Eine Maximumaufgabe

Christian Blatter, ETHZ, christian.blatter@math.ethz.ch

1. Einleitung

Im Sommer 2017 ist in einem Mathematikforum [2] die folgende Aufgabe über den Bildschirm gegangen: Wir sollen einem gegebenen Dreieck T ein möglichst grosses gleichseitiges Dreieck $\triangle$ einbeschreiben. Der Einsender hat auf die Arbeit [1] verwiesen, wo anstelle eines Dreiecks T ein beliebiges konvexes n-Eck ($n \gg 1$) gegeben ist. Er schlug vor, den Fall $n = 3$ "elementargeometrisch" zu behandeln, das heisst: ohne den in [1] dargestellten $O(n^3)$-Algorithmus anzuwerfen. Keine der in dem Forum vorgeschlagenen Lösungen vermochte allerdings recht zu befriedigen, und so müssen sich nun die Leser des VSMP-Bulletins mit dem Problem herumschlagen.

Mit $\triangle$ ist im folgenden immer ein gleichseitiges Dreieck gemeint, und *"einbeschreiben"* bedeutet nur $\triangle \subset T$. Im Grunde genommen sind das unendlich viele Maximumaufgaben, denn die möglichen Gestalten von T bilden eine zweiparametrige Familie Ω. Wir müssen daher von vorneherein damit rechnen, dass sich das maximale $\triangle \subset T$ nicht nur "zahlenmässig" mit den Winkeln von T verändert, sondern dass die Extremalsituation für verschiedene T ganz verschieden aussehen kann. Und bei der Wahl von $\triangle$ haben wir vier Freiheitsgrade: Wir können $\triangle$ beliebig verschieben, drehen und skalieren. Jedenfalls ist der sich ergebende Suchraum X ein komplexes geometrisches Gebilde, das wir nicht mit einem Blick global erfassen können wie ein Intervall $[a, b]$ oder eine Kreislinie.

2. Maximalaufgaben – allgemein

Nur bei den wenigsten Maximalaufgaben können wir den Maximalpunkt ξ erraten oder "herausarbeiten" und dann direkt beweisen, dass $f(\xi) \geq f(x)$ gilt für alle zulässigen x. Das ist zum Beispiel der Fall bei quadratischen Polynomen, wo quadratische Ergänzung weiter hilft, oder bei $f(x) := 3\cos x + 4\sin x$, wo trigonometrische Umformung eine Darstellung der Form $f(x) = A\cos(x - \alpha)$ liefert, an der sich das Maximum ohne Weiteres ablesen lässt.

Die allermeisten Maximumaufgaben werden mit Hilfe eines *Ausschlussverfahrens* gelöst. Vorweg überzeugt man sich (oder nimmt als selbstverständlich an), dass ein Maximalpunkt ξ tatsächlich existiert. Im Fall unseres Dreiecksproblems wird man darauf hinweisen, dass der Suchraum X bei gegebenem T kompakt und die Zielfunktion stetig ist. Im zweiten Schritt werden einfache Kriterien identifiziert, mit deren Hilfe die allermeisten Punkte $\xi \in X$ als Maximalpunkte ausgeschlossen werden können. Es bleibt bleibt eine (hoffentlich endliche) *Kandidatenliste* übrig. Welche Kandidatenpunkte dann tatsächlich globale Maximalpunkte sind, wird durch einen Wertvergleich unter den Kandidaten ermittelt. Zwei Beispiele:

• Gegeben ist eine Kreisscheibe B. Man bestimme ein einbeschriebenes Dreieck T von maximalem Flächeninhalt. – Dreiecke mit zwei verschieden langen Seiten sind nicht maximal, denn es gibt gleichschenklige Dreiecke mit grösserer Fläche. Die maximalen Dreiecke sind somit die gleichseitigen Dreiecke mit Umkreis ∂B. (Es ist übrigens gar nicht so einfach, elementargeometrisch zu beweisen, dass so ein gleichseitiges Dreieck tatsächlich grösseren Flächeninhalt hat als irgend ein anderes Dreieck $T \subset B$.)

