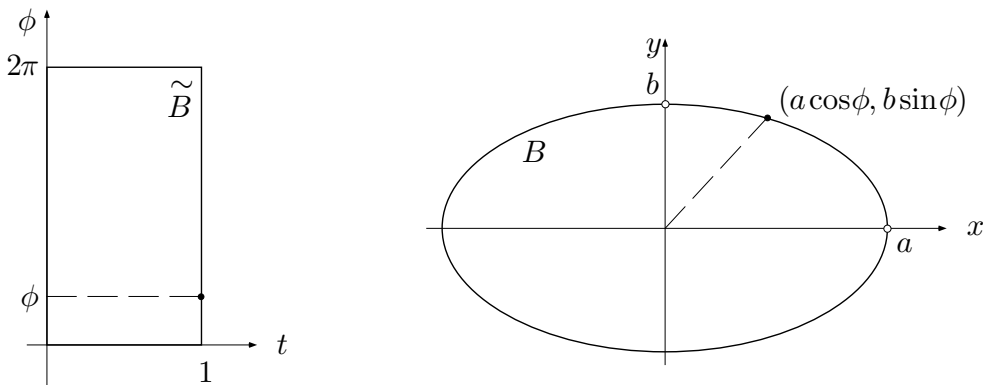


Fig. 5.4.8

besitzt die Determinante

$$J(t, \phi) = abt .$$

Damit erhalten wir nach Satz (5.15):

$$\Theta = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(t, \phi) |J(t, \phi)| d\mu(t, \phi) = \int_{\tilde{B}} (a^2 t^2 \cos^2 \phi + b^2 t^2 \sin^2 \phi) abt d\mu(t, \phi) .$$

Hier sind sowohl der Integrationsbereich  $\tilde{B}$  wie der Integrand Produkt eines “ $t$ -Faktors” mit einem “ $\phi$ -Faktor”; folglich ist auch das Integral ein derartiges Produkt:

$$\begin{aligned} \Theta &= ab \int_0^1 t^3 dt \cdot \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) d\phi \\ &= ab \cdot \frac{1}{4} \cdot (a^2 \pi + b^2 \pi) = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2) . \end{aligned}$$

○

## Aufgaben

1. Die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} := \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

sei definiert durch

$$y_i := \frac{x_i}{1 - x_1 - x_2 - x_3} \quad (1 \leq i \leq 3) .$$

Berechne die Funktionaldeterminante  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ .

2. In welchen Punkten der  $(u, v)$ -Ebene ist die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (u^2 + 2v, 2v^2 - u, u + v)$$

nicht regulär?

3. Betrachte die komplex differenzierbare Funktion  $f(z) := (1+z)(i-z)$  bzw. die zugehörige Abbildung  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . In welchen Punkten ist  $d\mathbf{f}$  nicht regulär? Welchen Rang hat dort  $d\mathbf{f}$ ?

4. Die komplexe Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto w := z^3$$

läßt sich via  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  als Abbildung

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (u, v)$$

auffassen.

- (a) Bestimme  $u$  und  $v$  als Funktionen von  $x$  und  $y$ .
  - (b) Berechne die Funktionaldeterminante  $J_{\mathbf{f}}(x, y)$ .
  - (c) In welchen Punkten der  $(x, y)$ -Ebene ist  $\mathbf{f}$  nicht regulär?
5. Im  $(x, y, z)$ -Raum werden die beiden Flächen  $S_1: z = y^2$  und  $S_2: z = x^3$  betrachtet. Ihre Schnittkurve  $\gamma$  besitzt im Ursprung eine Singularität.
- (a) Stelle eine instruktive Figur dieser Situation her.
  - (b) Mit dem Auftreten einer Singularität mußte von vorneherein gerechnet werden. Warum?
6. Der Körper  $B \subset \mathbb{R}^3$  entsteht durch eine geringfügige Deformation der Einheitskugel, und zwar trifft der von  $\mathbf{0}$  ausgehende Strahl mit geographischen Daten  $(\phi, \theta)$  die Oberfläche von  $B$  im Abstand

$$r(\phi, \theta) := 1 + \varepsilon \sin \phi \cos \theta \quad \left( \phi \in \mathbb{R}/(2\pi), \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right),$$

$\varepsilon$  eine sehr kleine positive Zahl. Bestimme das Volumen von  $B$ .

7. In Fig. 5.6.17 ist eine **Astroide**

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3} \quad (a > 0 \text{ fest})$$

dargestellt. Berechne den eingeschlossenen Flächeninhalt. (*Hinweis:* Stelle den im ersten Quadranten liegenden Teil der Fläche in naheliegender Weise als Bild eines Kreissektors dar.)

## 5.5 Extrema

### 1. Lektion: Kritische Punkte

Im mehrdimensionalen Environment sehen Extremalaufgaben typischer Weise folgendermaßen aus: Gegeben sind eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sowie eine Menge  $M \subset \text{dom}(f)$ . Im allgemeinen liegt  $f$  als Ausdruck vor, und  $M$  wird durch Gleichungen und Ungleichungen beschrieben.

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } f(x, y, z) &:= xy + 2yz + 3zx, \\ M &:= \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Gesucht sind die Zahlen

$$\min_{\mathbf{x} \in M} f(\mathbf{x}), \quad \max_{\mathbf{x} \in M} f(\mathbf{x})$$

sowie die Punkte  $\mathbf{x} \in M$ , in denen diese **globalen Extrema** von  $f$  auf  $M$  angenommen werden. Die Menge  $M$  ist typischer Weise ein echt  $n$ -dimensionaler Bereich  $B$  mit niedrigerdimensionalen Seitenflächen, Kanten und Ecken oder selber ein niedrigerdimensionales Objekt, etwa ein Flächenstück im dreidimensionalen Raum, siehe das obige Beispiel.

Wir gehen bei der weiteren Diskussion davon aus, daß in  $M$  eine Extremalstelle der gesuchten Art tatsächlich vorhanden ist. Satz **(3.2)** garantiert, daß diese Annahme zutrifft, wenn  $f$  stetig ist und  $M$  kompakt.

Wie im eindimensionalen Fall hilft uns die Differentialrechnung, *lokale* Extremalstellen im *Inneren* eines Bereichs  $B$  zum Vorschein zu bringen. Innere Punkte  $\mathbf{x}$  eines Bereichs  $B \subset \mathbb{R}^n$  sind dadurch gekennzeichnet, daß man von einem solchen  $\mathbf{x}$  aus in allen Richtungen des  $\mathbb{R}^n$  ein Stück weit gehen kann, ohne  $B$  zu verlassen. Das spielt in dem folgenden Lemma eine entscheidende Rolle.

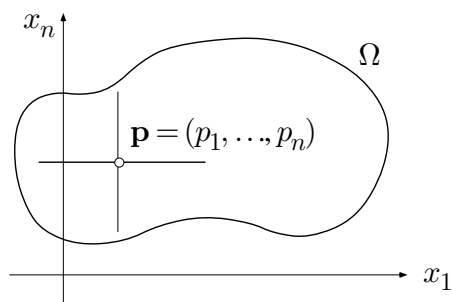


Fig. 5.5.1

**(5.16)** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion. Ist  $f$  an der Stelle  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \Omega$  lokal extremal, so ist  $\mathbf{p}$  notwendigerweise ein kritischer Punkt von  $f$ ; das heißt: Es gilt

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad f_{.k}(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (1 \leq k \leq n) .$$

┌ Ist  $f$  im Punkt  $\mathbf{p}$  (Fig. 5.5.1) zum Beispiel lokal maximal, so ist auch die partielle Funktion

$$\psi(x_1) := f(x_1, p_2, \dots, p_n)$$

der *einen* Variablen  $x_1$  in dem inneren Punkt  $p_1$  ihres Definitionsbereichs lokal maximal, folglich ist

$$f_{.1}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \psi'(p_1) = 0 .$$

Da dieses Argument für alle Koordinatenrichtungen gilt, folgt die Behauptung.

Man kann es auch so sehen: Ist  $\nabla f(\mathbf{p}) =: \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ , so nimmt  $f$  zu, wenn man den Punkt  $\mathbf{p}$  in spitzem Winkel zu  $\mathbf{A}$  verläßt (Fig. 5.5.2), und  $f$  nimmt ab, wenn man  $\mathbf{p}$  in stumpfem Winkel zu  $\mathbf{A}$  verläßt. An einer derartigen Stelle  $\mathbf{p}$  kann  $f$  nicht lokal extremal sein. ┘

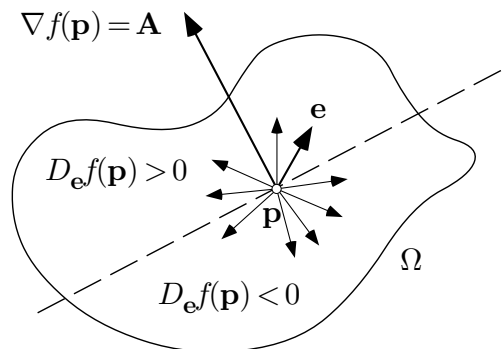


Fig. 5.5.2

Aus Lemma (5.16) folgt: Wird das gesuchte globale Extremum im Inneren des  $n$ -dimensionalen Bereichs  $B$  angenommen, so kommt es bei der Auflösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} f_{.1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{.n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} , \quad (1)$$

bzw. in Variablen  $x, y$ :

$$\left. \begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 \\ f_y(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

automatisch zum Vorschein. Die betreffende Extremalstelle  $\mathbf{p} \in B$  ist ja auch lokale Extremalstelle und somit nach Lemma (5.16) ein kritischer Punkt der Funktion  $f$ .

Die Lösungsmenge von (1) kann aber außer  $\mathbf{p}$  noch weitere Punkte enthalten: kritische Punkte von  $f$ , die nicht in  $B$  liegen, und solche, die vom falschen Typ sind. Die ersteren sind sofort zu streichen, die zweiten mit Hilfe eines Wertvergleichs auszumerzen.

① Die in Beispiel 5.2.④ betrachtete Funktion

$$f(x, y) := \cos(x + 2y) + \cos(2x + 3y)$$

ist in der ganzen Ebene definiert, stetig und in beiden Variablen  $2\pi$ -periodisch. Wendet man Satz (3.2) auf  $f$  und den "Fundamentaltbereich"  $[-\pi, \pi]^2$  an, so folgt, daß  $f$  auf der Menge  $M := \mathbb{R}^2$  globale Extrema annimmt. Da  $M$  offen ist, sind die Extremalstellen notwendigerweise kritische Punkte von  $f$ , gehören also zur Menge der Punkte  $\mathbf{z}_{kl} := (k\pi, l\pi)$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ .

Man berechnet

$$f(\mathbf{z}_{00}) = 2, \quad f(\mathbf{z}_{10}) = f(\mathbf{z}_{01}) = 0, \quad f(\mathbf{z}_{11}) = -2,$$

und aus Periodizitätsgründen sind das schon alle kritischen Werte. Der Wertvergleich zeigt

$$\min_{\mathbf{z} \in M} f(\mathbf{z}) = -2, \quad \max_{\mathbf{z} \in M} f(\mathbf{z}) = 2,$$

wie erwartet. — Für den hier verfolgten Zweck (Bestimmung der globalen Extrema von  $f$ ) ist es also nicht nötig, die kritischen Punkte weiter zu analysieren.  $\circ$

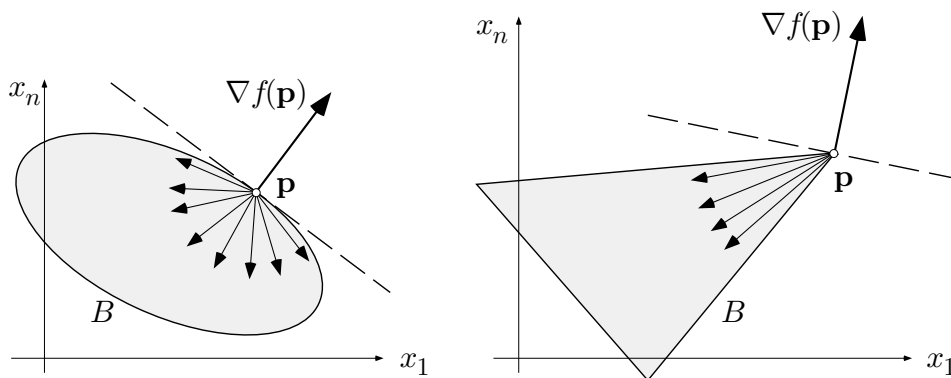


Fig. 5.5.3

## Der Suchalgorithmus für globale Extrema

Wird aber das gesuchte globale Extremum in einem Randpunkt  $\mathbf{p}$  des Bereichs  $B$  angenommen, so braucht  $\nabla f$  in dem betreffenden Punkt nicht zu verschwinden. Die Figur 5.5.3 zeigt dazu zwei Beispiele: Alle von  $\mathbf{p}$  aus ins Innere von  $B$  weisenden Richtungen bilden mit  $\nabla f(\mathbf{p})$  einen stumpfen Winkel; folglich nimmt  $f$  in allen von  $\mathbf{p}$  aus erlaubten Richtungen ab. Der Punkt  $\mathbf{p}$  könnte also ohne weiteres globale Maximalstelle von  $f$  auf  $B$  sein, obwohl  $\nabla f(\mathbf{p})$  nicht verschwindet.