• Es soll das Maximum der differenzierbaren Funktion $x \mapsto f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ bestimmt werden. – Innere Punkte $\xi \in [a, b]$, in denen $f'(\xi) \neq 0$ ist, kommen als Maximalpunkte nicht in Frage, denn $x \mapsto f(x) - f(\xi)$ nimmt unmittelbar links oder rechts von so einem Punkt ξ positive Werte an. Die Kandidatenliste besteht daher aus den Punkten a und b sowie den $r \geq 0$ Nullstellen ξ_k der Ableitung f' in (a, b), und man hat

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(\xi_1), \ldots, f(\xi_r)\} .$$

3. Das Ausschlusskriterium

Nun zu unserem eigentlichen Problem. Ein gleichseitiges Dreieck $\triangle \subset T$ ist bestimmt nicht maximal, wenn $\triangle$ nicht irgendwie "am Anschlag" ist. Liegen zum Beispiel zwei Ecken von $\triangle$ im Inneren von T, so lässt sich $\triangle$ ohne Weiteres vergrössern. Diese Vorstellung gilt es nun in ein allgemeines Prinzip zu verwandeln. Sind V_i die Ecken von $\triangle$ und a_j die Seiten von T, so nennen wir jede Inzidenz $V_i \in a_j$ einen *Anschlag* von $\triangle$. Fällt eine Ecke V_i von $\triangle$ mit einer Ecke von T zusammen, so ergibt das zwei Anschläge. Für unser Problem ist nun das Folgende entscheidend:

Lemma 1. Ist $\triangle \subset T$ maximal, so besitzt $\triangle$ mindestens vier Anschläge.

Beweis. Gleichseitige $\triangle \subset T$ mit ≤ 2 Anschlägen zu vergrössern dürfen wir dem Leser überlassen. Besitzt $\triangle$ genau drei Anschläge, so sind folgende Fälle möglich:

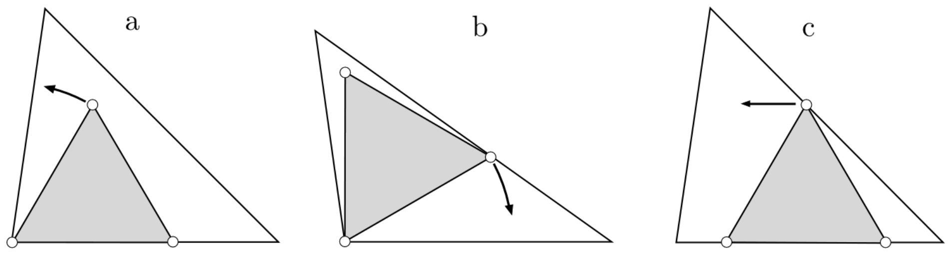

Fig. 1

- Die Ecke V_1 von $\triangle$ fällt mit der Ecke A_1 von T zusammen, V_2 liegt auf einer Seite von T und V_3 im Inneren von T (Fig. 1, a–b). Dann lässt sich $\triangle$ ein wenig um die Ecke $V_1 = A_1$ drehen, so dass beide Ecken V_2, V_3 ins Innere von T zu liegen kommen.
- Die Ecken V_1 und V_2 von $\triangle$ liegen auf derselben Seite von T und V_3 auf einer anderen Seite von T (Fig. 1, c). Dann lässt sich $\triangle$ parallel zu der betreffenden Seite verschieben, womit V_3 befreit wird.
- Nun die *pièce de résistance*: Die drei Ecken V_i von $\triangle$ liegen auf den drei Seiten a_i von T. Hier kommt uns die bekannte Papierstreifenkonstruktion der Ellipse zu Hilfe: Gleiten V_1 und V_2 auf den Seiten a_1 und a_2 von T mit konstantem Abstand $|V_1V_2| =: \ell$, so beschreibt V_3 einen Ellipsenbogen, der die Seite a_3 transversal schneidet oder von innen berührt (Fig. 2). Es ist also möglich, die Ecke V_3 durch eine zulässige Bewegung von $\triangle$ zu befreien. – Den rechnerischen Beweis, dass in der Fig. 2 tatsächlich eine Ellipse erscheint, holen wir in Abschnitt 5 nach. $\square$