② Hier noch ein ganz simples Beispiel: Es sei

$$f(x, y, z) := z$$

und  $B$  die volle Einheitskugel. Dann gilt natürlich

$$\max_{\mathbf{r} \in B} f(\mathbf{r}) = 1,$$

und Maximalstelle ist der Nordpol  $(0, 0, 1)$ . Andererseits ist

$$\nabla f(x, y, z) \equiv (0, 0, 1) \neq \mathbf{0}.$$

Die Funktion  $f$  besitzt also keine kritischen Punkte, und die Auflösung des Gleichungssystems (1) bringt nichts. ○

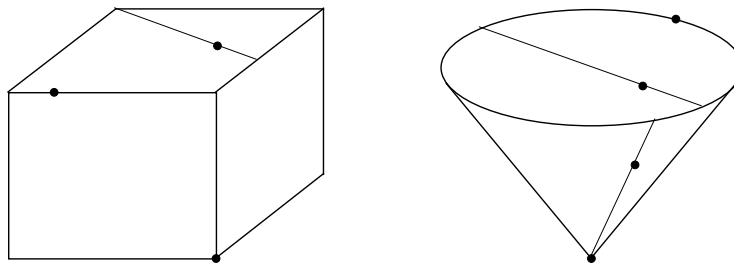


Fig. 5.5.4

Die Figur 5.5.4 belegt den folgenden Sachverhalt: Jeder Randpunkt  $\mathbf{p}$  von  $B$  liegt im “relativen Inneren” einer Seitenfläche oder einer Kante von  $B$ , oder  $\mathbf{p}$  ist eine “Ecke” von  $B$ . Das gibt uns die Chance, auch randständige Extremalstellen mit Hilfe der Differentialrechnung zum Vorschein zu bringen: Es sei nämlich  $S$  eine derartige  $d$ -dimensionale “Seitenfläche”,  $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^d$  ein geeigneter Parameterbereich und

$$\mathbf{x}(\cdot) : \tilde{S} \rightarrow S, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{u}) \quad (2)$$



eine Parameterdarstellung von  $S$  (in den folgenden Beispielen ist immer  $d = 1$  oder  $d = 2$ ). Der Pullback

$$\tilde{f}(\mathbf{u}) := f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \quad (\mathbf{u} \in \tilde{S})$$

“produziert” dann gerade die Funktionswerte von  $f$  auf dieser Seitenfläche.

Wir nehmen jetzt an, es sei der “relativ innere” Punkt  $\mathbf{p} \in S$  eine globale Maximalstelle von  $f$  auf  $B$ , und es sei  $\mathbf{a} \in \tilde{S}$  der zugehörige Parameterpunkt (Fig. 5.5.5). Dann gilt

$$\forall \mathbf{u} \in \tilde{S} : \quad \tilde{f}(\mathbf{u}) \leq \tilde{f}(\mathbf{a}) .$$

Somit liegt folgende Situation vor: Der Punkt  $\mathbf{a}$  ist aufgrund unserer Annahme über  $\mathbf{p}$  ein innerer Punkt der Menge  $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^d$ , und  $\tilde{f}$  ist an der Stelle  $\mathbf{a}$  lokal maximal. Nach Lemma (5.16) muß daher gelten:

$$\nabla \tilde{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

(bzw.  $\tilde{f}'(a) = 0$ , falls  $S$  eindimensional ist). Folglich kommt der Punkt  $\mathbf{a}$  (bzw.  $a$ ) beim Auflösen der Gleichung  $\nabla \tilde{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , das heißt:

$$\tilde{f}_{.k}(u_1, \dots, u_d) = 0 \quad (1 \leq k \leq d) \quad (\text{bzw. } \tilde{f}'(t) = 0)$$

zum Vorschein, eventuell zusammen mit anderen kritischen Punkten  $\mathbf{a}_i \in \tilde{S}$ . Die zugehörigen Punkte  $\mathbf{p}_i := \mathbf{x}(\mathbf{a}_i)$  auf  $S$  wollen wir **bedingt kritische Punkte** von  $f$  (bezüglich  $S$ ) nennen; der hauptsächlich interessierende Punkt  $\mathbf{p}$  befindet sich bestimmt dabei.

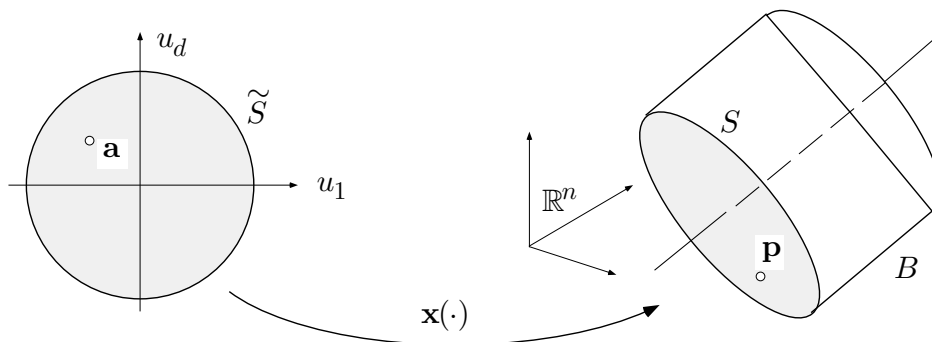


Fig. 5.5.5

Nach diesen Ausführungen ist klar, wie man zur Berechnung der globalen Extrema einer Funktion  $f$  auf einem  $n$ -dimensionalen Bereich  $B$  vorzugehen hat:

- Man bestimme alle kritischen Punkte von  $f$  im Inneren von  $B$  sowie
- die bedingt kritischen Punkte im “relativen Inneren” jeder  $d$ -dimensionalen Seitenfläche,  $0 < d < n$ .

Zu dieser Kollektion von Punkten füge man

- die Ecken von  $B$

hinzu und hat dann im allgemeinen eine endliche Liste von Punkten (“Kandidaten”)

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N\} \subset B. \quad (3)$$

Diese Liste enthält notwendigerweise alle Maximalstellen von  $f$  auf  $B$ ; somit ist

$$\max_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq N} f(\mathbf{p}_i),$$

und analog für das Minimum. Nachdem man die Liste (3) einmal hat, können also die globalen Extrema durch einen einfachen Wertvergleich ermittelt werden.

③ Es sollen die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) := x^3 - 18x^2 + 81x + 12y^2 - 144y + 24xy$$

auf dem Bereich

$$B := \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10\}$$

(Fig. 5.5.6) bestimmt werden.

Wir suchen zunächst die kritischen Punkte von  $f$  im Inneren von  $B$  mit Hilfe der Gleichungen

$$(f_x =) \quad 3x^2 - 36x + 81 + 24y = 0, \quad (4)$$

$$(f_y =) \quad 24y - 144 + 24x = 0. \quad (5)$$

Aus (5) folgt  $y = 6 - x$ . Wird dies in (4) eingesetzt, so resultiert für  $x$  die quadratische Gleichung

$$3x^2 - 36x + 81 + 24(6 - x) = 3(x^2 - 20x + 75) = 0$$

mit den Lösungen  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 15$ . Von diesen ist die zweite zu verwerfen, da sie keinen Punkt in  $B$  liefert. Somit erhalten wir den einzigen kritischen Punkt  $P_1 := (5, 1)$  im Inneren von  $B$ .

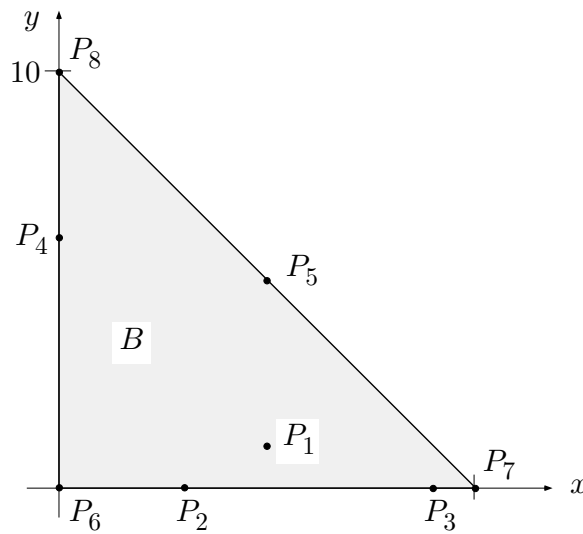


Fig. 5.5.6

Wir müssen nun die bedingt kritischen Punkte von  $f$  auf den drei Kanten von  $B$  bestimmen. Für die untere Kante müssen wir die Funktion

$$g_1(x) := f(x, 0) = x^3 - 18x^2 + 81x$$

(das ist der Pullback von  $f$  bezüglich der Parameterdarstellung  $x \mapsto (x, 0)$ ) untersuchen. Die Ableitung

$$g_1'(x) = 3x^2 - 36x + 81 = 3(x^2 - 12x + 27)$$

besitzt die beiden Nullstellen  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 9$ , die die beiden bedingt kritischen Punkte  $P_2 := (3, 0)$ ,  $P_3 := (9, 0)$  anzeigen.

Für die vertikale Kante haben wir analog die Funktion

$$g_2(y) := f(0, y) = 12y^2 - 144y$$

zu betrachten. Die Ableitung

$$g_2'(y) = 24y - 144$$

besitzt die einzige Nullstelle  $y = 6$ , was uns den weiteren Punkt  $P_4 := (0, 6)$  liefert.

Die dritte Kante schließlich hat die Gleichung  $y = 10 - x$ . Wir bilden daher die Funktion

$$\begin{aligned} g_3(x) &:= f(x, 10 - x) \\ &= x^3 - 18x^2 + 81x + 12(10 - x)^2 - 144(10 - x) + 24x(10 - x) \\ &= x^3 - 30x^2 + 225x - 240 \end{aligned}$$

mit der Ableitung

$$g'_3(x) = 3x^2 - 60x + 225 = 3(x^2 - 20x + 75) .$$

Die Nullstellen sind  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 15$ , wobei die zweite gleich gestrichen werden kann. Damit haben wir den letzten bedingt kritischen Punkt  $P_5 := (5, 5)$ .

Wir fügen noch die Eckpunkte  $P_6 := (0, 0)$ ,  $P_7 := (10, 0)$ ,  $P_8 := (0, 10)$  hinzu und haben damit die endgültige Kandidatenliste. Die zugehörigen Funktionswerte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$P_i$	(5,1)	(3,0)	(9,0)	(0,6)	(5,5)	(0,0)	(10,0)	(0,10)
$f(P_i)$	68	108	0	-432	260	0	10	-240

Dieser Tabelle entnehmen wir:

$$\min_{(x,y) \in B} f(x,y) = f(0,6) = -432, \quad \max_{(x,y) \in B} f(x,y) = f(5,5) = 260 .$$

○

④ Es sollen die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := -\sqrt{3}x + 3y + 2z$$

auf der Einheitskugel  $B := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  bestimmt werden.

Der Gradient  $\nabla f(x, y, z) \equiv (-\sqrt{3}, 3, 2)$  ist durchwegs  $\neq \mathbf{0}$ ; folglich werden die gesuchten Extrema sicher nicht im Inneren von  $B$  angenommen. Für die Oberfläche  $\partial B$  verwenden wir die Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}(\cdot, \cdot) : (\phi, \theta) \mapsto \begin{cases} x = \cos \theta \cos \phi \\ y = \cos \theta \sin \phi \\ z = \sin \theta \end{cases} \quad \left( \phi \in \mathbb{R}/2\pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right), \quad (6)$$

wobei allerdings Nord- und Südpol extra betrachtet werden müssen, da diese beiden Punkte von  $\mathbf{r}(\cdot, \cdot)$  nicht produziert werden. Die Funktion  $f$  erhält in den neuen Variablen die Form

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\phi, \theta) &= f(x(\phi, \theta), y(\phi, \theta), z(\phi, \theta)) \\ &= (-\sqrt{3} \cos \phi + 3 \sin \phi) \cos \theta + 2 \sin \theta . \end{aligned}$$

Wir haben somit das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{f}_\phi =) & \quad (\sqrt{3} \sin \phi + 3 \cos \phi) \cos \theta = 0 \\ (\tilde{f}_\theta =) & \quad (\sqrt{3} \cos \phi - 3 \sin \phi) \sin \theta + 2 \cos \theta = 0 \end{aligned} \right\}$$

aufzulösen. Aus der ersten Gleichung folgt wegen  $\cos \theta \neq 0$  nacheinander

$$\sqrt{3} \sin \phi + 3 \cos \phi = 0, \quad \tan \phi = -\sqrt{3}$$

mit den Lösungen  $\phi_1 = -\frac{\pi}{3}$ ,  $\phi_2 = \frac{2\pi}{3}$ . Setzen wir in der zweiten Gleichung  $\phi := -\frac{\pi}{3}$ , so erhalten wir für  $\theta$  nacheinander die Gleichungen

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \sin \theta + 2 \cos \theta = 0, \quad 2\sqrt{3} \sin \theta + 2 \cos \theta = 0, \quad \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

und dies liefert den Wert  $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$ . Analog erhält man für  $\phi := \frac{2\pi}{3}$  aus der zweiten Gleichung den Wert  $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ .

Hiernach besitzt  $\tilde{f}$  die beiden kritischen Punkte

$$\mathbf{a}_1 := \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right), \quad \mathbf{a}_2 := \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$$

in der  $(\phi, \theta)$ -Ebene. Zu diesen gehören vermöge (6) die zwei bedingt kritischen Punkte

$$\mathbf{p}_1 := \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{p}_2 := \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

von  $f$  auf  $\partial B$ . Die Kandidatenliste ist noch durch die beiden Pole

$$\mathbf{p}_3 := (0, 0, 1), \quad \mathbf{p}_4 := (0, 0, -1)$$

zu ergänzen, worauf der Wertvergleich durchgeführt werden kann. Aufgrund von

$$f(\mathbf{p}_1) = -4, \quad f(\mathbf{p}_2) = 4, \quad f(\mathbf{p}_3) = 2, \quad f(\mathbf{p}_4) = -2$$

liefert er

$$\min_{\mathbf{r} \in B} f(\mathbf{r}) = -4, \quad \max_{\mathbf{r} \in B} f(\mathbf{r}) = 4.$$

Wir werden auf dieses Beispiel zurückkommen. Die bedingt kritischen Punkte  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  lassen sich nämlich auf wesentlich einfachere Weise bestimmen, und die Punkte  $\mathbf{p}_3$ ,  $\mathbf{p}_4$  sollten von Rechts wegen gar nicht in Erscheinung treten, da sie nichts mit dem gegebenen Problem, sondern nur etwas mit der für  $\partial B$  gewählten Parameterdarstellung zu tun haben.  $\circ$

## Bedingt kritische Punkte, geometrisch betrachtet

Wir sind hier immer davon ausgegangen, daß die  $d$ -dimensionalen Seitenflächen eines Bereichs  $B$  in Parameterdarstellung vorliegen. Eine derartige Parameterdarstellung ist jedoch nicht immer greifbar, oder sie kann zu umständlichen Rechnungen führen wie im vorangehenden Beispiel. Vor allem aber gibt es Extremalaufgaben, die von Anfang an nicht in der bis jetzt verwendeten geometrischen Einkleidung daherkommen, sondern als sogenannte **Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen**. Hier wird das Maximum (Minimum) einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$  gesucht, wobei aber die an sich unabhängigen und gleichberechtigten Variablen  $x_1, \dots, x_n$  durch  $r$  Gleichungen der Form

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_r(x_1, \dots, x_n) = 0$$

in ihrer Variabilität eingeschränkt sind. Diese  $r$  Nebenbedingungen, meist ist  $r = 1$ , definieren eine "Fläche"  $S \subset \mathbb{R}^n$  der Dimension (= "Anzahl Freiheitsgrade")  $d := n - r$ . Nur die Punkte  $\mathbf{x} \in S$  werden zur Konkurrenz zugelassen, und die Funktionswerte in den Punkten  $\mathbf{x} \notin S$  fallen vollständig außer Betracht. Die gesuchte Größe

$$\max_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$$

ist das **bedingte Maximum** von  $f$  bezüglich  $S$ , und die Punkte  $\mathbf{p} \in S$ , wo dieses Maximum angenommen wird, sind **bedingte Maximalstellen** von  $f$ ; analog für das Minimum.

⑤ Die  $n$  nichtnegativen Zahlen  $x_k$  haben die vorgegebene Summe  $s > 0$ :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s. \quad (7)$$

Welches ist der maximal mögliche Wert des Produkts dieser  $n$  Zahlen? — Es geht hier um das Maximum der Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

unter der Nebenbedingung (7) und der weiteren Einschränkung

$$x_k \geq 0 \quad (1 \leq k \leq n),$$

oder eben um das bedingte Maximum von  $f$  bezüglich der durch (7) definierten  $(n - 1)$ -dimensionalen Fläche  $S \subset \mathbb{R}^n$ . ○

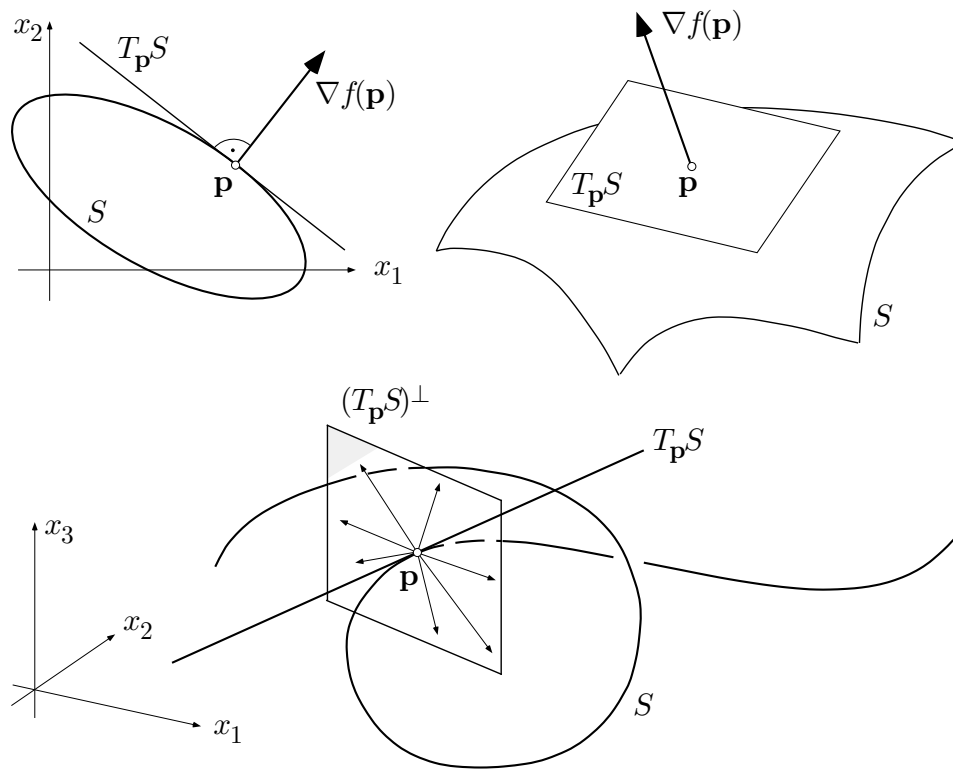


Fig. 5.5.7

Um hier weiterzukommen, benötigen wir eine Charakterisierung der bedingt kritischen Punkte (s.o.), die nicht auf eine vorgegebene Parameterdarstellung von  $S$  Bezug nimmt. Die folgende geometrische Erklärung ist äquivalent mit der früher gegebenen (ohne Beweis): Der Punkt  $\mathbf{p} \in S$  ist ein **bedingt kritischer Punkt** von  $f$  bezüglich  $S$ , wenn der Gradient  $\nabla f(\mathbf{p})$  auf der Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}S$  senkrecht steht. Mit Hilfe dieses Begriffs können wir folgende “bedingte Version” von Lemma (5.16) formulieren, siehe dazu die Fig. 5.5.7:

**(5.17)** *Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion und  $S \subset \text{dom}(f)$  eine  $d$ -dimensionale “Fläche”. Ist  $f$  im Punkt  $\mathbf{p} \in S$  bedingt lokal extremal bezüglich  $S$ , so ist  $\mathbf{p}$  ein bedingt kritischer Punkt von  $f$ ; das heißt: Es ist*

$$\nabla f(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}S .$$

□ Steht  $\nabla f(\mathbf{p}) =: \mathbf{A}$  nicht senkrecht auf  $T_{\mathbf{p}}S$ , so gibt es in  $T_{\mathbf{p}}S$  eine Richtung  $\mathbf{e}$ , die mit  $\mathbf{A}$  einen spitzen Winkel bildet. Verläßt man  $\mathbf{p}$  längs einer Kurve  $\gamma \subset S$  in Richtung  $\mathbf{e}$  (Fig. 5.5.8), so nimmt  $f$  zu wegen

$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} > 0 ;$$

in der entgegengesetzten Richtung nimmt  $f$  ab wegen

$$D_{-\mathbf{e}}f(\mathbf{p}) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} < 0 .$$

Unter diesen Umständen kann  $f$  im Punkt  $\mathbf{p}$  nicht bedingt lokal extremal sein. ┘

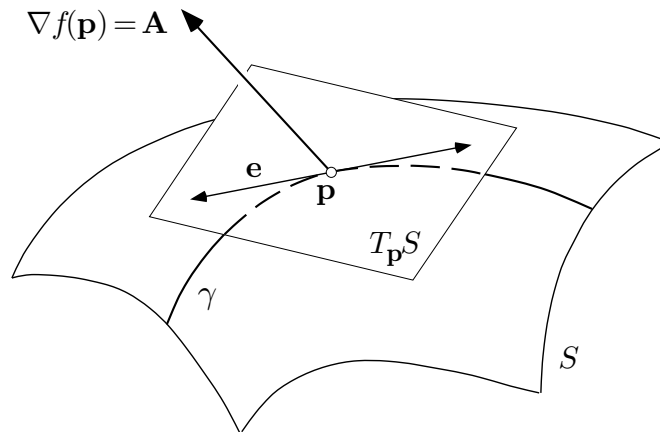


Fig. 5.5.8

## Die Methode von Lagrange

Wie findet man die bedingt kritischen Punkte? — Die Menge  $S$  der zugelassenen Punkte sei zunächst durch *eine* Gleichung (Nebenbedingung)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

definiert, wobei wir annehmen wollen, daß in allen Punkten  $\mathbf{x} \in S$  gilt:

$$\nabla F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} .$$

Dann ist  $S$  nach Satz (5.11) bzw. seinem Analogon für Funktionen  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , eine glatte  $(n - 1)$ -dimensionale "Fläche" und besitzt in jedem Punkt  $\mathbf{p}$  eine Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}S$ , deren eindimensionales orthogonales Komplement  $(T_{\mathbf{p}}S)^\perp$ , vulgo: **Normale**, erzeugt wird von  $\nabla F(\mathbf{p})$ . Hieraus folgt: Ist  $\mathbf{p}$  ein bedingt kritischer Punkt von  $f$  bezüglich  $S$ , so gilt  $F(\mathbf{p}) = 0$  und nach Lemma (5.17) *zusätzlich*

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla F(\mathbf{p})$$

für ein geeignetes  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Fig. 5.5.9). Der Punkt  $\mathbf{p}$  kommt daher bei der Auflösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} F(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_{.k}(x_1, \dots, x_n) = \lambda F_{.k}(x_1, \dots, x_n) \quad (1 \leq k \leq n) \end{array} \right\}$$



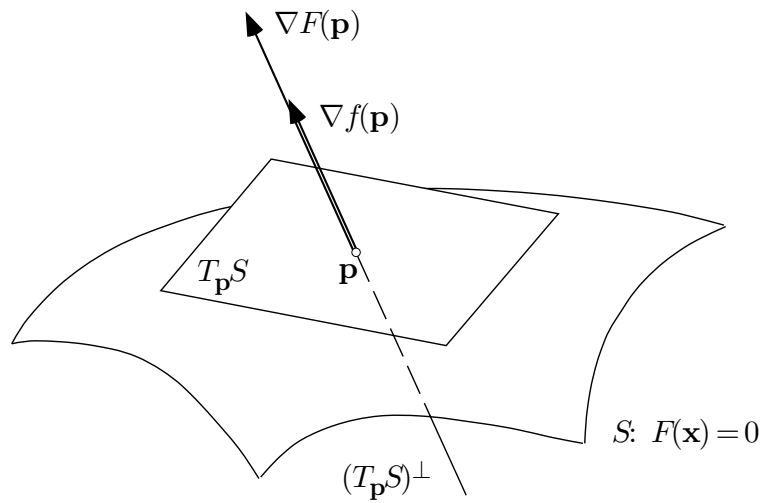


Fig. 5.5.9

von  $n+1$  Gleichungen in den  $n+1$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_n, \lambda$  zum Vorschein. (Der Wert von  $\lambda$  wird an sich nicht benötigt.)

⑤ (Forts.) Die Menge  $S$  der zugelassenen  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ist ein sogenanntes  $(n-1)$ -**Simplex** im  $\mathbb{R}^n$ , insbesondere eine kompakte Menge (siehe die Fig. 5.5.10). In jedem Randpunkt dieses Simplex ist mindestens ein  $x_k = 0$  und damit auch  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Es folgt: Die Produktfunktion  $f$  nimmt auf  $S$  ein globales Maximum an, und zwar in einem relativ inneren Punkt  $\mathbf{p} \in S$ . Nach Lemma (5.17) ist  $\mathbf{p}$  ein bedingt kritischer Punkt von  $f$  bezüglich der Nebenbedingung

$$F(x_1, \dots, x_n) := x_1 + x_2 + \dots + x_n - s = 0.$$

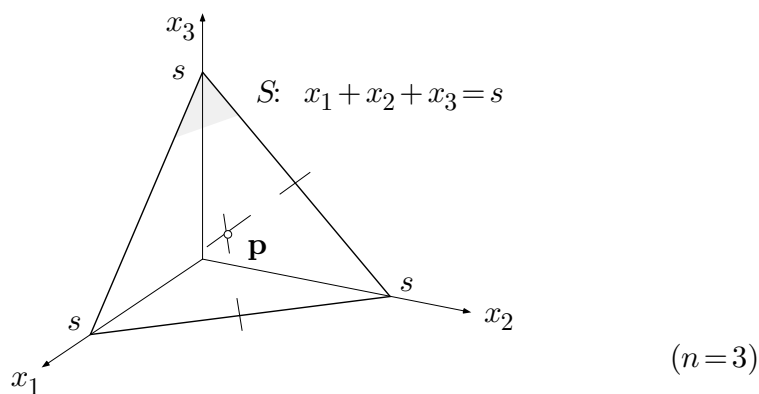


Fig. 5.5.10

Die  $n$  Gleichungen

$$f_{.k}(\mathbf{x}) = \lambda F_{.k}(\mathbf{x}) \quad (1 \leq k \leq n)$$

lauten im vorliegenden Fall:

$$x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_n = \lambda \cdot 1 \quad (1 \leq k \leq n).$$

Multiplizieren wir die  $k$ -te Gleichung mit  $x_k$ , so folgt

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \lambda x_k \quad (1 \leq k \leq n).$$

Da hier die linke Seite von  $k$  nicht abhängt, müssen alle  $x_k$  denselben Wert haben, und aufgrund der Nebenbedingung ist das notwendigerweise der Wert

$$p_k := \frac{s}{n} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Damit ist der gesuchte bedingt kritische Punkt  $\mathbf{p}$  gefunden. Nach der Vorbemerkung gilt

$$\forall \mathbf{x} \in S : \quad f(x_1, \dots, x_n) \leq f(p_1, \dots, p_n);$$

somit haben wir

$$\forall \mathbf{x} \in S : \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq \left(\frac{s}{n}\right)^n, \quad (8)$$

und unser am Anfang gestelltes Problem ist gelöst. Ziehen wir noch in (8) auf beiden Seiten die  $n$ -te Wurzel, so erhalten wir die berühmte **Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel** von  $n$  nichtnegativen Zahlen:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (x_k \geq 0),$$

und zwar gilt hier das Gleichheitszeichen nur dann, wenn alle  $x_k$  denselben Wert haben. ○