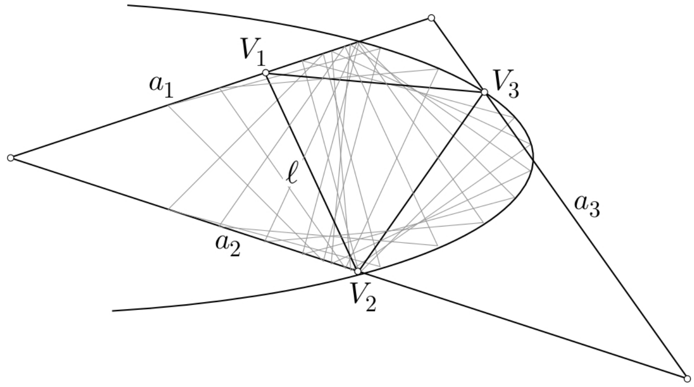

Fig. 2

Lemma 1 impliziert, dass mindestens eine Ecke V_i des maximalen $\triangle$ zwei Anschläge beiträgt, das heisst: mit einer Ecke A_j von T zusammenfällt. Der zugehörige Winkel α_j muss $\geq 60^\circ$ sein. Besitzt T nur *einen* Winkel $\geq 60^\circ$, so sind dann *beide* anderen Ecken V_2, V_3 von $\triangle$ auf je einer Seite von T angeschlagen. Besitzt T zwei Winkel $\geq 60^\circ$, so können zwei Ecken von $\triangle$ in Ecken von T liegen, womit ebenfalls vier Anschläge zustandekommen. Dieser Fall ist etwas komplizierter, und es gibt auch eine Überraschung!

4. Die Kandidaten

Von jetzt an bezeichnen wir die Ecken, Seiten und Winkel von T wie üblich mit A, B, C, undsoweiter. Dabei nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$ an. Nach dem eben Gesagten müssen wir dann die Fälle $\beta < 60^\circ$ und $\beta \geq 60^\circ$ unterscheiden.

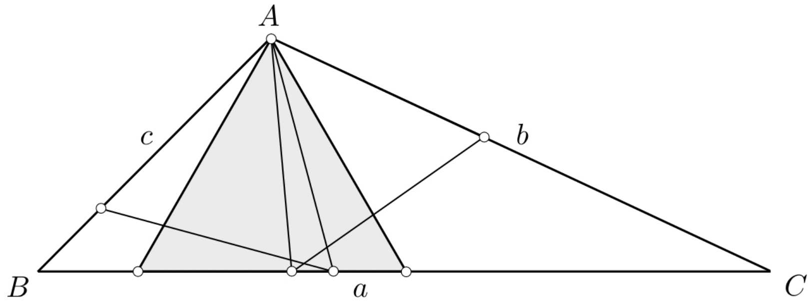

Fig. 3

Ist $\gamma \leq \beta < 60^\circ$, so muss $\alpha > 60^\circ$ sein. Damit ist $V_1 = A$, aber V_2 und V_3 können nicht gleichzeitig auf b und auf c liegen. Vier Anschläge sind damit noch auf die drei Weisen möglich, die in der Fig. 3 zu sehen sind, und es ist klar, dass V_2, $V_3 \in a$ das grösste $\triangle \subset T$ liefert.