Wir diskutieren noch den folgenden Fall: Die Menge  $S$  der zugelassenen Punkte ist definiert durch zwei Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0 \quad \wedge \quad G(x, y, z) = 0$$

in den Variablen  $x, y, z$ . Ein derartiges  $S$  läßt sich auffassen als Schnittkurve der beiden (gewöhnlichen) Flächen

$$S^F : F(x, y, z) = 0, \quad S^G : G(x, y, z) = 0,$$

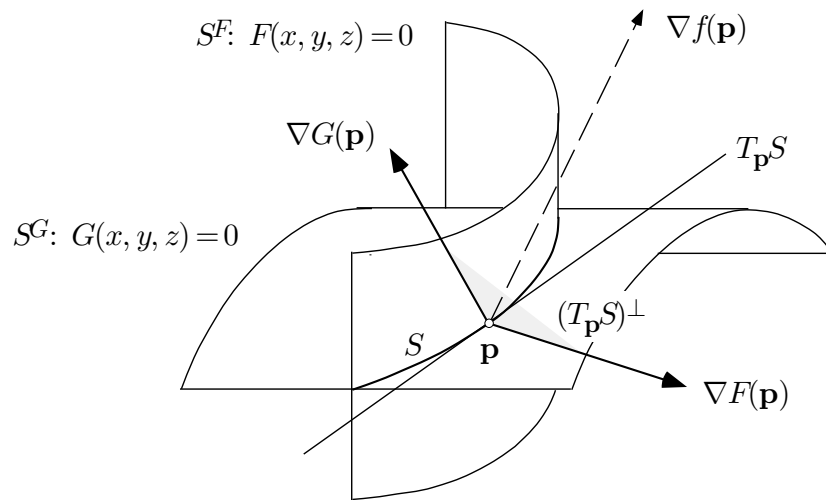


Fig. 5.5.11

wobei wir voraussetzen wollen, daß der Schnitt in allen Punkten  $\mathbf{p} \in S$  **transversal**, das heißt: nicht schleifend, erfolgt. Die Tangente  $T_{\mathbf{p}}S$  liegt in beiden Tangentialebenen  $T_{\mathbf{p}}S^F$ ,  $T_{\mathbf{p}}S^G$  und steht damit nach Satz (5.11) senkrecht auf den beiden Vektoren  $\nabla F(\mathbf{p})$ ,  $\nabla G(\mathbf{p})$ . Hieraus folgt (Fig. 5.5.11): Die Ebene  $(T_{\mathbf{p}}S)^\perp$  der auf  $T_{\mathbf{p}}S$  senkrecht stehenden Vektoren wird gerade von  $\nabla F(\mathbf{p})$  und  $\nabla G(\mathbf{p})$  aufgespannt; das heißt, es ist

$$(T_{\mathbf{p}}S)^\perp = \{ \lambda \nabla F(\mathbf{p}) + \mu \nabla G(\mathbf{p}) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} .$$

Es sei jetzt  $\mathbf{p}$  bedingt kritischer Punkt der Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}$  bezüglich  $S$ . Nach Lemma (5.17) ist dann  $\nabla f(\mathbf{p}) \in (T_{\mathbf{p}}S)^\perp$ , somit gilt

$$F(\mathbf{p}) = 0, \quad G(\mathbf{p}) = 0$$

und zusätzlich

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla F(\mathbf{p}) + \mu \nabla G(\mathbf{p})$$

für geeignete  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Hieraus folgt: Der Punkt  $\mathbf{p}$  kommt bei der Auflösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, & G(x, y, z) &= 0 \\ f_x(x, y, z) &= \lambda F_x(x, y, z) + \mu G_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) &= \lambda F_y(x, y, z) + \mu G_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) &= \lambda F_z(x, y, z) + \mu G_z(x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

von 5 Gleichungen in den 5 Unbekannten  $x, y, z, \lambda, \mu$  zum Vorschein.

Unsere Überlegungen führen per saldo zu dem folgenden allgemeinen Ansatz: Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion, und es sei die  $d$ -dimensionale "Fläche"  $S \subset \text{dom}(f)$  definiert durch die  $r := n - d$  Gleichungen

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_r(x_1, \dots, x_n) = 0$$

mit  $C^1$ -Funktionen  $F_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Man bilde nun mit  $r$  Hilfsvariablen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die sogenannte **Lagrangesche Prinzipalfunktion**

$$\Phi(\mathbf{x}, \lambda) := f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 F_1(x_1, \dots, x_n) - \dots - \lambda_r F_r(x_1, \dots, x_n)$$

(ein rein formales Konstrukt ohne geometrische Interpretation). Die Hilfsvariablen  $\lambda_j$  heißen **Lagrangesche Multiplikatoren**. Dann gilt der folgende Satz, der zusammen mit Lemma (5.17) ermöglicht, bedingte lokale Extremalstellen von  $f$  auf  $S$  herauszubekommen:

**(5.18)** ( *$S, f$  und  $\Phi$  haben die angegebene Bedeutung.*) Die bedingt kritischen Punkte von  $f$  auf  $S$  kommen bei der Auflösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} F_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1 \leq j \leq r) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = 0 \quad (1 \leq k \leq n) \end{array} \right\}$$

( $r + n$  Gleichungen in  $n + r$  Unbekannten) zum Vorschein.

## Zwei Beispiele

④ (Forts.) Die Oberfläche  $\partial B$  der Einheitskugel ist gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Zur Bestimmung der bedingt kritischen Punkte von  $f$  auf  $\partial B$  setzen wir die Prinzipalfunktion

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, \lambda) &:= f(x, y, z) - \lambda F(x, y, z) \\ &= -\sqrt{3}x + 3y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{aligned}$$

an. Nach Satz (5.18) haben wir jetzt das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (\Phi_x =) \quad -\sqrt{3} - 2\lambda x = 0 \\ (\Phi_y =) \quad 3 - 2\lambda y = 0 \\ (\Phi_z =) \quad 2 - 2\lambda z = 0 \end{array} \right\}$$

nach  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und allenfalls  $\lambda$  aufzulösen. Es folgt

$$x = \frac{-\sqrt{3}}{2\lambda}, \quad y = \frac{3}{2\lambda}, \quad z = \frac{1}{\lambda}$$

und somit

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1 \right) = \frac{4}{\lambda^2}.$$

Hiernach ist  $\lambda = \pm 2$ , und wir erhalten die zwei bedingt kritischen Punkte

$$\mathbf{p}_1 = \left( \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right), \quad \mathbf{p}_2 = \left( -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right),$$

wie vorher, während die "Geister"  $\mathbf{p}_3$  und  $\mathbf{p}_4$  nicht mehr auftauchen.  $\circ$

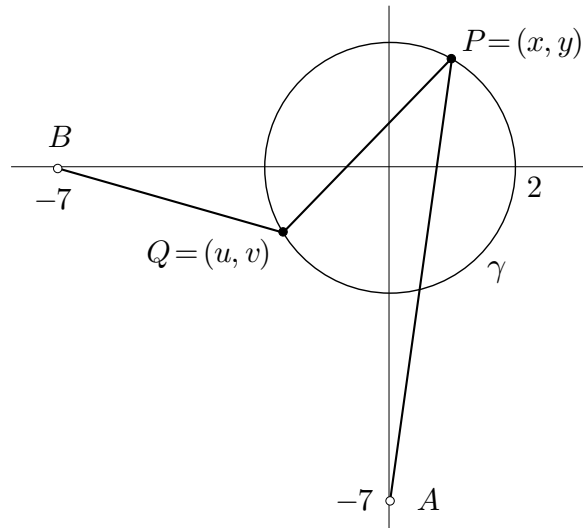


Fig. 5.5.12

⑥ Gegeben sind die Punkte  $A := (0, -7)$  und  $B := (-7, 0)$  sowie der Kreis  $\gamma$  vom Radius 2 um  $O$  (Fig. 5.5.12). Es sollen zwei Punkte  $P, Q \in \gamma$  so bestimmt werden, daß die Größe

$$d(P, Q) := |AP|^2 + |PQ|^2 + |QB|^2$$

maximal (minimal) wird. Mit  $P := (x, y)$ ,  $Q := (u, v)$  wird  $d$  eine Funktion der vier Variablen  $x, y, u, v$ , wobei diese vier Variablen den zwei Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &:= x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ G(u, v) &:= u^2 + v^2 - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

unterworfen sind. Die Nebenbedingungen legen eine zweidimensionale Fläche  $S \subset \mathbb{R}^4$  fest. Da  $P$  und  $Q$  unabhängig voneinander auf dem Kreis  $\gamma$  gewählt werden können, ist  $S$  das kartesische Produkt von zwei Kreisen, also eine Torusfläche. Wir bilden die Prinzipalfunktion

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, u, v, \lambda, \mu) &:= d(x, y, u, v) - \lambda F(x, y) - \mu G(u, v) \\ &= x^2 + (y + 7)^2 + (x - u)^2 + (y - v)^2 + (u + 7)^2 + v^2 \\ &\quad - \lambda(x^2 + y^2 - 4) - \mu(u^2 + v^2 - 4)\end{aligned}$$

und erhalten neben (9) die folgenden Gleichungen für die bedingt stationären Punkte:

$$\left. \begin{aligned}(\Phi_x =) \quad & 2x + 2(x - u) & -2\lambda x & = 0 \\ (\Phi_y =) \quad & 2(y + 7) + 2(y - v) & -2\lambda y & = 0 \\ (\Phi_u =) \quad & 2(u - x) + 2(u + 7) & -2\mu u & = 0 \\ (\Phi_v =) \quad & 2(v - y) + 2v & -2\mu v & = 0\end{aligned} \right\}.$$

Multipliziert man hier die erste Gleichung mit  $-y$ , die zweite mit  $x$  und addiert, so hebt sich einiges heraus, und es ergibt sich

$$2(uy - vx) + 14x = 0. \quad (10)$$

Analog: Multipliziert man die dritte Gleichung mit  $v$ , die vierte mit  $-u$  und addiert, so erhält man nach Vereinfachung

$$2(uy - vx) + 14v = 0,$$

zusammen mit (10) also

$$v = x. \quad (11)$$

Hieraus ergibt sich weiter wegen (9) die Relation

$$u^2 = 4 - v^2 = 4 - x^2 = y^2$$

und somit (a):  $u = y$ , oder (b):  $u = -y$ .

Wir können nun  $u$  und  $v$  aus (10) eliminieren. Im Fall (a) erhalten wir die Gleichung  $2(y^2 - x^2) + 14x = 0$ , zusammen mit  $x^2 + y^2 = 4$  also

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

mit den beiden Lösungen  $x = 4$  und  $x = -\frac{1}{2}$ . Die erste ist wegen  $|x| > 2$  zu verwerfen; zu der zweiten gehören die  $y$ -Werte  $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$ . Aufgrund von (11) und (a) erhalten wir damit die beiden folgenden Punktepaare  $(P, Q)$ :

$$\begin{aligned}P_1 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), & Q_1 &= \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right); \\ P_2 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), & Q_2 &= \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

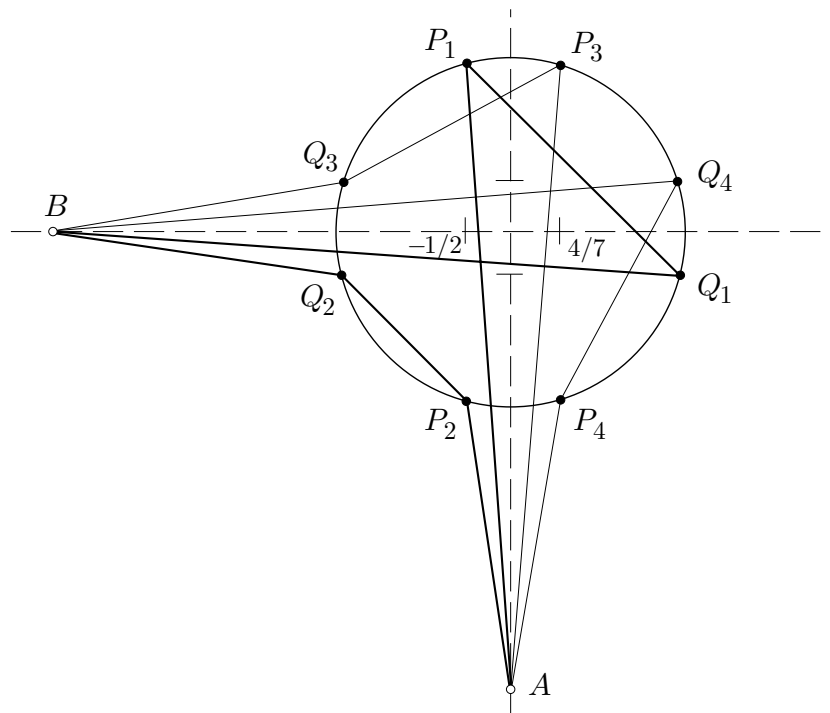


Fig. 5.5.13

Im Fall (b) hingegen liefert die Elimination von  $u$  und  $v$  aus (10) zunächst

$$-2(y^2 + x^2) + 14x = 0,$$

und dies führt im Verein mit  $x^2 + y^2 = 4$  auf eine lineare Gleichung für  $x$  mit der Lösung  $x = \frac{4}{7}$ . Hierzu gehören die  $y$ -Werte  $y = \pm \frac{6\sqrt{5}}{7}$ , und wir erhalten mit Hilfe von (11) und (b) die beiden weiteren Punktepaare

$$\begin{aligned} P_3 &= \left( \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\sqrt{5} \right), & Q_3 &= \left( -\frac{6}{7}\sqrt{5}, \frac{4}{7} \right); \\ P_4 &= \left( \frac{4}{7}, -\frac{6}{7}\sqrt{5} \right), & Q_4 &= \left( \frac{6}{7}\sqrt{5}, \frac{4}{7} \right). \end{aligned}$$

Die Funktion  $d(\cdot)$  besitzt also auf der Torusfläche  $S \subset \mathbb{R}^4$  vier bedingt stationäre Punkte

$$(P_k, Q_k) = (x_k, y_k, u_k, v_k) \quad (1 \leq k \leq 4).$$

Zeichnen wir die zugehörigen Streckenzüge in die Ausgangsfigur ein, so sehen wir (Fig. 5.5.13), daß  $d$  für  $(P_1, Q_1)$  maximal und für  $(P_2, Q_2)$  minimal wird. Die Punktepaare  $(P_3, Q_3)$  und  $(P_4, Q_4)$  gehören zu Sattelpunkten der Funktion  $d(\cdot)$  auf  $S$ . Man kann beweisen, daß es bei einer  $C^1$ -Funktion auf einer Torusfläche notwendigerweise derartige Sattelpunkte gibt.  $\bigcirc$

## Aufgaben

1. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := x - y - z$$

auf der Schnittkurve des elliptischen Zylinders  $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$  mit der Ebene  $3x - 4z = 0$ .

2. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 8x - 6y$$

auf dem Bereich  $B$  der Fig. 5.5.14.

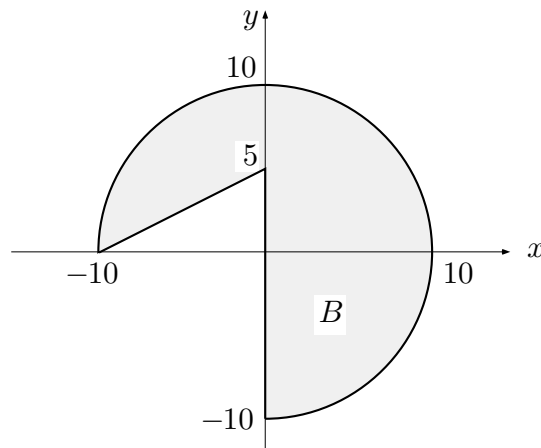


Fig. 5.5.14

3. Die **Norm** einer linearen Abbildung  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist definiert als

$$\|L\| := \max\{|L\mathbf{x}| \mid |\mathbf{x}| = 1\}.$$

Berechne die Norm der linearen Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit der Matrix

$$[L] := \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(*Hinweis:* Bestimme  $\max |L\mathbf{z}|^2$  auf der Menge der Einheitsvektoren  $\mathbf{z}$ .)

4. Man stelle eine anschauliche Skizze der Menge

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 5, \quad yz + zx + xy = 8\}$$



her und diskutierte die bezüglich  $C$  bedingt stationären Punkte der Funktion  $f(x, y, z) := xyz$ .

5. Bestimme die globalen Extremalwerte (Minimum und Maximum) der Funktion  $f(x, y) := x + 2y$  auf dem Bereich  $B := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$  sowie die Stellen, in denen diese Extremalwerte angenommen werden.
6. Bestimme den Durchmesser, das heißt: den größtmöglichen Abstand zwischen zwei Punkten des Ovals

$$B := \{(x, y) \mid 11x^4 + 5y^4 \leq 55\} .$$

(*Hinweis:* Aus Symmetriegründen geht der "Durchmesser" durch  $(0, 0)$ .)

7. Bestimme die globalen Extrema der Funktion  $f(x, y) := x^2 + y^2 + 7x - 2y$  auf dem Bereich  $B := \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 3x + y \leq 3\}$ . Figur!
8. Bestimme den Durchmesser des in der Fig. 5.5.15 dargestellten herzförmigen Bereiches  $B$  in der  $(x, y)$ -Ebene. (*Hinweis:* Geometrisch argumentieren; dann wird nur ganz wenig Rechnung benötigt.)

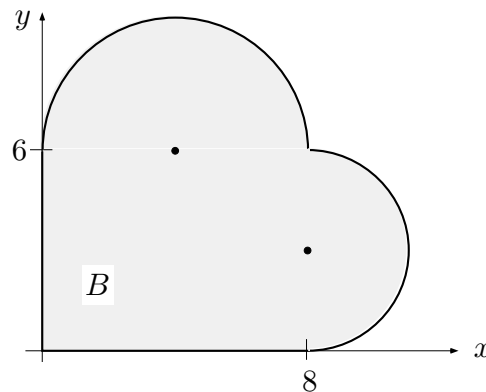


Fig. 5.5.15

9. Beweise: Für beliebige  $x, y, z \geq 0$  gilt

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \left( \frac{x + y + z}{3} \right)^3 .$$

(*Hinweis:* Dies läßt sich in eine Extremalaufgabe verwandeln: Es geht um das Minimum der Funktion  $f(x, y, z) := x^3 + y^3 + z^3$  auf Flächen  $x + y + z = a$ .)

10. Berechne die globalen Extrema der Funktion  $f(x, y, z) := x + 3z$  auf der Menge  $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^3 = x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Figur!

## \*5.6 Kurvenscharen in der Ebene

### Reguläre und singuläre Scharelemente

Eine **einparametrische Kurvenschar**  $\Gamma$  in der Ebene, im folgenden einfach eine **Kurvenschar** genannt, ist eine “kurvenwertige Funktion”

$$\Gamma : \mathbb{R} \curvearrowright \text{“Kurven in der } (x, y)\text{-Ebene”}, \quad c \mapsto \gamma_c,$$

also eine Vorschrift, die für jedes  $c$  eines geeigneten Intervalls eine Kurve  $\gamma_c$  in der  $(x, y)$ -Ebene festlegt. Dabei hat es die Meinung, daß die  $\gamma_c$  stetig von  $c$  abhängen: Ist  $c' \doteq c$ , so liegen die Kurven  $\gamma_{c'}$  und  $\gamma_c$  nahe beieinander und sehen ähnlich aus. Die Variable  $c$  heißt in diesem Zusammenhang **Scharparameter** — das hat nichts, aber auch gar nichts mit Parameterdarstellungen von einzelnen Kurven oder Flächen zu tun. Der Scharparameter  $c$  “numeriert” sozusagen die einzelnen Kurven der Schar. Liegt der Punkt  $(x_0, y_0)$  auf der Kurve  $\gamma_{c_0}$  (Fig. 5.6.1), so nennen wir das Tripel  $(x_0, y_0, c_0)$  ein **Scharelement** an der Stelle  $(x_0, y_0)$  und schreiben dafür  $(x_0, y_0, c_0) \in \Gamma$ .

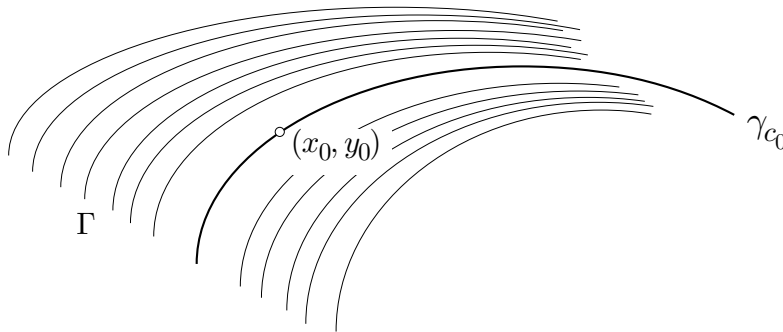


Fig. 5.6.1

Da schon eine einzelne Kurve  $\gamma$  in ganz verschiedener Weise präsentiert werden kann, kommen auch die Kurvenscharen in verschiedenen Erscheinungsformen daher. Am interessantesten ist die implizite Form

$$\Gamma : \quad F(x, y, c) = 0. \quad (1)$$

Hier ist  $F(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion von drei Variablen, und für jedes feste  $c \in \mathbb{R}$  definiert (1) “grundsätzlich” eine Kurve

$$\gamma_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, c) = 0\}.$$

Die Formen  $y = f(x, c)$ , eine Schar von Graphen, und  $F(x, y) = c$ , eine Schar von Niveaulinien, lassen sich offensichtlich unter (1) subsumieren.

① Die Schar

$$\Gamma_1 : \quad (x - c)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$$

besteht aus den Kreisen vom Radius 1 mit Zentren auf der  $x$ -Achse (siehe die Fig. 5.6.2). Durch jeden Punkt  $(x, y)$  mit  $|y| < 1$  gehen genau zwei Scharkurven, durch die Punkte  $(x, \pm 1)$  geht genau eine Scharkurve, und durch die Punkte  $(x, y)$  mit  $|y| > 1$  geht keine Kurve der Schar.

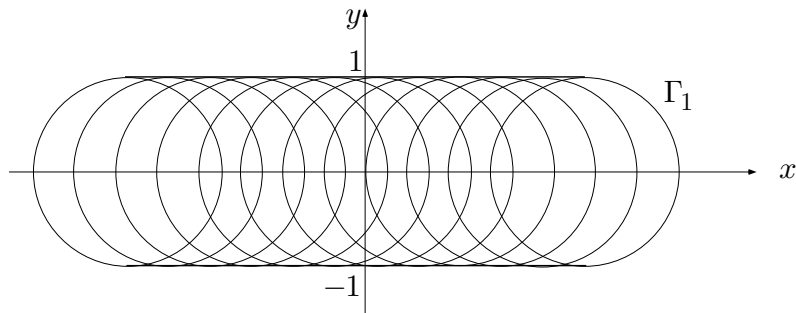


Fig. 5.6.2

Die Schar

$$\Gamma_2 : \quad y = \frac{1}{c - x} \quad (c \in \mathbb{R})$$

besteht aus Hyperbeln, und zwar hat die Hyperbel  $\gamma_c$  die  $x$ -Achse sowie die Gerade  $x = c$  als Asymptoten (Fig. 5.6.3). Die  $x$ -Achse selbst gehört nicht zur Schar.

Die Schar

$$\Gamma_3 : \quad \cos \alpha x + \sin \alpha y = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi))$$

besteht aus allen Geraden durch den Ursprung, die Schar

$$\Gamma_4 : \quad x^2 + y^2 = R \quad (R \geq 0)$$

aus den konzentrischen Kreisen um  $(0, 0)$ , die Schar

$$\Gamma_5 : \quad xy - c = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$$

aus Hyperbeln und dem Achsenpaar (Fig. 5.6.5). Siehe dazu auch die Figur 5.3.8. ○

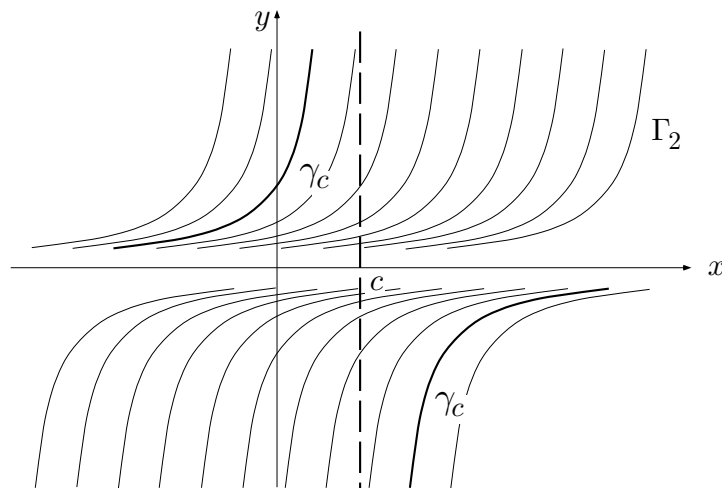


Fig. 5.6.3

Schon diese wenigen Beispiele zeigen, daß eine Kurvenschar (1) interessante “Singularitäten” aufweisen kann. Am auffallendsten sind die beiden *Enveloppen* (Hüllkurven)  $y = \pm 1$  der Schar  $\Gamma_1$ ; wir werden darauf zurückkommen.

Unter einer “Singularität” versteht man allgemein folgendes: Ein geometrisches Objekt, zum Beispiel ein Vektorfeld, eine Kurven- oder eine Flächenschar, erfülle ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  in homogener Weise. Die Flächen liegen also überall schön nebeneinander wie die Seiten eines Buches oder die Häute einer Zwiebel. Da gibt es nun immer wieder isolierte Ausnahmepunkte (oder auch gewisse “Phasengrenzen” usw.), wo die Homogenität gestört ist, und die werden dann **Singularitäten** des betrachteten Objekts genannt. Eine Achterschleife hat in ihrem Doppelpunkt, eine Schar konzentrischer Kugeln im gemeinsamen Zentrum eine Singularität. Es zeigt sich, daß die globalen Gestaltmerkmale des Gesamtobjekts auf geheimnisvolle Weise mit algebraischen Daten der auftretenden Singularitäten verknüpft sind.

Wir wollen ein Scharelement  $(x_0, y_0, c_0)$  von (1) **regulär** nennen, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$(F_x, F_y)_{(x_0, y_0, c_0)} \neq (0, 0), \quad (2)$$

$$(F_c)_{(x_0, y_0, c_0)} \neq 0. \quad (3)$$

Die erste Bedingung (2) garantiert nach Satz (5.10), daß die “Kurve”

$$\gamma_{c_0} : \quad F(x, y, c_0) = 0$$

in der Umgebung des Punktes  $(x_0, y_0)$  tatsächlich eine glatte Kurve ist.