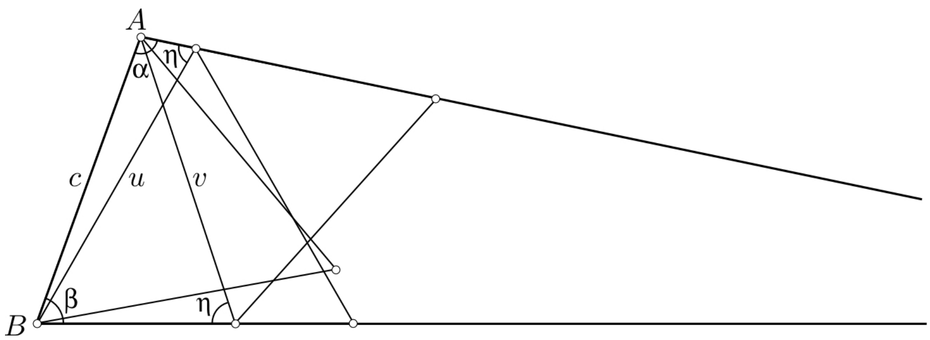

Fig. 4

In der Fig. 4 ist der Fall $\alpha \geq \beta > 60^\circ$ dargestellt. Kandidaten sind die drei gleichseitigen Dreiecke mit den Seitenlängen c, u und v. (Ist $\beta = 60^\circ$ oder sogar $\alpha = \beta = 60^\circ$, so fallen zwei oder sogar alle drei dieser Dreiecke zusammen. Wir gehen dem nicht im Einzelnen nach.) Es geht nun darum festzustellen, welche dieser drei Längen am grössten ist. Hierzu führen wir den Winkel η (siehe die Figur) ein; es gilt $\eta = 240^\circ - \alpha - \beta$. Nach dem Sinussatz hat man

$$\frac{c}{\sin\eta} = \frac{u}{\sin\alpha} = \frac{v}{\sin\beta}$$

und folglich

$$\max\{c, u, v\} = \frac{c}{\sin\eta}\ \max\{\sin\eta, \sin\alpha, \sin\beta\}\ .$$

Wegen $\beta \leq \alpha < 180^\circ - \beta$ ist $\sin\alpha \geq \sin\beta$ und folglich $u \geq v$. Weiters gilt

$$\sin\eta = \sin(\alpha + \beta - 60^\circ) \geq \sin\alpha$$

genau dann, wenn

$$\alpha \leq \alpha + \beta - 60^\circ \leq 180^\circ - \alpha\,,$$

mithin $2\alpha + \beta \leq 240^\circ$ ist. Trifft das zu, so ist c am grössten, andernfalls u. Im Spezialfall $(\alpha, \beta, \gamma) = (80^\circ, 80^\circ, 20^\circ)$ erhalten wir $c = u = v$. Es gibt dann drei verschiedene maximale $\triangle \subset T$!

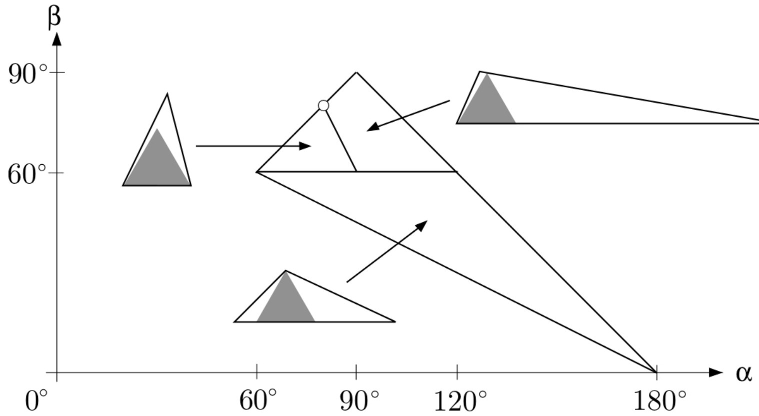

Fig. 5

Die Fig. 5 fasst das Ergebnis dieses Abschnitts zusammen. Sie zeigt den Teil $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ des *"moduli space"* Ω aller Dreiecke T. Unsere Betrachtungen haben drei Kammern geliefert, in deren Innern die eingezeichneten Maximumregimes gelten. Längs der Wände zwischen den Kammern und zu den nicht gezeichneten Teilen von Ω gibt es Mehrfachlösungen und Lösungen mit zusätzlichen Anschlägen. Diese Fälle sind nicht im Einzelnen dargestellt.

5. Die Papierstreifenkonstruktion der Ellipse

Zum Schluss holen wir noch den folgenden Hilfssatz nach:

Lemma 2. Gleiten die Endpunkte einer Strecke L der Länge ℓ längs zwei Geraden, die sich in O schneiden, so beschreibt jeder mit der Strecke fest verbundene Punkt eine Ellipse mit Zentrum O.