Aus der zweiten Bedingung (3) folgt nach dem Satz über implizite Funktionen (5.9), daß (1) in der Umgebung von  $(x_0, y_0, c_0)$  nach  $c$  aufgelöst werden kann

und somit äquivalent ist mit einer Gleichung der Form

$$g(x, y) = c \quad (4)$$

für eine gewisse  $C^1$ -Funktion  $g(\cdot, \cdot)$ . Die Scharcurven  $\gamma_c$  sind also Niveaulinien dieser Funktion  $g(\cdot, \cdot)$ . Die Formel für die Ableitung einer implizit definierten Funktion liefert im vorliegenden Fall

$$\nabla g(x_0, y_0) = \left( -\frac{F_x}{F_c}, -\frac{F_y}{F_c} \right)_{(x_0, y_0, c_0)} \neq \mathbf{0},$$

somit liegen diese Niveaulinien in der Nähe von  $(x_0, y_0)$  schön nebeneinander (siehe die Bemerkung im Anschluß an Beispiel 5.3.③).

Die meisten Scharelemente sind regulär. Es gilt der folgende Satz (ohne Beweis), siehe dazu die Fig. 5.6.1:

**(5.19)** *Ist  $(x_0, y_0, c_0)$  ein reguläres Scharelement, so sieht die Schar in der unmittelbaren Umgebung von  $(x_0, y_0)$  und für  $c$  in der Nähe von  $c_0$  aus wie eine Schar von parallelen Geraden.*

① (Forts.) Für die Schar  $\Gamma_1$  ist

$$F_x = 2(x - c), \quad F_y = 2y, \quad F_c = 2(c - x).$$

Die Scharelemente  $(1, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1) \in \Gamma_1$  sind regulär (Fig. 5.6.4). Die Scharelemente  $(0, \pm 1, 0)$ , allgemein:  $(a, \pm 1, a)$ , sind singulär, da dort die Bedingung (3) verletzt ist. Die zugehörigen Punkte  $(a, \pm 1) \in \mathbb{R}^2$  formieren sich gerade zu den Enveloppen der Schar  $\Gamma_1$ .

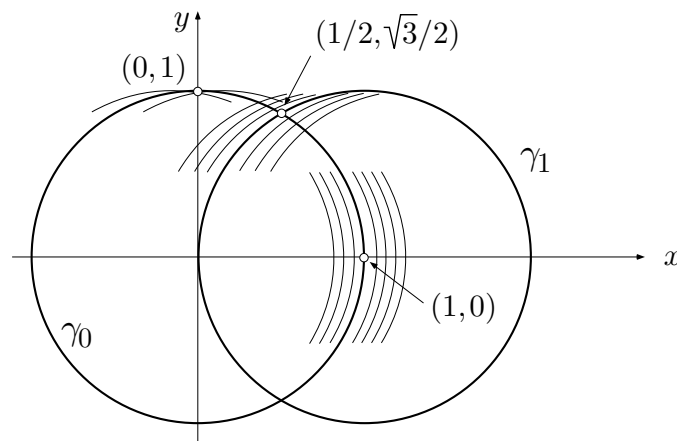


Fig. 5.6.4

Für die Schar  $\Gamma_5$  haben wir

$$F_x = y, \quad F_y = x, \quad F_c = -1.$$

Hier ist also  $(0, 0, 0)$  das einzige singuläre Scharelement. In der Tat ist der Kurvencharakter der Scharkurve  $\gamma_0$  im Ursprung defekt (Fig. 5.6.5).  $\bigcirc$

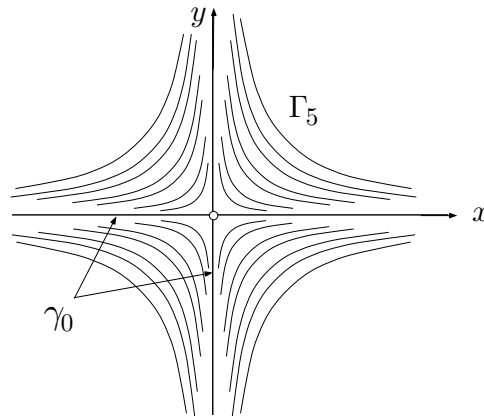


Fig. 5.6.5

## Lösungsscharen von Differentialgleichungen

Die Lösungskurven einer Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega)$$

bilden ebenfalls eine Kurvenschar, und zwar geht durch jeden Punkt von  $\Omega$  genau eine Scharkurve. Durch die Differentialgleichung wird allerdings nur die Gestalt der einzelnen Scharkurven festgelegt, nicht aber ihre "Numerierung". So kann man etwa die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$y' = y \quad (y > 0)$$

in der Form

$$\gamma_c : y = e^{x-c} \quad (c \in \mathbb{R})$$

schreiben, aber auch in der Form

$$\gamma_C : y = Ce^x \quad (C > 0).$$

Damit erhebt sich natürlich die Frage, ob sich *jede* Kurvenschar (1) durch eine Differentialgleichung repräsentieren läßt. Beim Übergang von der Schargleichung (1) zur Differentialgleichung geht, wie gesagt, die Numerierung der Scharcurven verloren, aber der effektive “geometrische Gehalt” der Kurvenschar ist in der Differentialgleichung vollumfänglich gespeichert.

Es sei  $(x_0, y_0, c_0)$  ein reguläres Scharelement der Schar (1), und zwar setzen wir ausdrücklich

$$F_y(x_0, y_0, c_0) \neq 0 \quad (5)$$

voraus. Die Scharcurve  $\gamma_{c_0}$  besitzt die Gleichung

$$\gamma_{c_0} : \quad F(x, y, c_0) = 0 .$$

Wegen (5) läßt sich diese Gleichung in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  nach  $y$  auflösen. Das heißt: Die Scharcurve  $\gamma_{c_0}$  läßt sich dort als Graph einer Funktion

$$x \mapsto y(x)$$

auffassen, und die Steigung dieses Graphen hat an der Stelle  $x_0$  (Fig. 5.6.6) den Wert

$$y' = - \frac{F_x(x_0, y_0, c_0)}{F_y(x_0, y_0, c_0)} . \quad (6)$$

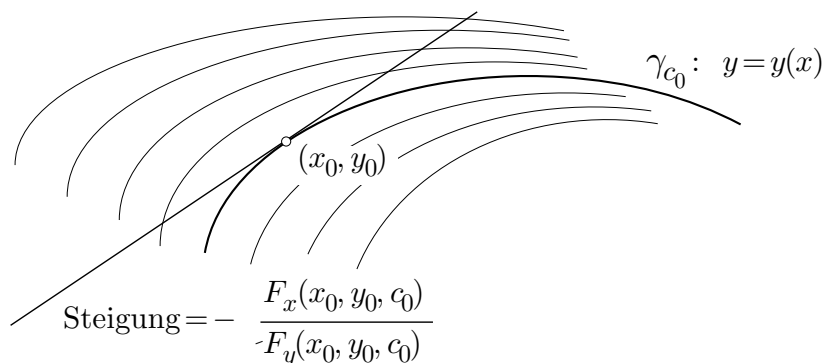


Fig. 5.6.6

Nach dieser Formel läßt sich auch für alle Punkte  $(x, y)$  in einer Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0)$  die zugehörige Steigung ausrechnen. Durch diese Punkte gehen allerdings andere Scharcurven  $\gamma_c$ , so daß wir die Variation des Scharparameters  $c$  mitberücksichtigen müssen. Dies wird durch die Bedingung (3) in befriedigender Weise ermöglicht: Die Schargleichung (1) läßt sich in der Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0, c_0)$  dazu benutzen, die “Nummer”  $c$  der durch  $(x, y)$  gehenden Scharcurve als  $C^1$ -Funktion von  $x$  und  $y$  auszudrücken:  $c = g(x, y)$ ,

siehe (4). Damit erhalten wir anstelle von (6) eine richtiggehende Differentialgleichung

$$y' = -\frac{F_x(x, y, g(x, y))}{F_y(x, y, g(x, y))} \quad (=: f(x, y)),$$

die für jeden Punkt  $(x, y)$  eines gewissen Gebietes  $\Omega$  die Steigung der durch  $(x, y)$  gehenden Scharcurve angibt.

Diese grundsätzlichen Überlegungen lassen sich zu dem folgenden Rezept verdichten:

Um die Differentialgleichung einer Kurvenschar (1) zu erhalten, differenziere man die Schargleichung

$$F(x, y, c) = 0 \quad (1)$$

“total” nach  $x$ :

$$F_x(x, y, c) + F_y(x, y, c) y' = 0, \quad (7)$$

und eliminiere den Scharparameter  $c$  aus (1) und (7).

① (Forts.) Wir führen dieses Programm durch für die Schar

$$\Gamma_1: \quad (x - c)^2 + y^2 - 1 = 0.$$

“Totale” Differentiation nach  $x$  liefert

$$2(x - c) + 2y y' = 0.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen läßt sich  $x - c$  eliminieren. Es ergibt sich

$$y^2 y'^2 + y^2 - 1 = 0,$$

was bereits als Differentialgleichung der Schar  $\Gamma_1$  angesprochen werden kann. Auflösung nach  $y'$  liefert

$$y' = \pm \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} \quad (0 < |y| \leq 1),$$

wobei sich natürlich bemerkbar macht, daß durch jeden Punkt  $(x, y)$  mit  $|y| < 1$  zwei Scharcurven gehen. Wir stellen übrigens fest, daß die Enveloppen  $y \equiv \pm 1$  ebenfalls Lösungen dieser Differentialgleichung sind.

Für die Schar

$$\Gamma_5: \quad xy - c = 0$$

erhält man durch “totale” Differentiation sofort

$$y + xy' = 0,$$

und die nachträgliche Elimination von  $c$  entfällt. Die gesuchte Differentialgleichung lautet also

$$y' = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

○



## Orthogonaltrajektorien

Es sei  $\Gamma$  eine Kurvenschar, die ein Gebiet  $\Omega$  der  $(x, y)$ -Ebene **schlicht** überdeckt, das heißt: Durch jeden Punkt  $(x, y) \in \Omega$  geht genau eine Scharkurve  $\gamma$ . Eine **Orthogonaltrajektorie** dieser Schar ist eine Kurve  $\sigma$  in  $\Omega$ , die in allen ihren Punkten die Scharkurve durch den betreffenden Punkt senkrecht schneidet (Fig. 5.6.7).

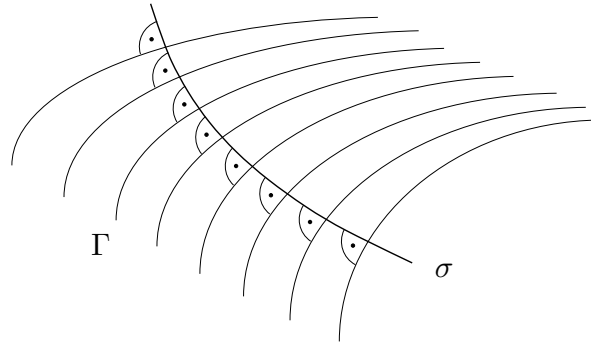


Fig. 5.6.7

In Wirklichkeit gibt es eine ganze Schar  $\Gamma^\perp$  von Orthogonaltrajektorien, und die beiden Scharen  $\Gamma$  und  $\Gamma^\perp$  überziehen zusammen das Gebiet  $\Omega$  wie ein Koordinatennetz die Ebene (Fig. 5.6.8). — Wie läßt sich die Schar  $\Gamma^\perp$  bestimmen?

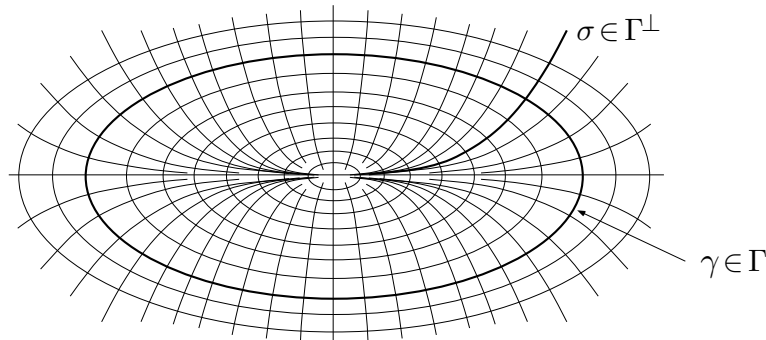


Fig. 5.6.8

Wir dürfen schon annehmen, daß  $\Gamma$  durch eine Differentialgleichung festgelegt ist:

$$y' = f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

wobei wir die Punkte  $(x, y)$ , in denen die Scharkurve eine vertikale oder eine horizontale Tangente besitzt, außer acht lassen. Wir wenden nun analytische Geometrie an (Fig. 5.6.9): Hat die Scharkurve  $\gamma \in \Gamma$  im Punkt  $(x, y)$

die Steigung  $f(x, y)$ , so hat die durch diesen Punkt gehende Orthogonaltrajektorie  $\sigma$  dort notwendigerweise die Steigung  $-\frac{1}{f(x, y)}$ . Hieraus folgt: Die Orthogonaltrajektorien der Schar  $\Gamma$  genügen der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

Durch allgemeine Integration dieser Differentialgleichung erhält man die gesuchte Schar  $\Gamma^\perp$  in der Form

$$\Gamma^\perp : \quad G(x, y, C) = 0$$

mit einem neuen Scharparameter  $C$ .

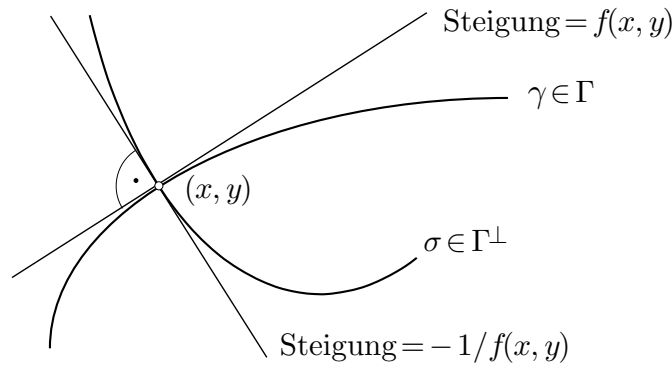


Fig. 5.6.9

② Wir bestimmen die Orthogonaltrajektorien zur Schar

$$\Gamma : \quad y = ce^x \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (8)$$

(Fig. 5.6.10). Die Differentialgleichung dieser Schar lautet bekanntlich:  $y' = y$ , so daß wir als Differentialgleichung von  $\Gamma^\perp$  folgendes erhalten:

$$y' = -\frac{1}{y}.$$

Hieraus folgt nacheinander  $2yy' = -2$ ,  $y^2 = -2x + C$ . Die Orthogonaltrajektorien der Exponentialkurven (8) sind also die Parabeln

$$x = \frac{1}{2}(C - y^2).$$

○

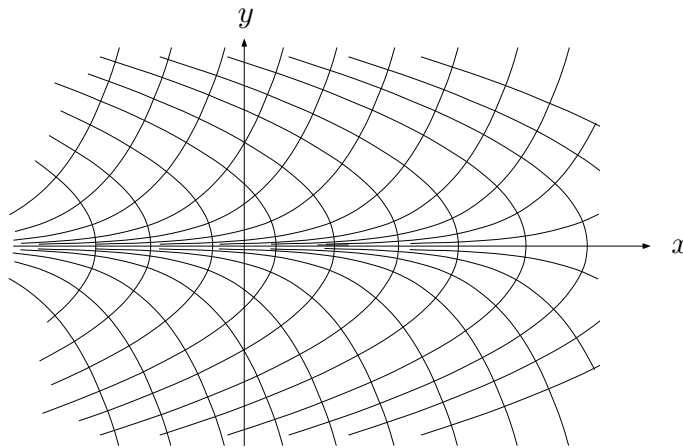


Fig. 5.6.10

③ Es sei

$$\Gamma : \quad x^2 + (y - c)^2 = c^2 \quad (9)$$

die Schar der Kreise, die die  $x$ -Achse im Ursprung berühren. Um die zugehörige Orthogonalschar  $\Gamma^\perp$  bestimmen zu können, benötigen wir erst die Differentialgleichung der Schar  $\Gamma$ . Wir differenzieren also (9) “total” nach  $x$  und erhalten

$$2x + 2(y - c)y' = 0 .$$

Hieraus folgt  $c = x/y' + y$ . Setzen wir das in (9) ein, so ergibt sich ( $c^2$  hebt sich heraus):

$$x^2 + y^2 - 2y\left(\frac{x}{y'} + y\right) = 0$$

und somit

$$-\frac{2xy}{y'} = y^2 - x^2 .$$

Dies ist im wesentlichen die Differentialgleichung der Schar  $\Gamma$ . Ersetzen wir hier rein formal  $y'$  durch  $-1/y'$ , so erhalten wir automatisch die Differentialgleichung der Schar  $\Gamma^\perp$ ; sie lautet:

$$2xyy' = y^2 - x^2 . \quad (10)$$

Es liegt nahe, die neue unbekannte Funktion

$$u := y^2 \quad (11)$$

einzuführen. Dann ist  $u' = 2yy'$ , und (10) geht über in die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$xu' = u - x^2 . \quad (12)$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$u' = \frac{u}{x}$$

ist vom Eulerschen Typ und hat die allgemeine Lösung  $u(x) = Cx$ . Für die Lösungen von (12) machen wir daher den Ansatz (“Variation der Konstanten”):

$$u = C(x)x \tag{13}$$

und erhalten für die neue unbekannte Funktion  $C(\cdot)$  die Differentialgleichung

$$x(C'x + C) = Cx - x^2 .$$

Hieraus folgt  $C' \equiv -1$  und weiter

$$C(x) = -x + 2\tilde{C}$$

mit einer neuen Integrationskonstanten  $\tilde{C}$ . Wir erhalten daher mit (11) und (13):

$$y^2 = u(x) = -x^2 + 2\tilde{C}x .$$

Dies ist äquivalent mit

$$y^2 + (x - \tilde{C})^2 = \tilde{C}^2 ;$$

die gesuchten Orthogonaltrajektorien sind also Kreise, die die  $y$ -Achse im Ursprung berühren (Fig. 5.6.11).

A posteriori ist natürlich klar, daß sich die beiden Arten von Kreisen in allen Punkten rechtwinklig schneiden, wenn sie das im Ursprung tun.  $\bigcirc$

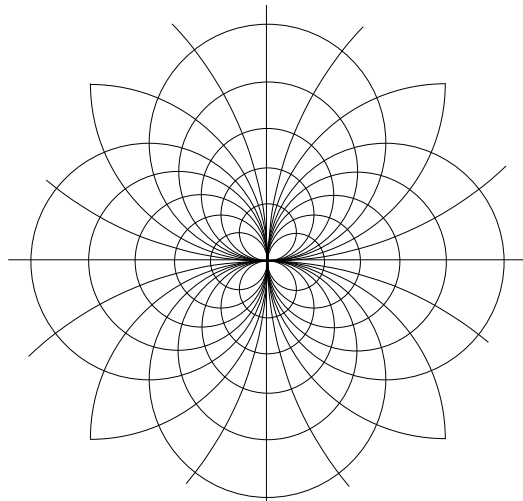


Fig. 5.6.11

## Enveloppen

Zum Dessert wenden wir uns den Scharelementen zu, bei denen die Bedingung (3), nicht aber die Bedingung (2) verletzt ist; wir wollen sie **singuläre Scharelemente 2. Art** nennen. Diese Scharelemente  $(x, y, c)$  genügen simultan den beiden Gleichungen

$$F(x, y, c) = 0, \quad (1)$$

$$F_c(x, y, c) = 0. \quad (14)$$

Wenn wir etwas sehen wollen, so müssen wir die Punkte  $(x, y)$  herauspräparieren, die einem derartigen Scharelement angehören.

Es sei also  $(x_0, y_0, c_0)$  ein singuläres Scharelement 2. Art, wobei wir annehmen wollen, es sei

$$F_{cc}(x_0, y_0, c_0) \neq 0.$$

Dann läßt sich die Gleichung (14) in einer Umgebung von  $(x_0, y_0, c_0)$  nach  $c$  auflösen. Das heißt: Es gibt eine  $C^1$ -Funktion  $\psi(\cdot, \cdot)$  der Variablen  $x$  und  $y$ , so daß (14) in dieser Umgebung äquivalent ist mit

$$c = \psi(x, y); \quad (15)$$

dabei ist natürlich  $\psi(x_0, y_0) = c_0$ . Setzen wir (15) in (1) ein, so resultiert die Gleichung

$$(f(x, y) :=) \quad F(x, y, \psi(x, y)) = 0, \quad (16)$$

und man überlegt sich leicht, daß  $(1) \wedge (14)$  in der Umgebung von  $(x_0, y_0, c_0)$  äquivalent ist mit  $(15) \wedge (16)$ .

Die Punkte  $(x, y)$  in der Nähe von  $(x_0, y_0)$ , die einem singulären Scharelement 2. Art angehören, genügen somit notwendigerweise der Gleichung (16). Dies ist aber die Gleichung einer glatten Kurve  $\varepsilon$  durch den Punkt  $(x_0, y_0)$ . Um das nachzuweisen, müssen wir nach Satz (5.10) den Gradienten  $\nabla f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  betrachten. Wir haben nach der Kettenregel

$$\nabla f = (F_x + F_c \cdot \psi_x, F_y + F_c \cdot \psi_y).$$

An der Stelle  $(x_0, y_0, \psi(x_0, y_0))$  ist  $F_c = 0$ , somit ergibt sich (Fig. 5.6.12):

$$\nabla f(x_0, y_0) = (F_x(x_0, y_0, c_0), F_y(x_0, y_0, c_0)) \neq \mathbf{0}.$$

Damit haben wir nicht nur bewiesen, daß  $\varepsilon$  eine glatte Kurve ist, sondern zusätzlich, daß  $\varepsilon$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  dieselbe Tangente hat wie die durch diesen Punkt gehende Scharkurve

$$\gamma_{c_0} : \quad F(x, y, c_0) = 0.$$

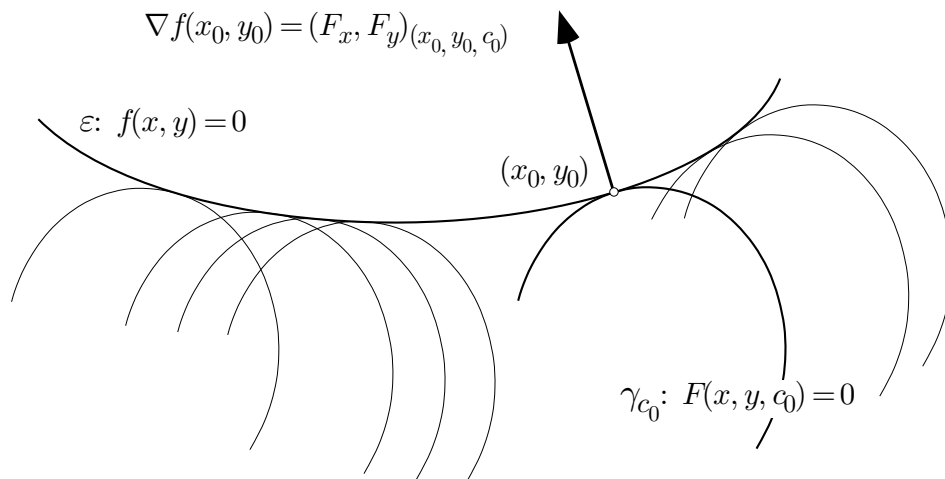


Fig. 5.6.12

Man nennt  $\varepsilon$  eine **Enveloppe** oder **Hüllkurve** der Schar  $\Gamma$ . Die Enveloppe berührt (nicht nur im Punkt  $(x_0, y_0)$ , sondern) in allen ihren Punkten eine Scharkurve und trennt “im allgemeinen” den von den Scharkurven bedeckten vom unbedeckten Teil der Ebene (vgl. die Schar  $\Gamma_1$  in Beispiel ①).

Besitzt eine Schar  $\Gamma$  überhaupt eine Enveloppe, so ergibt sich die Enveloppe durch Elimination des Scharparameters  $c$  aus den Gleichungen (1) und (14). Man kann diese Gleichungen auch nach  $x$  und  $y$  auflösen und erhält dann eine Parameterdarstellung der Enveloppe mit  $c$  als Parameter.

① (Forts.) Für die Schar  $\Gamma_1$  ist

$$F(x, y, c) := (x - c)^2 + y^2 - 1$$

und

$$F_c(x, y, c) = 2(c - x) .$$

Eliminiert man  $c$  aus  $F_c = 0$  und  $F = 0$ , so ergibt sich  $y^2 = 1$ , das heißt:  $y \equiv \pm 1$ , in Übereinstimmung mit dem Augenschein.  $\bigcirc$

④ Die Mündungsgeschwindigkeit eines Geschützes betrage  $v_0$ . Man soll den von  $(0, 0, 0)$  aus bestrichenen Raumbereich ermitteln.

Es genügt, die  $(\rho, z)$ -Meridian-Halbebene zu betrachten. Bezeichnen wir die einstellbare Elevation des Rohres mit  $\alpha$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , so ist die zugehörige Flugbahn eines Geschosses gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \rho &= v_0 \cos \alpha \cdot t \\ z &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned} \right\} \quad (t \geq 0) ,$$

unter  $g$  die Erdbeschleunigung verstanden (Fig. 5.6.13). Hieraus eliminieren wir zunächst  $t$  und erhalten folgende Gleichung dieser Flugbahn:

$$z = \tan \alpha \cdot \rho - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \rho^2 .$$

Wir setzen noch  $\tan \alpha =: c$ ; dann erscheint die Schar  $\Gamma$  aller Flugbahnen in der folgenden Gestalt:

$$\Gamma : \quad z = c\rho - \frac{g}{2v_0^2}(1 + c^2)\rho^2 \quad (c \in \mathbb{R}) . \quad (17)$$

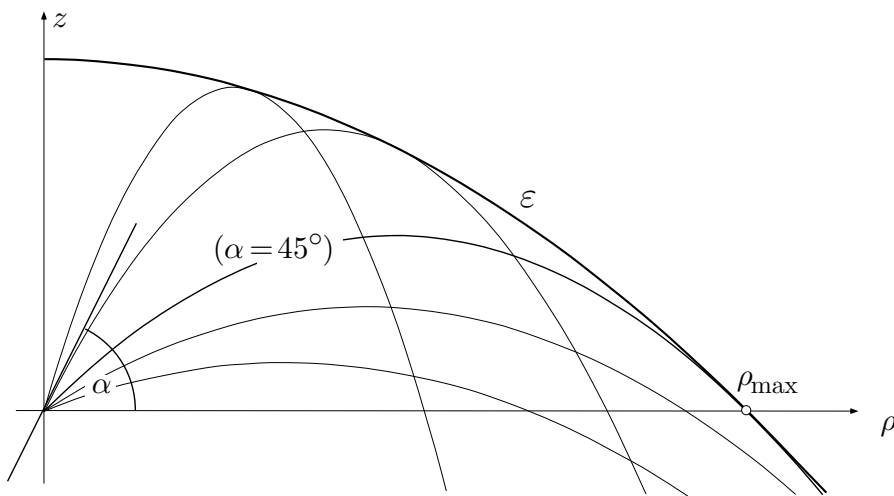


Fig. 5.6.13

Der von dem Geschütz bestrichene Teil der Halbebene wird von dem unerreichbaren Teil getrennt durch die Enveloppe  $\varepsilon$  dieser Kurvenschar. Um  $\varepsilon$  zu bestimmen, haben wir die Schargleichung (17) partiell nach  $c$  abzuleiten:

$$0 = \rho - \frac{g}{2v_0^2} \cdot 2c \cdot \rho^2 , \quad (18)$$

und  $c$  aus den Gleichungen (17)  $\wedge$  (18) zu eliminieren. Aus (18) folgt  $c = \frac{v_0^2}{g\rho}$ . Setzen wir dies in (17) ein, so ergibt sich

$$z = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g}{2v_0^2} \left( 1 + \frac{v_0^4}{g^2 \rho^2} \right) \rho^2 ;$$

die gesuchte Enveloppe hat also die Gleichung

$$\varepsilon : \quad z = z(\rho) := \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} \rho^2$$

und ist ebenfalls eine Parabel.