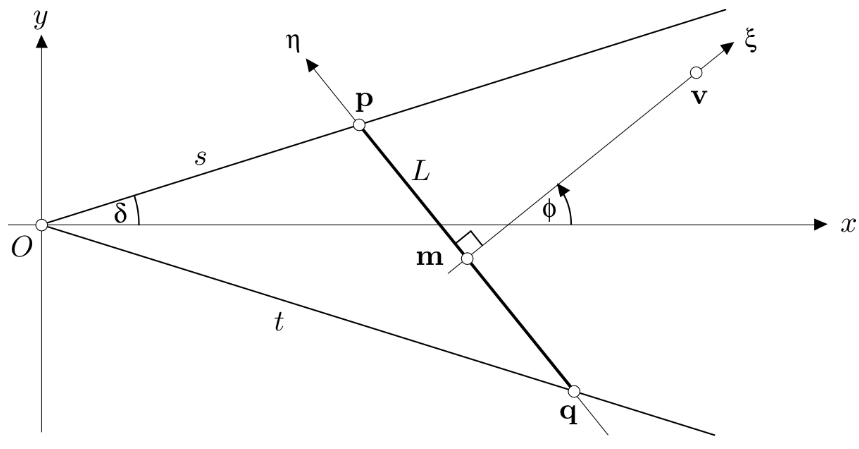

Fig. 6

Beweis. Wir legen die Disposition der Fig. 6 zu Grunde. Die beiden Geraden schneiden sich im Ursprung der (x, y)-Ebene unter dem Winkel 2δ. Der Mittelpunkt $\mathbf{m}$ der beweglichen Strecke ist der Ursprung einer mitbewegten (ξ, η)-Ebene, wobei L auf der η-Achse liegt. Als primäre Variable wählen wir den Winkel ϕ zwischen der x- und der ξ-Achse. Es seien

$$\mathbf{p} = s(\cos\delta, \sin\delta), \quad \mathbf{q} = t(\cos\delta, -\sin\delta)$$

die Endpunkte von L auf den beiden Geraden. Die Grössen $s,\ t \in \mathbb{R}$ hängen dann in bestimmter Weise von ϕ ab. Aus

$$\mathbf{p}-\mathbf{q}=s(\cos\delta,\sin\delta)-t(\cos\delta,-\sin\delta)\overset{!}{=}\ell(-\sin\phi,\cos\phi)$$

ergibt sich

$$s+t=\frac{\ell\cos\phi}{\sin\delta},\quad s-t=-\frac{\ell\sin\phi}{\cos\delta}$$

und weiter

$$\mathbf{m}(\phi)=\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{q})=\frac{1}{2}\bigl((s+t)\cos\delta,(s-t)\sin\delta\bigr)=\frac{\ell}{2}\bigl(\cot\delta\ \cos\phi,\ \tan\delta\ \sin\phi\bigr)\ .$$

Hiernach bewegt sich jedenfalls $\mathbf{m}$ auf einer Ellipse mit Zentrum O. Wir können aber noch mehr sagen: Besitzt ein Punkt $\mathbf{v}$ der mitbewegten Ebene gegebene Koordinaten (ξ,η), zum Beispiel die Koordinaten $\xi=\frac{\sqrt{3}}{2}\ell,\ \eta=0$, so entnimmt man der Figur die Bahn

$$\mathbf{v}(\phi)=\mathbf{m}(\phi)+\bigl(\xi\cos\phi-\eta\sin\phi,\eta\cos\phi+\xi\sin\phi\bigr)=\begin{bmatrix}\frac{\ell}{2}\cos\delta+\xi & -\eta\\ \eta & \frac{\ell}{2}\tan\delta+\xi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{bmatrix}\ .$$

Die Bahn $\phi\mapsto\mathbf{v}(\phi)$ ist somit das affine Bild eines Kreises, also eine Ellipse mit Zentrum O.

Literatur

[1] A. De Pano, Y. Ke, and J. O'Rourke: *Finding largest inscribed equilateral triangles and squares.* Proc. 25$^{\text{th}}$ Allerton Conf. Commun. Control Comput. 1987, pp. 869–878.

[2] https://math.stackexchange.com/questions/2379188