Indem man die Enveloppe mit der Achse  $z = 0$  schneidet, erhält man die maximale horizontale Schußweite

$$\rho_{\max} = \frac{v_0^2}{g};$$

sie wird übrigens mit der Rohrelevation  $\alpha := 45^\circ$  erreicht. Um das einzusehen, genügt es, die Steigung der Enveloppe im Schnittpunkt mit der  $\rho$ -Achse zu berechnen. Man findet  $z'(\rho_{\max}) = -1$ .  $\circ$

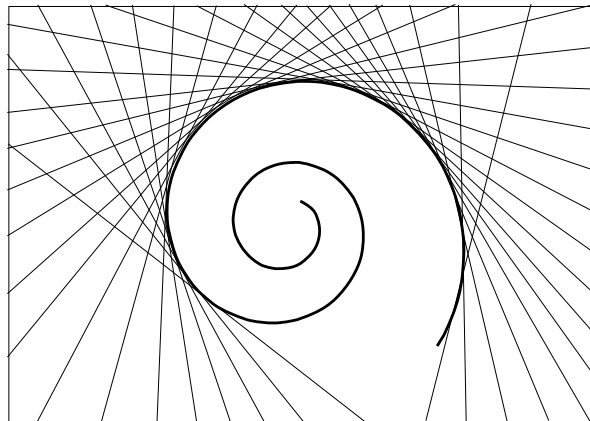


Fig. 5.6.14

## Geradenscharen

*Bsp:* Die Tangenten an eine gegebene krumme Kurve  $\varepsilon$  bilden eine Geradenschar, und  $\varepsilon$  ist die Enveloppe dieser Schar (Fig. 5.6.14).

Wir betrachten eine allgemeine Geradenschar

$$\Gamma = (g_m)_{m \in I},$$

wobei wir allerdings von vorneherein die (unterschiedliche) Steigung  $m$  der Geraden als Scharparameter wählen. Der  $y$ -Achsenabschnitt  $q$  von  $g_m$  (siehe



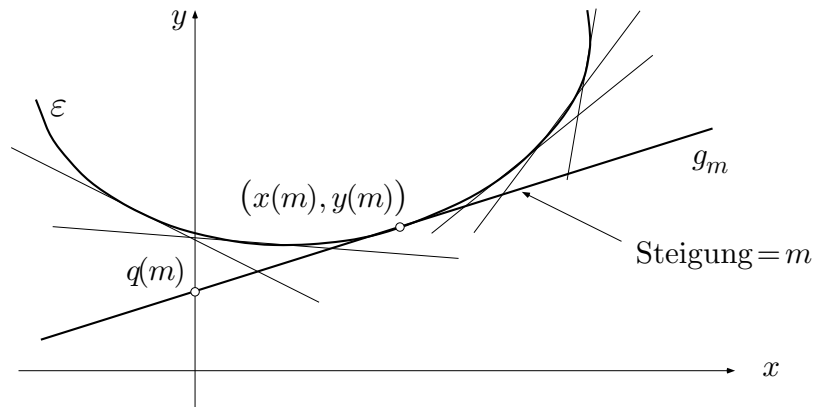


Fig. 5.6.15

die Fig. 5.6.15) hängt in bestimmter Weise von  $m$  ab; somit sieht dann die Schargleichung folgendermaßen aus:

$$\Gamma : \quad y = mx + q(m) \quad (m \in I), \quad (19)$$

dabei ist  $q(\cdot)$  eine gegebene Funktion.

Um die Enveloppe  $\varepsilon$  dieser Schar zu bestimmen, differenzieren wir (19) partiell nach  $m$  und erhalten die weitere Gleichung

$$0 = x + q'(m). \quad (20)$$

Aus (19)^(20) läßt sich unter Umständen die Variable  $m$  eliminieren. Man kann aber auch (19)^(20) nach  $x$  und  $y$  auflösen und erhält dann folgende Parameterdarstellung der Enveloppe:

$$\varepsilon : \quad m \mapsto \begin{cases} x(m) = -q'(m) \\ y(m) = q(m) - mq'(m) \end{cases} \quad (m \in I). \quad (21)$$

Diese Darstellung liefert für jedes  $m \in I$  einen Enveloppenpunkt (Fig. 5.6.15), und zwar den Punkt  $(x(m), y(m))$ , in dem die Schargerade  $g_m$  die Enveloppe berührt.

Wir leiten noch die Differentialgleichung der Geradenschar (19) her. Differenzieren wir (19) "total" nach  $x$ , so ergibt sich

$$y' = m; \quad (22)$$

und indem wir  $m$  aus (19) und (22) eliminieren, erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$y = y'x + q(y'). \quad (23)$$

Eine allgemeine Geradenschar (19) läßt sich also charakterisieren durch eine sogenannte **Clairautsche Differentialgleichung** (23). Zahlreiche geometrische Probleme, in denen Tangenten eine Rolle spielen, führen auf eine Differentialgleichung von diesem Typ.

Die Lösungen einer gegebenen Clairautschen Differentialgleichung (23) sind zunächst einmal die Geraden (19). Die Enveloppe (21) dieser Geradenschar ist aber *auch* eine Lösung von (23), da die Enveloppe in allen ihren Punkten dieselbe Steigung hat wie die Schargerade durch den betreffenden Punkt. Man nennt  $\varepsilon$  eine **singuläre Lösung** der Differentialgleichung (23). In vielen Fällen ist es die einzig wirklich interessierende Lösung.

Merke: “Singuläre Lösungen” von Differentialgleichungen werden durch einen Ansatz für die “allgemeine Lösung” in der Regel nicht zum Vorschein gebracht, sondern sind zusätzlich herauszupräparieren.

⑤ Durch Separation der Variablen erhält man als “allgemeine Lösung” der Differentialgleichung  $y' = y^2$  die Funktionenschar

$$y = \frac{1}{c - x} \quad (c \in \mathbb{R}) .$$

Zusätzlich gibt es noch die “singuläre Lösung”  $y(x) \equiv 0$ . ○

⑥ Gesucht sind die Kurven, deren Tangenten Achsenabschnitte der Quadratsumme 1 besitzen.

Es seien  $\gamma$  eine derartige Kurve,  $(x_0, y_0)$  ein Punkt von  $\gamma$  und

$$\mathcal{T}_0 : \quad y = y_0 + m(x - x_0)$$

die Tangente an  $\gamma$  in diesem Punkt.  $\mathcal{T}_0$  besitzt die Achsenabschnitte

$$p = -\frac{1}{m}(y_0 - mx_0), \quad q = y_0 - mx_0$$

(Fig. 5.6.16); die Größen  $x_0, y_0, m$  sind daher aufgrund der Aufgabenstellung untereinander verknüpft durch die Bedingung

$$(p^2 + q^2 =) \quad \left( \frac{1}{m^2} + 1 \right) (y_0 - mx_0)^2 = 1 ,$$

und hieraus folgt

$$y_0 = mx_0 \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} . \quad (24)$$

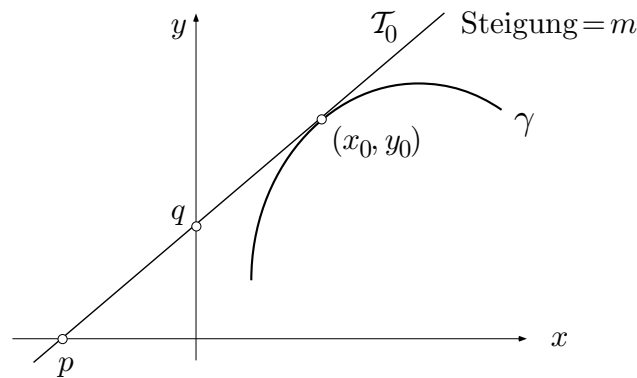


Fig. 5.6.16

Nun war ja  $(x_0, y_0)$  ein beliebiger Punkt von  $\gamma$  und  $m$  die Steigung von  $\gamma$  im Punkt  $(x_0, y_0)$ . Unterdrücken wir daher in (24) den Index '0' und schreiben wir  $y'$  anstelle von  $m$ , so erhalten wir für  $\gamma$  die Clairautsche Differentialgleichung

$$y = y' x \pm \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind zunächst einmal die Geraden

$$g_m : y = mx \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad (m \in \mathbb{R}),$$

deren Achsenabschnitte die Quadratsumme 1 besitzen. Diese Geraden sind ihre eigenen Tangenten und erfüllen damit trivialerweise die Bedingungen der Aufgabe.

Die Geradenschar besitzt aber noch eine Enveloppe  $\varepsilon$ . In unserem Beispiel ist

$$q(m) = \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

und folglich

$$q'(m) = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} - \frac{m \cdot 2m}{2(m^2 + 1)^{3/2}} \right) = \pm \frac{1}{(m^2 + 1)^{3/2}}.$$

Aufgrund von (21) ergibt sich daher folgende Parameterdarstellung der Enveloppe:

$$\varepsilon : m \mapsto \begin{cases} x(m) = \mp \frac{1}{(m^2 + 1)^{3/2}} \\ y(m) = \pm \frac{m^3}{(m^2 + 1)^{3/2}} \end{cases}.$$

Wir eliminieren den Parameter  $m$ , indem wir den Ausdruck

$$|x(m)|^{2/3} + |y(m)|^{2/3} = \frac{1}{m^2 + 1} + \frac{m^2}{m^2 + 1} = 1$$

betrachten. Die Punkte von  $\varepsilon$  genügen somit der Gleichung

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1 .$$

Die Enveloppe, es handelt sich um eine sogenannte **Astroide** (Fig. 5.6.17), besitzt vier charakteristische Spitzen.  $\bigcirc$

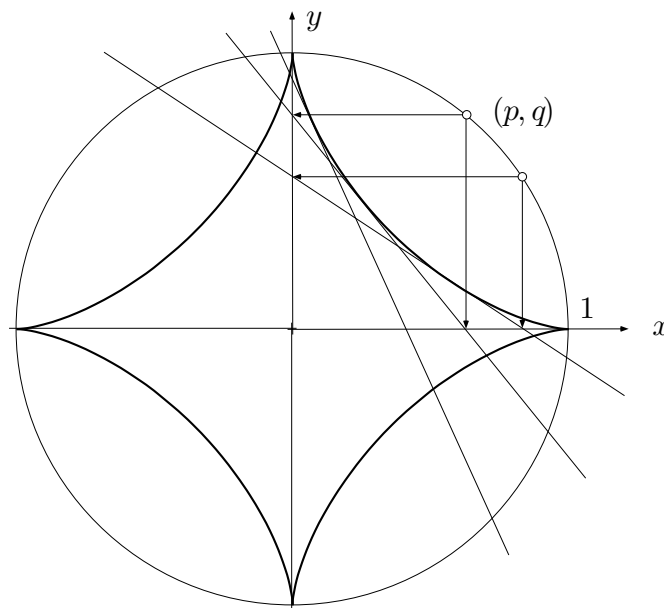


Fig. 5.6.17

## Aufgaben

1. Charakterisiere die Schar der Ellipsen mit den Brennpunkten  $(\pm 1, 0)$  durch ihre Differentialgleichung und bestimme die Orthogonaltrajektorien dieser Ellipsenschar. Beschreibe das Ergebnis in Worten.
2. Bestimme die **Falllinien**, das sind die Kurven steilsten Anstiegs gegenüber Horizontalebene  $z = \text{const.}$ , auf der Fläche

$$z = x^2 + xy + y^2 .$$

3. Auf den halbkreisförmigen Spiegel (Rand einer Teetasse!)

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \geq 0$$

fällt von links her parallel zur  $x$ -Achse Licht ein. Bestimme die Schargleichung sowie die Enveloppe der reflektierten Strahlen. Stelle eine sorgfältige Figur her. Die Enveloppe hat ihrerseits eine Singularität.

4. Bestimme die Enveloppen der folgenden Kurvenscharen und zeichne jedesmal eine Figur!

(a)  $\cos \alpha x + \sin \alpha y = 3 \quad (\alpha : \text{Scharparameter}),$

(b)  $y = Cx + C^2,$

(c)  $(x - C)^2 - y^3 = 0.$  Was geht hier schief?

5. Bestimme die Menge der Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , die von keiner Ellipse

$$E_{a,b} := \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

mit Flächeninhalt  $\pi$  überdeckt werden können.

6. Die Kurve  $\gamma$  in Fig. 5.6.18 besitzt die Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) := \cos t + t \sin t \\ y(t) := \sin t - t \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

- (a) Bestimme die Schargleichung der Kurvennormalen von  $\gamma$ . (*Hinweis:* Scharparameter ist  $t$ !)
- (b) Bestimme die Enveloppe dieser Normalenschar und beschreibe das Resultat in Worten.

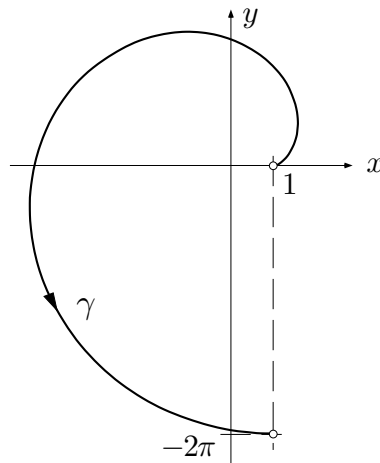


Fig. 5.6.18